

Kleber Daum Machado

TEORIA DO ELETROMAGNETISMO

Volume III

Editora_____
_____**UEPG**

© Editora UEPG

Nenhuma parte deste livro, sem autorização prévia por escrito da Editora, poderá ser reproduzida ou transmitida, sejam quais forem os meios empregados: eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros.

Revisão:

Hein Leonard Bowles

Capa:

Kleber Daum Machado

Editoração eletrônica:

Kleber Daum Machado

Normalização técnica:

Biblioteca Central

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Maria Botelho CRB-9/994-UEPG/BICEN

M149t v.3	Machado, Kleber Daum Teoria do eletromagnetismo / Kleber Daum Machado. Ponta Grossa : Editora UEPG, 2006. v.; il.
--------------	--

1-Ondas eletromagnéticas. 2- Radiação. I.T.

CDD: 530.141

ISBN: 85-86941-77-8

Depósito legal na Biblioteca Nacional

Editora filiada à 

Associação Brasileira de Editoras Universitárias

Editora UEPG

Campus Universitário Uvaranas

Av. Carlos Cavalcanti, 4748

Ponta Grossa – Paraná – 84030-900

Fone/Fax: (42) 3220-3744

email: editora@uepg.br

www.uepg.br/editora

2006

Sumário

Prefácio	11
Lista de Figuras	17
Lista de Tabelas	25
20 Campos Eletromagnéticos, III: Potenciais, Campos e Transformações de Calibre	27
20.1 Potenciais Escalares e Vetoriais	27
20.2 Calibre de Coulomb	39
20.3 Calibre de Lorentz	48
20.4 Soluções da Equação de Onda e Potenciais Retardados	52
20.5 Funções de Green para as Equações de Onda	54
20.6 Equações de Jefimenko	94
20.7 Potenciais e Campos de Liénard-Wiechert	103
20.8 Lagrangeana e Hamiltoniana de uma Partícula num Campo Eletromagnético	158
20.9 Potenciais de Polarização	173
20.10 Exercícios	186
21 Campos Eletromagnéticos, IV: Leis de Conservação	191
21.1 Lei de Conservação da Carga Elétrica	191
21.2 Lei de Conservação da Energia	194
21.3 Lei de Conservação do Momento Linear	212
21.4 Lei de Conservação do Momento Angular	238
21.5 Quantização da Carga Elétrica e Monopólos Magnéticos	258
21.6 Exercícios	277

VI	RADIAÇÃO	279
22	Ondas Eletromagnéticas, I: Propagação de Ondas	281
22.1	Equação da Onda e Conceitos Iniciais	282
22.2	Ondas Eletromagnéticas Planas no Vácuo	301
22.3	Ondas Eletromagnéticas Planas em Meios Dielétricos	325
22.4	Ondas Eletromagnéticas Planas em Meios Condutores	337
22.5	Dispersão e Absorção	369
22.6	Superposição de Ondas Monocromáticas	387
22.7	Causalidade e Relações de Kramers-Kronig	393
22.8	Exercícios	416
23	Ondas Eletromagnéticas, II: Reflexão e Refração	419
23.1	Reflexão e Refração para Incidência Normal na Interface entre Dois Dielétricos	420
23.2	Reflexão e Refração para Incidência Oblíqua na Interface entre Dois Dielétricos	429
23.2.1	Campo Elétrico Paralelo ao Plano de Incidência	438
23.2.2	Campo Elétrico Perpendicular ao Plano de Incidência	447
23.2.3	Reflexão Interna Total	452
23.3	Reflexão e Refração numa Interface entre um Dielétrico e um Condutor	460
23.3.1	Incidência Normal	461
23.3.2	Incidência Oblíqua	467
23.4	Exercícios	482
24	Radiação, I: Cargas Pontuais	485
24.1	Radiação Emitida em Baixas Velocidades	488
24.2	Radiação Emitida por uma Carga com Velocidade e Aceleração Colineares	491
24.3	Radiação Emitida por uma Carga com uma Orientação Qualquer entre Velocidade e Aceleração	502
24.4	Radiação Emitida por uma Carga em Movimento Circular Uniforme	503
24.5	Distribuição em Frequência da Radiação Emitida por Cargas Pontuais em Movimento	517

24.5.1	Wigglers	553
24.5.2	Unduladores	554
24.6	Exercícios	555
25	Radiação, II: Multipolos e Antenas	557
25.1	Dois Sistemas Radiativos Importantes	557
25.1.1	Radiação Emitida por um Dipolo Elétrico Oscilante	558
25.1.2	Radiação Emitida por um Dipolo Magnético Oscilante	567
25.2	Radiação Emitida por Distribuições Localizadas de Cargas e Correntes	576
25.3	A Zona Estática ou Próxima	580
25.4	A Zona de Radiação ou Distante	581
25.4.1	Dipolo Elétrico	583
25.4.2	Dipolo Magnético	593
25.4.3	Quadrupolo Elétrico	597
25.5	Expansão em Multipolos para os Campos	617
25.5.1	Expansão em Multipolos para os Campos para uma Região sem Fontes	617
25.5.2	Expansão em Multipolos para os Campos para uma Região com Fontes	630
25.6	Distribuição Angular da Potência Irradiada pelos Momentos de Multipolo	660
25.6.1	Distribuição Angular da Potência Irradiada por um Multipolo Puro	670
25.6.2	Distribuição Angular da Potência Irradiada por Multipolos com Mesmo ℓ	673
25.6.3	Distribuição Angular da Potência Irradiada por Multipolos com ℓ Quaisquer	677
25.7	Distribuição Angular de Energia e Momento Angular Associados aos Multipolos	710
25.8	Exercícios	725
26	Radiação, III: Guias de Ondas Eletromagnéticas	729
26.1	Propagação de Ondas entre Dois Planos Condutores	730
26.2	Guias de Ondas Formadas por um Condutor Oco em Forma de Tubo	739

26.2.1	Guias de Ondas de Seção Reta Retangular	775
26.2.2	Guias de Ondas de Seção Reta Circular	786
26.3	Cavidades Ressonantes	793
26.4	Exercícios	816
27	Radiação, IV: Difração	819
27.1	Princípio de Huygens e Visão Qualitativa da Difração . . .	820
27.2	Teoria Escalar de Difração	823
27.3	Difração de Fraunhofer	845
27.3.1	Difração por Fenda Única	850
27.3.2	Difração por Fenda Dupla e por Múltiplas Fendas	853
27.3.3	Fenda Retangular	867
27.3.4	Fenda Circular	870
27.4	Difração de Fresnel	880
27.5	Expansão de Ondas Eletromagnéticas Planas em Ondas Esféricas	889
27.6	Espalhamento por uma Esfera Perfeitamente Condutora .	908
27.7	Espalhamento Thomson	933
27.8	Exercícios	940
28	Radiação, V: Reação de Radiação	943
28.1	Cálculo Preliminar da Reação de Radiação Baseado na Conservação de Energia	943
28.2	Cálculo da Reação de Radiação para um Modelo Dipolar para uma Carga Pontual	946
28.3	Cálculo da Reação de Radiação para um Elétron	960
28.4	Exercícios	974
	APÊNDICES	975
G	Correntes Elétricas Variáveis	977
G.1	Geradores e Motores Elétricos	978
G.2	Circuitos de Corrente Contínua	986
G.2.1	Circuito RC em Série	987
G.2.2	Circuito RL em Série	993
G.2.3	Circuito LC em Série	998
G.2.4	Circuito RLC em Série	1005

I	Raízes Complexas	1009
II	Raízes Reais e Distintas	1011
III	Raízes Reais e Iguais	1012
G.3	Circuitos de Corrente Alternada	1016
G.4	Exercícios	1035
H	Equação de Helmholtz	1037
H.1	Equação de Helmholtz e Funções de Bessel Esféricas . . .	1037
H.2	Expansão da Função de Green em Funções de Bessel Esféricas	1051
H.3	Exercícios	1059
I	Lentes Esféricas	1061
I.1	Lentes Esféricas Delgadas	1061
I.2	Lentes Esféricas Espessas e o Método Matricial	1072
I.3	Exercícios	1081
	Referências Bibliográficas	1083
	Índice Remissivo	1089

Prefácio

Este é o terceiro volume do livro que trata da teoria clássica do Eletromagnetismo, sendo seqüência dos Volumes I e II, já publicados. O primeiro volume abrange essencialmente assuntos relacionados com a Eletrostática, enquanto o segundo discute Eletrodinâmica Elementar e Magnetostática e termina fundamentando o Eletromagnetismo por meio da obtenção das quatro Equações de Maxwell, que reúnem os quatro fundamentos básicos de todos os fenômenos eletromagnéticos. No presente volume, passamos ao estudo de “aplicações” da teoria vista, discutindo vários assuntos de importância tanto teórica quanto prática, dos pontos de vista científico e tecnológico.

O volume inicia, no capítulo 20, com o estudo da extensão dos potenciais eletrostáticos e magnetostáticos, já discutidos nos Volumes I e II, para seus equivalentes dependentes do tempo. O uso desses potenciais, e de certas condições auxiliares a que eles estão sujeitos, os chamados calibres, pode facilitar bastante a resolução das equações de Maxwell, que formam um sistema de equações diferenciais acopladas bastante complicado, em geral. A partir desses calibres, definidos nas seções 20.1, 20.2 (calibre de Coulomb) e 20.3 (calibre de Lorentz), as equações de onda eletromagnética associadas com as equações de Maxwell podem ser resolvidas por meio de funções de Green, por exemplo (seções 20.4 e 20.5). A partir dos potenciais, os campos eletromagnéticos podem ser obtidos, o que envolve as equações de Jefimenko, discutidas na seção 20.6, que são para distribuições macroscópicas de cargas e correntes. Na seção 20.7, estudamos o comportamento de cargas pontuais, cujos campos de Liénard-Wiechert serão necessários posteriormente no capítulo 24, que trata da radiação emitida por cargas aceleradas. Na seqüência, na seção 20.8 apresentamos a Lagrangeana e a Hamiltoniana de uma partícula carregada sujeita a um campo eletromagnético e encerramos com a apresentação, na seção 20.9, de uma forma alternativa para os potenciais eletromagnéticos.

O capítulo 21 é, talvez, juntamente com o precedente, o mais importante do ponto de vista teórico. Ele apresenta as formas das leis de conservação obedecidas pelos sistemas eletromagnético-mecânicos, estendendo os domínios de validade das famosas leis de conservação mecânicas para englobar também os fenômenos eletromagnéticos. Assim, iniciando com a lei de conservação da carga, na seção 21.1, temos a lei de conservação da energia, na seção 21.2, a lei de conservação do momento linear, onde grandezas como o vetor de Poynting são introduzidas (seção 21.3), e a lei de conservação do momento angular, na seção 21.4. O último assunto, a quantização da carga elétrica e as implicações de uma possível existência de monopólos magnéticos, discutidas na seção 21.5, completa o capítulo.

O capítulo 22 inicia nossas aplicações propriamente ditas, tratando do assunto ondas eletromagnéticas. Começamos pela definição das grandezas principais necessárias ao estudo, na seção 22.1, estabelecendo as equações de onda para casos simples. O primeiro caso, o de ondas planas no vácuo, é estudado na seção 22.2, com a extensão para meios dielétricos na seção 22.3. Incluímos condutores na seção 22.4 e, em seguida, estudamos o primeiro modo de interação da radiação eletromagnética com a matéria, por meio dos fenômenos de absorção e dispersão, vistos na seção 22.5. Depois, permitimos que nossas ondas possam ter uma distribuição de frequências, o que é, na prática, o caso mais comum, e discutimos, na seção 22.6, uma superposição de ondas monocromáticas. Por fim, introduzimos as importantes relações de Kramers-Kronig, na seção 22.7, que participam do estudo de materiais dispersivos, em que as grandezas eletromagnéticas características do meio dependem de frequência.

Após o estudo de ondas, no capítulo 23 introduzimos uma condição de contorno ao problema de propagação de ondas. Ou, em outras palavras, as ondas agora incidem numa interface, que pode ser um espelho ou a superfície da água de um rio, por exemplo, quando então ocorrem os fenômenos de reflexão e refração. Na seção 23.1, discutimos inicialmente o que ocorre numa incidência normal à interface entre dois dielétricos, e na seção 23.2 é feita a extensão a um ângulo qualquer de incidência. Os condutores são acrescentados na seção 23.3. Nesse capítulo, vários fenômenos interessantes são discutidos, como reflexão interna total, polarização por reflexão, energia transmitida de um meio a outro e propagação de ondas evanescentes em condutores, e algumas idéias são resgatadas posteriormente em outros locais.

O estudo da emissão de radiação propriamente dito inicia no capítulo 24, que discute de forma detalhada a emissão de radiação por cargas pontuais.

Vários casos particulares importantes são estudados, como a emissão em baixas velocidades, na seção 24.1, e a emissão quando velocidade e aceleração são colineares, na seção 24.2, a emissão quando a partícula executa um movimento circular, característico da operação de síncrotrons (seção 24.4). O caso geral é discutido na seção 24.3. Em seguida, estudamos a distribuição em frequências da radiação emitida, na seção 24.5, introduzindo também as idéias por trás de equipamentos como wigglers e unduladores, comuns em laboratórios que utilizam luz síncrotron.

O capítulo 25 trata da radiação emitida por distribuições de cargas e correntes. Antenas transmissoras e receptoras, como antenas de TV ou rádio, são exemplos comuns de tais distribuições. O capítulo inicia com o estudo de sistemas simples radiativos, estudados na seção 25.1. Em seguida, as bases da emissão para um sistema qualquer são fundamentadas na seção 25.2, com o estudo dos casos particulares das zonas próxima (seção 25.3) e distante (seção 25.4). Na zona intermediária a situação é mais complicada, e precisamos introduzir a idéia de expansão em multipolos para os campos de radiação, o que é feito a partir da seção 25.5. Obtemos nessa seção os campos em termos de multipolos radiativos e determinamos também grandezas como a distribuição angular da potência irradiada pelos multipolos, na seção 25.6, e a energia e o momento angular irradiados pelos multipolos, na seção 25.7. Alguns exemplos importantes, como os de antenas de meia-onda, são discutidos exhaustivamente nessas seções.

O estudo de guias de ondas e cavidades ressonantes é desenvolvido no capítulo 26, iniciando com uma discussão simples sobre a propagação de ondas entre dois planos condutores (seção 26.1) e continuando com o estudo de guias de ondas formadas por um condutor oco de seção transversal reta constante (seção 26.2). Em particular, os importantes casos de guias de ondas com seções transversais retangulares e circulares são estudados em detalhe, nas seções 26.2.1 e 26.2.2, respectivamente. O capítulo continua com a discussão de cavidades ressonantes, na seção 26.3, incluindo o cálculo da energia armazenada e da potência dissipada numa cavidade, com a determinação, ainda, do fator de qualidade da cavidade.

Os tópicos de difração e espalhamento são discutidos no capítulo 27, iniciando com uma descrição qualitativa do fenômeno em termos da construção de Huygens (seção 27.1). Em seguida, na seção 27.2, a difração é descrita quantitativamente em termos da teoria escalar de difração, sendo a teoria vetorial apresentada e comentada. Na seção 27.3 particularizamos o estudo da difração para a difração de Fraunhofer, com algumas aplicações importantes,

considerando a difração por fenda única (seção 27.3.1), por fenda dupla e por múltiplas fendas (seção 27.3.2), por uma fenda retangular (seção 27.3.3) e por uma fenda circular (seção 27.3.4). Depois, a difração de Fresnel é apresentada, na seção 27.4, com o estudo do caso de uma fenda de difração. O capítulo continua com o estudo do espalhamento por objetos, sendo necessário inicialmente obter uma importante expansão para ondas eletromagnéticas planas em termos de ondas esféricas, o que é feito na seção 27.5. Assim, na seção 27.6, o espalhamento de ondas eletromagnéticas por uma esfera perfeitamente condutora é estudado, incluindo-se as idéias de seção de choque diferencial e seção de choque total de espalhamento. O capítulo finaliza com o estudo do espalhamento Thomson, na seção 27.7.

O capítulo 28 trata de um assunto bastante interessante, a reação de radiação, que é a força produzida pelos campos eletromagnéticos de uma carga ao agirem sobre ela mesma. A existência dessa força decorre do fato de os campos se propagarem com velocidade finita, de modo que partes diferentes da carga interagem umas com as outras, produzindo uma reação associada com a radiação. Um cálculo baseado na lei de conservação de energia é feito na seção 28.1, enquanto as seções 28.2 e 28.3 estabelecem as grandezas relevantes para o caso de um modelo muito simples para uma carga pontual e para o modelo de Lorentz para o elétron, respectivamente.

O volume contém ainda três apêndices importantes. No apêndice G, discutimos a produção e o uso de correntes elétricas variáveis, enfocando circuitos elementares ligados tanto a fontes de tensão contínuas como alternadas. Os conceitos de fasores, reatâncias e impedâncias, além da ressonância em circuitos de corrente alternada, são introduzidos de forma simples mas bastante intuitiva, e o importante conceito de potência RMS é introduzido. No apêndice H, nosso objetivo principal é apresentar um método de resolução das equações de Helmholtz que dá origem às funções de Bessel esféricas, as quais são muito importantes no estudo da radiação de multipolos desenvolvido no capítulo 25. Sendo assim, esse apêndice complementa o referido capítulo. Por último, o apêndice I apresenta uma aplicação das idéias de refração a sistemas de lentes esféricas, tanto delgadas quanto espessas. Em particular, o interessante método matricial para formação de imagens por meio de lentes espessas é apresentado, encerrando este volume.

Como comentários finais, cabe aqui um pedido de desculpa aos leitores pela demora em apresentar o terceiro volume. Após a publicação do Volume II assumi um cargo de professor efetivo junto ao Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná e passei a executar todas as atividades de

ensino, pesquisa e extensão a que nós professores nos dedicamos, incluindo preparação de aulas, orientações de iniciações científicas, mestrados e doutorados, que realmente tomam bastante tempo. Assim, o tempo que podia ser destinado à escrita do texto do livro tornou-se pequeno, o que acabou atrasando o seu término. Agradeço, assim, aos leitores, que tiveram a paciência de esperar por este volume. Agradeço, também, à Editora UEPG, que sempre executa um trabalho editorial excepcional. Como das vezes anteriores, peço que possíveis sugestões, críticas e comentários sobre o livro sejam enviados a ela ou diretamente a mim.

Kleber Daum Machado

Lista de Figuras

20.1	Um fio retilíneo muito longo, para o cálculo dos potenciais e campos retardados	88
20.2	Grandezas importantes para o cálculo dos potenciais retardados para uma carga pontual	104
20.3	Vetores importantes para o cálculo da expressão 20.164 .	150
20.4	Campo elétrico de uma partícula com carga Q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ constante	155
20.5	Campo magnético de uma partícula com carga Q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ constante	156
20.6	Fio para o exercício 20.2	187
21.1	Um cabo coaxial para o cálculo da potência transmitida por ele	210
21.2	Reprodução do cabo coaxial da figura 21.1	224
21.3	Circuito retangular para demonstração do momento linear mecânico “escondido”	226
21.4	Solenóide e duas cascas esféricas, para demonstração da conservação do momento angular	250
21.5	Duas representações para o monopólo magnético	269
21.6	Duas curvas C e C' e área definida por elas	274
22.1	Altura y de uma onda numa corda como função de x e de t	282
22.2	Visão ampliada de um elemento de comprimento dl de uma corda pela qual passa uma onda	284
22.3	Uma onda transversal propagando-se na direção do eixo z	291

22.4	Diagramas para ondas circularmente polarizadas	295
22.5	Vetor de polarização para uma onda elipticamente polarizada	298
22.6	Vetor de propagação de onda em três dimensões	299
22.7	Representação do fluxo de energia transportado pela onda através de uma superfície de área A	315
22.8	Gráficos da densidade de corrente em função da distância ao eixo dos fios de cobre descritos pelos parâmetros mostrados na tabela 22.3	363
22.9	Gráfico da função descrita pela equação 22.113 para o intervalo de frequências de 1 Hz a 3 MHz	368
22.10	Modelo simples para um elétron para estudo da absorção e dispersão	370
22.11	Índice de refração e coeficiente de absorção próximo a uma ressonância	376
22.12	Trajeto para integração da função $f(\omega)$	405
22.13	Círculo para o teorema 22.1	407
23.1	Onda eletromagnética em incidência normal à interface entre dois meios dielétricos lineares	421
23.2	Vetores de onda para incidência oblíqua na interface entre dois dielétricos	430
23.3	Diagrama para obtenção das leis de reflexão pelo princípio de Fermat	434
23.4	Diagrama para obtenção das leis de refração pelo princípio de Fermat	436
23.5	Vetores de onda para incidência oblíqua na interface entre dois dielétricos	439
23.6	Vetores de onda para incidência oblíqua na interface entre dois dielétricos	447
23.7	Coeficientes de reflexão para uma interface ar-água	452
23.8	Demonstração da reflexão interna total frustrada	458
23.9	Ilustração do efeito Goos-Hänchen	459
23.10	Montagem da experiência de Wiener	466
23.11	Diagrama para a incidência oblíqua num condutor	468

24.1	Padrão da radiação emitida por uma carga movimentando-se em baixa velocidade	490
24.2	Radiação emitida por uma carga com velocidade e aceleração colineares	493
24.3	Carga Q executando um movimento circular uniforme no plano xz	504
24.4	Padrão de emissão de uma carga movendo-se em movimento circular uniforme	509
24.5	Representação da radiação emitida por uma carga em movimento circular uniforme irradiando em direção a um observador O	514
24.6	Parte relevante da trajetória da carga Q executando um movimento qualquer e emitindo radiação em direção a um observador capaz de analisar o espectro de frequências emitidas	528
24.7	Intensidade da radiação emitida no plano da órbita ($\theta = 0$) para uma carga em movimento extremamente relativístico em função da frequência ω e ângulo sólido . .	543
24.8	Comparação entre as intensidades da radiação emitida em função de θ para os três regimes de frequência	546
24.9	Intensidade da radiação emitida por unidade de frequência para os três regimes de frequência	548
24.10	Representação do princípio de funcionamento de um dispositivo de inserção	552
24.11	Trajetoária oscilante descrita pela carga sob a ação dos campos magnéticos de um dispositivo de inserção	553
25.1	Configuração para o cálculo da radiação emitida por um dipolo elétrico	558
25.2	Espira utilizada para representar um dipolo magnético . .	568
25.3	Diagrama apresentando a distribuição de fontes e as grandezas envolvidas	580
25.4	Representação do padrão da radiação emitida por um quadrupolo elétrico	616
25.5	Modelo para uma antena linear alimentada pelo centro por um gerador que fornece corrente alternada	646

25.6	Modelo para uma antena linear alimentada pela extremidade centro por um gerador que fornece corrente alternada	656
25.7	Diagrama da potência média por unidade de ângulo sólido para uma antena de meia-onda alimentada pelo centro	697
25.8	Diagrama da potência média por unidade de ângulo sólido para uma antena de onda completa alimentada pelo centro	698
25.9	Associação de N antenas de comprimento L , alimentadas pelo centro	699
25.10	Gráfico do quadrado da função de associação de antenas dada pela equação 25.357.	705
25.11	Gráfico da equação 25.368 apresentando a potência irradiada por unidade de ângulo sólido no plano xy ($\theta = \frac{\pi}{2}$) para uma associação de N antenas	708
25.12	Padrão tridimensional de emissão de uma associação de 5 antenas de meia-onda espaçadas por $X = \frac{\lambda}{2}$ e descrito pela equação 25.356	709
26.1	Guia de ondas eletromagnéticas formada por dois planos condutores perfeitos separados por uma distância d . . .	730
26.2	Disposição dos campos para uma onda polarizada com campo elétrico transversal à direção de propagação (modo ET)	731
26.3	Grandezas relevantes para o estudo da propagação do modo ET entre dois planos condutores	731
26.4	Guia de onda oca formada por um condutor em forma de tubo de seção transversal arbitrária mas constante . .	740
26.5	Guia de onda oca formada por um condutor em forma de tubo de seção transversal retangular	775
26.6	Guia de onda oca formada por um condutor em forma de tubo de seção transversal circular	786
27.1	Frentes de onda plana, para a construção de Huygens . .	820
27.2	Uma frente de onda plana com minifontes	821

27.3	Miniondas obtidas a partir das minifontes e intersecção, formando a nova frente de onda	821
27.4	Construção de Huygens para difração através de um orifício	822
27.5	Considerações iniciais sobre difração	823
27.6	Superfícies importantes para a difração	826
27.7	Configuração para o espalhamento de radiação por um objeto de formato qualquer	835
27.8	Diagrama para a difração de Fraunhofer	846
27.9	Diagrama para a difração por fenda única	850
27.10	Amplitude normalizada para a difração por fenda única	851
27.11	Intensidade normalizada para a difração por fenda única	852
27.12	Diagrama para a difração por fenda dupla	854
27.13	Intensidade normalizada para difração por fenda dupla para o caso $b = 4D$	856
27.14	Diagrama para a difração por múltiplas fendas para N par	857
27.15	Intensidade normalizada para difração por múltiplas fendas para o caso $b = D$ e $N = 4$	863
27.16	Diagrama para a difração por múltiplas fendas para N ímpar	864
27.17	Diagrama para a difração por uma fenda retangular	868
27.18	Intensidade normalizada para difração por uma fenda retangular para o caso $D_v = 2D_u$	870
27.19	Diagrama para a difração por uma fenda circular	871
27.20	Intensidade normalizada para difração por uma fenda circular de raio D	878
27.21	Diagrama para a difração de Fresnel por uma fenda única	881
27.22	Espiral de Cornu	884
27.23	Padrão de intensidade para a difração de Fresnel por uma fenda semi-infinita, mostrando as oscilações de intensidade em torno de I_0 para x crescente	888
27.24	Seção de choque diferencial para espalhamento por uma esfera perfeitamente condutora no limite de comprimentos de onda grandes em comparação com o raio da esfera	930

27.25	Seção de choque de espalhamento para uma carga livre excitada por uma onda plana polarizada na direção x incidente na direção z	937
27.26	Seção de choque de espalhamento para uma carga livre excitada por uma onda plana não-polarizada na direção x incidente na direção z	939
28.1	Modelo “dipolar” para uma carga pontual Q	947
28.2	Grandezas importantes para o cálculo da reação de radiação para um elétron	961
G.1	Esquema de um gerador elétrico de corrente alternada . .	978
G.2	Gráfico da corrente induzida para o gerador de meia-onda	981
G.3	Gráfico do fluxo magnético para o gerador de meia-onda .	982
G.4	Vista de um gerador com vários enrolamentos no rotor .	982
G.5	Tensão de saída do gerador com vários enrolamentos no rotor	983
G.6	Esquema do sistema de anéis deslizantes	984
G.7	Tensão e corrente de saída do gerador de onda completa .	984
G.8	Um circuito RC em série	988
G.9	Gráfico $Q(t) \times t$ para os processos de carga e descarga do capacitor no circuito RC	992
G.10	Um circuito RL em série	993
G.11	Gráfico $i(t) \times t$ para a corrente no circuito RL	997
G.12	Diagrama de um circuito LC em série	998
G.13	Gráfico $Q(t) \times \omega_0 t$ para o circuito LC sem fonte de tensão externa	1003
G.14	Diagrama de um circuito RLC em série	1006
G.15	Gráfico de $Q(t) \times t$ para o circuito RLC subcrítico	1011
G.16	Gráfico de $Q(t) \times t$ para o circuito RLC supercrítico . . .	1013
G.17	Gráfico de $Q(t) \times t$ para o circuito RLC crítico	1015
G.18	Um circuito de corrente alternada puramente resistivo . .	1017
G.19	Representação de um fasor	1017
G.20	Representação da tensão alternada como um fasor	1018
G.21	Diagrama de fasores para o circuito da figura G.18	1018

G.22	Um circuito puramente capacitivo	1019
G.23	Diagrama de fasores para o circuito da figura G.22	1020
G.24	Um circuito puramente indutivo	1021
G.25	Diagrama de fasores para o circuito da figura G.24	1023
G.26	Diagrama de fasores qualitativo para o circuito RLC em série da figura G.14	1023
G.27	Triângulo definido a partir da equação G.61a	1026
I.1	Esquema da focalização de uma lente esférica	1061
I.2	Esquema da focalização de uma lente esférica	1062
I.3	Refração na primeira superfície esférica da lente, onde o raio de luz passa do ar para a lente	1063
I.4	Refração na segunda superfície esférica da lente, onde o raio de luz passa da lente para o ar	1064
I.5	Esquema dos raios de luz para uma lente convergente	1068
I.6	Esquema dos raios de luz para uma lente divergente	1068
I.7	Esquema da formação da imagem numa lente	1069
I.8	Refração numa superfície esférica entre dois meios de índices de refração n e n'	1073
I.9	Transmissão do raio de luz de uma superfície até a próxima	1075
I.10	Formação de imagem usando uma lente espessa	1076

Lista de Tabelas

22.1	Espectro eletromagnético	312
22.2	Espectro eletromagnético da luz visível	313
22.3	Profundidades de penetração para ondas eletromagnéticas com as frequências indicadas na tabela .	362
25.1	Alguns coeficientes $\check{C}_{\ell,0}^e$ dados pela equação 25.207 para as antenas de meia-onda	654
25.2	Alguns coeficientes $\check{C}_{\ell,0}^e$ dados pela equação 25.209 para as antenas de onda completa	655
25.3	Alguns coeficientes $\check{C}_{\ell,0}^e$ dados pela equação 25.221 para as antenas de meia-onda alimentadas pelo seu extremo	658
25.4	Alguns coeficientes $\check{C}_{\ell,0}^e$ dados pela equação 25.222 para as antenas de onda completa alimentadas pelo seu extremo	659

Capítulo 20

Campos Eletromagnéticos, III: Potenciais, Campos e Transformações de Calibre

Aqui veremos como a introdução de potenciais escalares e vetoriais apropriados pode facilitar a resolução das equações de Maxwell para o caso geral em que é dada uma densidade de cargas $\rho(\vec{r}, t)$ e uma densidade de correntes $\vec{J}(\vec{r}, t)$ dependentes do tempo. Além disso, obteremos os potenciais e campos produzidos por essas distribuições de cargas.

20.1 Potenciais Escalares e Vetoriais

As equações de Maxwell na forma 20.1,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20.1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (20.1b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (20.1c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (20.1d)$$

formam um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem parciais e acopladas. Em casos simples, elas podem ser resolvidas para darem os campos

elétrico e magnético de uma distribuição de carga $\rho(\vec{r}, t)$ e uma distribuição de correntes $\vec{J}(\vec{r}, t)$, especialmente quando há simetrias envolvidas, de forma que as leis de Maxwell na forma integral possam ser utilizadas. Entretanto, a sua resolução para um caso geral não é tão simples, ou seja, não é uma tarefa fácil determinar $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ e $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$ dados $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{J}(\vec{r}, t)$ para um caso geral. No caso estático, tanto elétrico quanto magnético, as leis de Coulomb e de Biot-Savart podem ser aplicadas, e algumas técnicas (integração direta, funções de Green, método das imagens, potenciais escalares e vetoriais magnéticos, por exemplo) podem ser utilizadas para resolver a questão. No caso geral, em que todas as grandezas relevantes podem depender do tempo, aquelas duas equações, que são válidas para condições estáticas, não podem ser empregadas na forma usual em que as conhecemos. Precisamos então estender a validade delas para o caso geral e eventualmente obter novos métodos para resolução das equações de Maxwell acima.

No desenvolvimento dos métodos de resolução de problemas eletrostáticos e magnetostáticos, o conceito de potencial escalar ou vetorial foi útil em várias situações ¹. Assim, podemos explorar esse fato e determinar potenciais escalares e vetoriais apropriados para o caso geral e verificar se, procedendo desse modo, conseguimos simplificar as equações de Maxwell 20.1.

A primeira verificação com relação aos potenciais é que a equação de Maxwell 20.1b,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

combinada com a relação 1.58a,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{A}}) = 0$$

indica que o campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$ pode ser expresso em termos do potencial vetor magnético 16.1,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}} \quad (20.2)$$

lembrando que agora $\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)$. A relação entre $\vec{\mathcal{B}}$ e $\vec{\mathcal{A}}$ é direta, mas no caso do campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$ e do potencial elétrico $\mathbb{V}$, há uma pequena modificação a fazer. Como agora os campos dependem do tempo, pela equação de

¹ Bom, talvez mais útil na Eletrostática do que na Magnetostática, por causa da mensurabilidade do potencial elétrico.

Maxwell 20.1c,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

o campo elétrico não pode ser escrito simplesmente como $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla V$, que é válida apenas no caso estático, quando então $\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0$. Porém, se utilizarmos o potencial vetor magnético, podemos reescrever a lei de Faraday como

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{\mathcal{A}}) = 0$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \nabla \times \left[\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right] = 0$$

ou ainda,

$$\nabla \times \left[\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right] = 0$$

Para o termo entre colchetes podemos utilizar agora a identidade 1.58a e definir um potencial escalar, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = -\nabla V$$

e então,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \quad (20.3)$$

que se reduz à expressão usual quando $\vec{\mathcal{A}}$ não é função do tempo (situação magnetostática). Assim, os campos elétrico e magnético ficam escritos em termos de potenciais por meio das equações 20.2 e 20.3.

Pelo modo como eles foram definidos, os potenciais acima estão de acordo com a lei de Gauss magnética e a lei de Faraday. Precisamos verificar o que ocorre com as outras duas leis, a lei de Gauss e a lei de Ampère-Maxwell. Partindo da lei de Gauss 20.1a,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e da expressão 20.3, obtemos

$$\nabla \cdot \left[-\nabla \mathbb{V} - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ou

$$-\overbrace{\nabla \cdot \nabla}^{\nabla^2} \mathbb{V} - \nabla \cdot \left[\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

que pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \mathbb{V} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20.4)$$

Essa equação substitui a equação de Poisson 6.1 para o caso eletrostático. Partindo agora da lei de Ampère-Maxwell 20.1d,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

e utilizando 20.2 e 20.3, ficamos com

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{A}}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\nabla \mathbb{V} - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right]$$

A identidade 1.58c estabelece que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Aplicando essa identidade na equação anterior, achamos

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{A}} = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \mathbb{V}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right]$$

ou

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}) + \nabla \left[\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \right] - \nabla^2 \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J}$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \right] = -\mu_0 \vec{J} \quad (20.5)$$

que é a equação derivada da lei de Ampère-Maxwell. Note que as equações de Maxwell envolvem a determinação de $\vec{E}$ e $\vec{B}$, os quais têm, cada um, três componentes, ou seja, na verdade temos seis incógnitas. As equações 20.4 e 20.5, apesar de não serem tão belas e concisas quanto as equações de Maxwell, contêm todas as informações físicas destas. Elas envolvem a determinação de quatro incógnitas, a saber, o potencial escalar $\mathbb{V}$ e três componentes do potencial vetorial magnético $\vec{A}$.

As equações 20.4 e 20.5 podem ser eventualmente simplificadas em certas situações, mediante o uso de *transformações de gauge* (transformações de calibre), já que as expressões 20.2 e 20.3 não definem univocamente um potencial escalar $\mathbb{V}$ e um potencial vetorial $\vec{A}$. Para ver isso, considere novamente 20.2,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Pela identidade 1.58.b, temos que, para qualquer função escalar Λ , vale

$$\nabla \times \nabla \Lambda = 0$$

Assim, se considerarmos

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda \quad (20.6)$$

temos que o campo magnético correspondente será

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \nabla \times \vec{A}' \\ &= \nabla \times (\vec{A} + \nabla \Lambda) \\ &= \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \Lambda \\ \vec{B}' &= \vec{B} \end{aligned}$$

ou seja, o campo magnético, que é a grandeza física relevante e observável, permanece invariante sob a transformação 20.6. Precisamos verificar agora o que ocorre com o campo elétrico 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V} - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t}$$

quando submetido à mesma transformação. Nesse caso, considerando também a possibilidade de que $\mathbb{V}$ possa ser transformado para um $\mathbb{V}'$, temos

$$\vec{\mathcal{E}}' = -\nabla\mathbb{V}' - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{A}} + \nabla\Lambda)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}' = -\nabla\mathbb{V}' - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda)$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{E}}' = -\nabla\mathbb{V}' - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \nabla\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}' = -\nabla\left[\mathbb{V}' + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right] - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t}$$

Portanto, se definirmos a transformação

$$\mathbb{V}' = \mathbb{V} - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{20.7}$$

ficamos com

$$\vec{\mathcal{E}}' = -\nabla\left[\mathbb{V} - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right] - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}' = -\nabla\mathbb{V} - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = \vec{\mathcal{E}}$$

de modo que o campo elétrico também fica invariante. Assim, a transformação de calibre dada pelas equações 20.6 e 20.7,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \quad (20.8a)$$

$$\mathbb{V}' = \mathbb{V} - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad (20.8b)$$

deixa os campos eletromagnéticos invariantes frente a transformações de calibre, e essa invariância é chamada de *invariância de calibre*. Dessa maneira, podemos escolher uma função arbitrária $\Lambda(\vec{r}, t)$ de modo a ter, para as condições de um certo problema, a transformação de calibre que seja mais adequada para sua resolução. Existem vários calibres importantes. Os dois principais são o calibre de Coulomb, também chamado de transversal ou de radiação, e o calibre de Lorentz. Antes de estudar esses calibres, vamos resolver alguns problemas de aplicação.

Exemplo 20.1. *Dados os potenciais*

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \mathcal{A}_0 x^2 t \hat{\mathbf{k}}$$

determine os campos elétrico e magnético correspondentes, verifique se eles satisfazem as equações de Maxwell e ache as distribuições de carga e corrente que dariam origem a esses potenciais.

Os campos são obtidos através das equações 20.2,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

e 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

e ficam

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= -\nabla\mathbb{V} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{A}_0 x^2 t \hat{\mathbf{k}}) \\ \vec{\mathcal{E}} &= -\mathcal{A}_0 x^2 \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times (\mathcal{A}_0 x^2 t \hat{\mathbf{k}}) \\
&= \mathcal{A}_0 t \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times (x^2 \hat{\mathbf{k}}) \\
&= 2\mathcal{A}_0 x t \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} \\
\vec{B} &= -2\mathcal{A}_0 x t \hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

A primeira equação de Maxwell fornece a densidade de carga associada aos potenciais acima, isto é, de 20.1a, achamos

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\frac{\rho}{\epsilon_0} &= \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot (-\mathcal{A}_0 x^2 \hat{\mathbf{k}}) \\
\rho &= -2\epsilon_0 \mathcal{A}_0 x \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\
\rho &= 0
\end{aligned}$$

Testando a equação 20.1b, temos

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B} &= \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot (-2\mathcal{A}_0 x t \hat{\mathbf{j}}) \\
\nabla \cdot \vec{B} &= -2\mathcal{A}_0 t \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}$$

e ela é verificada. Passando agora à terceira equação de Maxwell, dada pela expressão 20.1c, temos que verificar se

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times (-\mathcal{A}_0 x^2 \hat{\mathbf{k}}) &\stackrel{?}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (-2\mathcal{A}_0 x t \hat{\mathbf{j}}) \\
-2\mathcal{A}_0 x \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} &\stackrel{?}{=} 2\mathcal{A}_0 x \hat{\mathbf{j}} \\
2\mathcal{A}_0 x \hat{\mathbf{j}} &= 2\mathcal{A}_0 x \hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

e a terceira equação é verificada. A quarta, expressão 20.1d, fornece a densidade de corrente associada aos potenciais definidos acima, ou seja,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ou

$$\begin{aligned} \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times (-2\mathcal{A}_0 x t \hat{j}) &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\mathcal{A}_0 x^2 \hat{k}) \\ -2\mathcal{A}_0 t \hat{i} \times \hat{j} &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{J} &= -\frac{2\mathcal{A}_0 t}{\mu_0} \hat{k} \end{aligned}$$

Exemplo 20.2. *Mostre que as equações 20.4 e 20.5,*

$$\nabla^2 \mathbb{V} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} - \nabla \left[\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \right] = -\mu_0 \vec{J}$$

podem ser reescritas numa forma mais simétrica, utilizando o operador d'Alambertiano $\square^2$, definido no vácuo por

$$\square^2 = \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (20.9)$$

e a função Ξ , dada por

$$\Xi = \nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \quad (20.10)$$

Observando a equação 20.5, vemos que ela pode ser imediatamente escrita em termos das grandezas definidas acima, de modo que ela fica

$$\square^2 \vec{\mathcal{A}} - \nabla \Xi = -\mu_0 \vec{J}$$

A equação 20.4 precisa de algumas manipulações adicionais. Vamos somar e subtrair o termo $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2}$ do lado esquerdo da equação, ou seja,

$$\overbrace{\nabla^2 \mathbb{V} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2}}^{\square^2 \mathbb{V}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ou

$$\square^2 \mathbb{V} + \frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\left[\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} \right]}^{\Xi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ou ainda,

$$\square^2 \mathbb{V} + \frac{\partial \Xi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Reunindo as duas expressões, temos

$$\square^2 \mathbb{V} + \frac{\partial \Xi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20.11a)$$

$$\square^2 \vec{\mathcal{A}} - \nabla \Xi = -\mu_0 \vec{J} \quad (20.11b)$$

que está escrita agora de uma forma um pouco mais simétrica.

Exemplo 20.3. *Sendo dados os potenciais*

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

e

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = 0$$

a) *Determine os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ correspondentes, verificando se eles satisfazem as equações de Maxwell. Ache também as densidades de carga e corrente correspondentes.*

É interessante notar que o potencial escalar acima corresponde ao potencial eletrostático de uma carga estática $-Q$ situada na origem. Portanto, esperamos obter o campo elétrico de uma carga pontual, um campo magnético

nulo, pois a carga está parada, e os campos devem respeitar as equações de Maxwell. Os campos são obtidos das equações 20.2 e 20.3, e eles ficam

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$$

e (lembrando de usar o operador ∇ em coordenadas esféricas)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{E} &= -\left[\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\left[-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right] \\ \vec{E} &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\end{aligned}$$

que são os campos de uma carga pontual $-Q$ situada em repouso na origem, de modo que $\rho = -Q\delta(\vec{r})$ e $\vec{J} = 0$. As equações de Maxwell são imediatamente satisfeitas para esse caso, já que esse é o problema mais elementar da Eletrostática.

b) *Faça uma transformação de calibre aplicando a função*

$$\Lambda = -\frac{Qt}{4\pi\epsilon_0 r}$$

e obtenha as mesmas grandezas do caso anterior, verificando também a validade das equações de Maxwell.

Para transformar os potenciais, utilizamos as relações 20.8, de modo que o potencial magnético fica, por 20.8a,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$$

ou

$$\vec{A}' = 0 + \left[\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right]\left[-\frac{Qt}{4\pi\epsilon_0 r}\right]$$

e então,

$$\vec{A}' = \frac{Qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

O potencial elétrico fica, aplicando 20.8b,

$$\mathbb{V}' = \mathbb{V} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

ou

$$\mathbb{V}' = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{Qt}{4\pi\epsilon_0 r} \right]$$

ou ainda,

$$\mathbb{V}' = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

e então,

$$\mathbb{V}' = 0$$

Os campos $\vec{B}'$ e $\vec{\mathcal{E}}'$ podem ser obtidos por meio das equações 20.2 e 20.3. Note que esperamos que eles sejam idênticos ao caso anterior, por causa da invariância dos campos (não dos potenciais) frente a transformações de calibre. Verificando explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \nabla \times \vec{A}' \\ \vec{B}' &= \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \times \frac{Qt}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \\ \vec{B}' &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}' &= -\nabla \mathbb{V}' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ \vec{\mathcal{E}}' &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{Qt}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right] \\ \vec{\mathcal{E}}' &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

ou seja, os campos realmente são invariantes sob a transformação de calibre. As densidades de carga e corrente são as mesmas que no caso anterior, já que os campos são os mesmos, o que é bastante razoável porque a transformação de calibre é um modo matemático de alterar as equações de Maxwell para

facilitar sua resolução, mas ela não pode criar ou destruir distribuições de cargas ou correntes pois isso alteraria as condições físicas do problema.

20.2 Calibre de Coulomb

O calibre de Coulomb, transversal ou de radiação, consiste em considerar uma transformação de calibre de forma que o potencial vetor magnético $\vec{A}$ fique sujeito à condição

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (20.12)$$

que é, na verdade, a condição implícita na Magnetostática, já que, nesse caso, como a lei de Ampère na forma 14.20 é válida sem correções, podemos utilizar 16.1 e escrever

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$$

Utilizando agora a identidade 1.58c,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

achamos

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Supondo agora que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, e lembrando também que estamos considerando campos e potenciais independentes do tempo, temos

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (20.13)$$

Comparando esta equação com a equação de Poisson 6.1,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

cuja solução é dada por 5.2,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

vemos que a solução da equação 20.13 é do tipo

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

que é similar à expressão 16.5, deduzida na seção 16.1, válida para a Magnetostática. Com o calibre de Coulomb 20.12, a expressão 20.4 para o potencial elétrico se torna

$$\nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20.14)$$

que é uma equação idêntica à equação de Poisson 6.1, de modo que a solução é dada por

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.15)$$

Note que $\mathbb{V}$ não está relacionado ao campo elétrico por $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$. Isso só ocorre na Eletrostática. A relação entre eles é dada pela equação 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V} - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t}$$

ou seja, é preciso determinar também $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)$ para encontrar os campos.

Um fato relevante a respeito do calibre de Coulomb é que, quando estamos considerando este calibre, o potencial elétrico 20.15 num ponto $P(\vec{r})$ do espaço e num instante de tempo t é determinado pela distribuição de cargas $\rho(\vec{r}, t)$ no instante de tempo t , independentemente de quão afastadas estiverem as cargas do ponto de observação P . Isso significa que o potencial elétrico no calibre de Coulomb propaga-se de forma instantânea pelo espaço, violando (em princípio) a teoria da Relatividade. A questão é que a Relatividade diz que nenhuma *informação* pode viajar mais rápido do que a luz, mas nada impede algo que não transporte informação de se mover mais rápido que a luz. O potencial elétrico 20.15 sozinho não é uma grandeza mensurável (lembre que ele não é o potencial elétrico usual da Eletrostática), mas sim o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$ derivado a partir de 20.3, o qual depende também de $\vec{\mathcal{A}}$. O potencial vetor magnético “compensa” o potencial elétrico no calibre de Coulomb, de forma que os campos eletromagnéticos não violam a Relatividade.

O calibre de Coulomb facilita a determinação de $\mathbb{V}$, mas isso tem seu

preço. O potencial vetor magnético $\vec{A}$ fica sujeito a uma equação não muito simples, já que, por 20.5, temos

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left[\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \right] = -\mu_0 \vec{J}$$

ou, em termos do operador d'Alambertiano 20.9,

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left[\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \right] \quad (20.16)$$

Em princípio, o termo que depende de $\mathbb{V}$ no lado direito da expressão acima pode ser calculado por 20.15. Além disso, como ele envolve um gradiente, sabemos por 1.58b que seu rotacional é nulo, ou seja, esse termo é irrotacional. Isso sugere que, se separarmos a densidade de corrente $\vec{J}$ em dois termos, através de

$$\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_t \quad (20.17)$$

de modo que $\vec{J}_\ell$ seja a densidade de corrente longitudinal ou irrotacional, com a propriedade de que $\nabla \times \vec{J}_\ell = 0$, e $\vec{J}_t$ seja a densidade de corrente transversal ou solenoidal, caracterizada por ter $\nabla \cdot \vec{J}_t = 0$, a equação para $\vec{A}$ pode ser simplificada. As densidades de corrente longitudinal e transversal são obtidas da densidade total de corrente mediante

$$\vec{J}_\ell = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.18)$$

e

$$\vec{J}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.19)$$

como podemos ver se considerarmos, na relação 1.58c,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

a função

$$\vec{A} = \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Temos então,

$$\nabla \times \nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla \left[\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] - \nabla^2 \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Vamos integrar agora esta relação num volume V , ou seja,

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \times \nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV = \\ \int_V \nabla \left[\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV - \int_V \nabla^2 \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV \end{aligned}$$

O operador ∇ age apenas sobre as coordenadas $\vec{r}$, de modo que, para nossos propósitos, podemos escrever

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = \\ \nabla \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV - \int_V \nabla^2 \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV \quad (20.20) \end{aligned}$$

Como $\vec{J}(\vec{r}')$ independe de $\vec{r}$, a última integral pode ser reescrita como

$$\int_V \nabla^2 \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV = \int_V \vec{J}(\vec{r}', t) \nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

e, utilizando a equação 9.1,

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

achamos

$$\int_V \nabla^2 \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV = \int_V -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}', t) dV$$

ou

$$\int_V \nabla^2 \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV = -4\pi \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (20.21)$$

A integral

$$\nabla \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV \quad (20.22)$$

pode ser reescrita se utilizarmos 1.58e,

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\nabla \cdot \vec{A})$$

Obtemos, portanto,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \left[\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \cdot \vec{J}(\vec{r}', t) + \frac{\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

O último termo na expressão acima é nulo, pois $\vec{J}$ independe de $\vec{r}$. Além disso, por 10.2, temos

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

onde ∇' age agora sobre as coordenadas com linha. Assim, achamos

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \left[\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)$$

Aplicando novamente 1.58e, só que agora para

$$\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \left[\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \cdot \vec{J}(\vec{r}', t) + \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

podemos reescrever a penúltima expressão como

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Voltando agora à integral 20.22, ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV = \\ - \nabla \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV + \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \end{aligned}$$

A primeira integral do lado direito acima pode ser transformada numa integral de superfície mediante o uso do teorema do divergente 1.54, e ela fica

$$\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV = \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}', t) \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA$$

O volume V deve ser suficientemente grande para conter toda a distribuição de correntes $\vec{J}$. Pode ser considerado infinito, de modo que a integral de superfície acima se anula. Obtemos, então,

$$\nabla \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV = \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.23)$$

Aplicando agora as expressões 20.21 e 20.23 em 20.20, ficamos com

$$\nabla \times \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV + 4\pi \vec{J}(\vec{r}, t)$$

ou

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV - \frac{1}{4\pi} \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Como queremos separar a corrente em dois termos como indica a equação 20.17,

$$\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_t$$

sendo que devemos ter $\nabla \times \vec{J}_\ell = 0$ e $\nabla \cdot \vec{J}_t = 0$, vemos que, comparando as duas equações acima, achamos

$$\vec{J}_\ell = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

e

$$\vec{J}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

visto que o divergente de qualquer rotacional é nulo e o rotacional de qualquer gradiente também é nulo. As expressões acima são justamente as relações 20.18 e 20.19, que foram portanto demonstradas.

Voltando agora ao problema inicial, para simplificar 20.16, derivamos a equação 20.15 com relação ao tempo, ou seja,

$$\frac{\partial \mathbb{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right]$$

ou

$$\frac{\partial \mathbb{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Mediante o uso da equação da continuidade 12.21,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

podemos escrever

$$\frac{\partial \mathbb{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

onde ∇' é o operador nabla escrito nas coordenadas de $\vec{J}(\vec{r}')$, ou seja, em termos de $\vec{r}'$. Temos então

$$\frac{\partial \mathbb{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Aplicando o operador ∇ nesta expressão, ficamos com

$$\nabla \left[\frac{\partial \mathbb{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

e usando a equação 20.18, obtemos

$$\nabla \left[\frac{\partial \mathbb{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}_\ell$$

de modo que a equação 20.16 pode ser escrita como

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}_\ell$$

ou

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_\ell$$

Considerando agora a expressão 20.17, simplificamos a equação para

$$\square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_t \quad (20.24)$$

ou, explicitando o operador $\square^2$,

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_t \quad (20.25)$$

de modo que o potencial vetor magnético depende apenas da densidade de corrente transversal, o que explica o nome de calibre transversal dado a esse calibre. A denominação calibre de radiação está associada com a emissão de radiação por cargas, como será visto no capítulo 24. O calibre de Coulomb é útil também em Eletrodinâmica Quântica, sendo necessário quantizar apenas o potencial vetor magnético para estabelecer uma descrição quântica dos fótons.

Exemplo 20.4. *Mostre que é sempre possível fazer $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, ou seja, o calibre de Coulomb pode ser satisfeito por qualquer potencial vetor magnético $\vec{A}$ por meio de uma transformação de calibre apropriada.*

Vamos inicialmente supor um potencial vetor magnético $\vec{A}$ para o qual ocorra

$$\nabla \cdot \vec{A} \neq 0$$

ou seja, ele tem uma divergência não-nula, não satisfazendo o calibre de Coulomb. Entretanto, podemos utilizar a transformação de calibre dada em 20.8a,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

que, como já vimos, mantém inalterados os campos, para tornar o potencial vetor magnético adequado ao calibre de Coulomb. Tomando a divergência da equação acima, temos

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \nabla \Lambda$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda$$

Para satisfazer o calibre de Coulomb, devemos ter

$$\nabla \cdot \vec{A}' = 0$$

o que implica em

$$\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda = 0$$

ou

$$\nabla^2 \Lambda = -\nabla \cdot \vec{A} \quad (20.26)$$

Esta equação é semelhante à equação de Poisson 6.1,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

a qual tem como solução a expressão 5.2,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

de forma que a equação 20.26 tem como solução

$$\Lambda(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Portanto, se Λ for dado pela expressão acima, o potencial vetor magnético $\vec{A}$ é transformado em $\vec{A}'$ através de 20.8a e agora segue a condição do calibre de Coulomb, isto é, $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$. Assim, é sempre possível transformar

um potencial vetor magnético com uma divergência não-nula num potencial equivalente sem divergência.

20.3 Calibre de Lorentz

No calibre de Lorentz, escolhe-se a divergência do potencial vetor magnético de modo a desacoplar as equações 20.4,

$$\nabla^2 \mathbb{V} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e 20.5,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} - \nabla \left[\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \right] = -\mu_0 \vec{J}$$

que podem ser escritas na forma simétrica 20.11 vista no exemplo 20.2,

$$\begin{aligned} \square^2 \mathbb{V} + \frac{\partial \Xi}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square^2 \vec{\mathcal{A}} - \nabla \Xi &= -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

onde, pela expressão 20.9,

$$\square^2 = \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

e, por 20.10,

$$\Xi = \nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t}$$

Observando as equações, notamos que a escolha apropriada consiste em fazer

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = 0 \quad (20.27)$$

o que corresponde, por 20.10, a considerar $\Xi = 0$ na forma 20.11, que fica, portanto,

$$\square^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20.28a)$$

$$\square^2 \vec{\mathcal{A}} = -\mu_0 \vec{J} \quad (20.28b)$$

onde se percebe que as equações estão desacopladas e que $\mathbb{V}$ e $\vec{\mathcal{A}}$ são tratados em pé de igualdade, pois estão sujeitos essencialmente à mesma equação. Esse fato é particularmente importante na Relatividade, o que faz com que o calibre de Lorentz seja adequado quando se faz uma formulação relativística do Eletromagnetismo. As equações acima lembram a equação de Poisson 6.1 para três dimensões e podem ser entendidas como sendo sua extensão para o espaço em quatro dimensões usual da Relatividade. O operador d'Alambertiano $\square^2$ é, então, a extensão do operador ∇^2 para o espaço tetradimensional. As equações 20.28 podem ser escritas explicitamente por

$$\nabla^2 \mathbb{V} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20.29a)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad (20.29b)$$

Estas expressões são equações diferenciais semelhantes à equação de onda não-homogênea (veja a seção 22.1), e os termos de “fonte” são relacionados a ρ e $\vec{J}$. Resolver estas equações é extremamente importante, pois elas fornecem $\mathbb{V}$ e $\vec{\mathcal{A}}$, que, por sua vez, determinam os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$. Vamos estudar algumas situações importantes, mas antes devemos verificar uma questão relevante.

Exemplo 20.5. *Mostre que é sempre possível fazer com que um potencial vetor magnético $\vec{\mathcal{A}}$ qualquer satisfaça a condição de Lorentz 20.27,*

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = 0$$

Vamos supor inicialmente que $\vec{\mathcal{A}}$ não satisfaça o calibre de Lorentz, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} \neq -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t}$$

Podemos realizar uma transformação de calibre mediante as equações 20.8,

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \nabla \Lambda \\ \mathbb{V}' &= \mathbb{V} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\end{aligned}$$

para transformar $\vec{A}$ em $\vec{A}'$, cuja divergência é

$$\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda$$

O novo potencial vetor magnético deve satisfazer a condição de Lorentz, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}'}{\partial t} = 0$$

Portanto, transformando também o potencial escalar $\mathbb{V}$, temos

$$\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbb{V} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \Lambda - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t}$$

Utilizando o operador d'Alambertiano, ficamos com

$$\square^2 \Lambda = -\nabla \cdot \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t}$$

que é uma equação do tipo 20.28. Supondo que ela possa ser resolvida, a função Λ seria conhecida e os novos potenciais $\vec{A}'$ e $\mathbb{V}'$ seriam determinados, e eles satisfariam a condição de Lorentz, como queríamos inicialmente.

Exemplo 20.6. *Ache a condição necessária para que uma transformação de calibre dada por 20.8 feita nos potenciais $\vec{A}$ e $\mathbb{V}$, os quais satisfazem a condição de Lorentz 20.27, resulte em potenciais $\vec{A}'$ e $\mathbb{V}'$, que também satisfazem a condição de Lorentz.*

Os potenciais $\vec{\mathcal{A}}$ e $\mathbb{V}$ satisfazem a condição de Lorentz 20.27,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = 0$$

Vamos submetê-los a uma transformação de calibre 20.8,

$$\vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + \nabla \Lambda$$

$$\mathbb{V}' = \mathbb{V} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

que faz com que os campos permaneçam invariantes. Queremos que, em termos dos novos potenciais, a condição de Lorentz seja satisfeita, ou seja, devemos ter

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}'}{\partial t} = 0$$

ou

$$\nabla \cdot (\vec{\mathcal{A}} + \nabla \Lambda) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbb{V} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = 0$$

ou então,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \nabla \cdot \nabla \Lambda + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

Como $\vec{\mathcal{A}}$ e $\mathbb{V}$ satisfazem a condição de Lorentz, a equação acima se simplifica para

$$\nabla^2 \Lambda - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$\square^2 \Lambda = 0$$

que é a condição para que os potenciais $\vec{A}$ e $\mathbb{V}$ continuem satisfazendo a condição de Lorentz quando eles são sujeitos a uma transformação de calibre.

20.4 Soluções da Equação de Onda e Potenciais Retardados

Nosso objetivo agora é resolver as equações de onda 20.29 ²,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbb{V} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

para obter os potenciais $\mathbb{V}(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}(\vec{r}, t)$ associados às distribuições de carga e corrente $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{J}(\vec{r}, t)$, respectivamente, e, a partir deles, determinar as grandezas físicas relevantes, que são os campos $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ e $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$. No caso estático, as equações 20.29 tornam-se simplesmente

$$\nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20.30a)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (20.30b)$$

que são quatro equações de Poisson (uma para o potencial escalar $\mathbb{V}$ e três para o potencial vetor magnético $\vec{A}$) cujas soluções são

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.31a)$$

e

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.31b)$$

Note que, no caso estático, as fontes dos campos e potenciais, ou seja, as densidades de carga ρ e corrente $\vec{J}$, são fixas no tempo. Por outro lado, no caso geral, elas não são constantes no tempo, de modo que variações temporais nas fontes vão produzir alterações nos potenciais por elas gerados. Como as

² Lembrando que elas implicam no calibre de Lorentz.

fontes estão localizadas nas posições $\vec{r}'$ e o ponto de observação dos potenciais situa-se na posição $\vec{r}$, a “informação” de que houve uma alteração nas fontes deve percorrer a distância $|\vec{r} - \vec{r}'|$ com uma velocidade finita, a qual, no caso dos potenciais eletromagnéticos, corresponde à velocidade da luz c . Isso indica que há uma diferença de tempo entre o instante em que as fontes emitem uma “informação” eletromagnética da posição $\vec{r}'$ e o instante em que ela é recebida na posição $\vec{r}$, cujo valor é dado por

$$t' = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (20.32)$$

Assim, os potenciais observados no ponto $\vec{r}$ no instante de tempo t não dependem instantaneamente da configuração de cargas e correntes no tempo t , mas sim de como elas estavam num instante de tempo t_r anterior, quando a “informação” eletromagnética foi emitida. Esse tempo t_r , chamado de *tempo retardado*, é dado por meio de

$$t_r = t - t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (20.33)$$

É importante ressaltar que o tempo retardado acima não tem sentido no calibre de Coulomb, pois nele o potencial escalar $\mathbb{V}$ viola a Relatividade, já que tem velocidade infinita de propagação. Com o uso do tempo retardado acima, as soluções das equações 20.29 tornam-se, mediante uma extensão natural de 20.31,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.34a)$$

e

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.34b)$$

Observe que ρ e $\vec{J}$ são determinados no instante de tempo retardado t_r . Por causa disso, os potenciais acima são chamados de *potenciais retardados*. Além disso, as expressões acima são relativamente simples, talvez até surpreendentemente simples. Nesse ponto surge uma questão óbvia: estarão elas corretas? Elas foram apresentadas mediante a utilização de uma argumentação lógica, mas não as deduzimos nem resolvemos explicitamente as equações diferenciais 20.29, o que pode levantar dúvidas a respeito de sua consistência. De fato, já que os potenciais são corrigidos apenas levando-se em conta o tempo

retardado, poderíamos pensar, em analogia com o exposto para os potenciais, que os campos sejam dados por

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

que são as extensões naturais de 4.5 e 14.14. Porém, apesar de os potenciais 20.34 estarem corretos, como veremos em seguida, os campos acima estão totalmente errados, o que indica que é preciso ter cuidado ao fazer analogias e que nem sempre as argumentações “lógicas” são verdadeiras.

Para verificar a veracidade das soluções 20.34 para as equações de onda 20.29,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbb{V} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

vamos proceder de dois modos. Primeiro, vamos estabelecer um modo de resolução dessas equações utilizando funções de Green. Depois, vamos verificar explicitamente que as soluções resolvem as equações diferenciais.

20.5 Funções de Green para as Equações de Onda

As equações de onda 20.29 no calibre de Lorentz,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbb{V} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

e a equação 20.25 para o potencial vetor magnético no calibre de Coulomb,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_t$$

partilham todas da mesma estrutura matemática, e elas podem ser escritas como

$$\nabla^2 \Upsilon - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -4\pi v(\vec{r}, t) \quad (20.35)$$

onde $\Upsilon(\vec{r}, t)$ representa os potenciais, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ é a velocidade da luz no vácuo e $v(\vec{r}, t)$ indica as fontes dos potenciais (cargas ou correntes). A equação acima é uma equação de onda não-homogênea, e podemos utilizar a técnica de transformadas de Fourier para resolvê-la. Vamos supor que Υ e v possam ser escritas como

$$\Upsilon(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (20.36)$$

e

$$v(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (20.37)$$

com transformadas inversas

$$\Upsilon(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (20.38)$$

e

$$v(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (20.39)$$

Aplicando as expressões 20.36 e 20.37 na equação diferencial 20.35, ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] = \\ - 4\pi \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(\vec{r}, \omega) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [e^{-i\omega t}] d\omega = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -4\pi v(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(\vec{r}, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\omega t} d\omega = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -4\pi v(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Definindo o número de onda k por meio de

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (20.40)$$

e reunindo as integrais em uma só, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) + k^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) + 4\pi v(\vec{r}, \omega)] e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

Para que a integral seja sempre nula é preciso que ocorra

$$\nabla^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) + k^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) = -4\pi v(\vec{r}, \omega) \quad (20.41)$$

que é uma equação diferencial conhecida como *equação de Helmholtz não-homogênea*. A função $\Upsilon(\vec{r}, \omega)$ deve satisfazer essa equação, que se reduz à equação de Poisson quando $k = 0$.

Uma idéia para resolver a equação 20.41 consiste em considerarmos funções de Green apropriadas para esse caso. Seguindo os passos da seção 9.2, vemos que as funções de Green adequadas devem estar sujeitas à equação (compare com a equação 9.4)

$$\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (20.42)$$

Quando não há superfícies limitantes que formam fronteiras entre duas regiões distintas, a função de Green acima deve ter uma simetria esférica (veja a seção 9.4), de modo que ela deve depender apenas de $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Nesse caso, a equação diferencial 20.42 pode ser simplificada se considerarmos o operador ∇^2 em coordenadas esféricas, dado pela equação B.20,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

A equação diferencial torna-se, então,

$$\left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2}(R) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \mathfrak{F}_k(R) + k^2 \mathfrak{F}_k(R) = -4\pi \delta(\vec{R})$$

ou

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2}(R \mathfrak{F}_k) + k^2 \mathfrak{F}_k = -4\pi \delta(\vec{R})$$

ou ainda,

$$\frac{d^2}{dR^2}(R \mathfrak{F}_k) + k^2(R \mathfrak{F}_k) = -4\pi \delta(\vec{R})$$

A função delta só contribui quando $R = 0$, isto é, quando $\vec{r} = \vec{r}'$. Quando $\vec{r} \neq \vec{r}'$, a equação acima torna-se

$$\frac{d^2}{dR^2}(R \mathfrak{F}_k) + k^2(R \mathfrak{F}_k) = 0$$

que é uma equação homogênea, a qual pode ser simplificada se definirmos

$$\mathfrak{F}_k(R) = \frac{f_k(R)}{R}$$

Assim, a equação fica

$$\frac{d^2}{dR^2} \left(R \frac{f_k(R)}{R} \right) + k^2 \left(R \frac{f_k(R)}{R} \right) = 0$$

ou

$$\frac{d^2 f_k(R)}{dR^2} + k^2 f_k(R) = 0$$

que é resolvida mediante a suposição de que

$$f_k(R) = Ae^{mR}$$

e que, portanto,

$$\frac{d^2 f_k}{dR^2} = Am^2 e^{mR}$$

Substituindo estes dois valores na equação diferencial, achamos

$$Am^2 e^{mR} + k^2 Ae^{mR} = 0$$

ou

$$Ae^{mR}(m^2 + k^2) = 0$$

Para que a equação acima seja sempre verificada, é preciso que ocorra

$$m^2 + k^2 = 0$$

ou

$$m = \pm ik$$

Portanto, as soluções da equação diferencial são dadas pelas funções

$$f_k^+(R) = e^{ikR} \qquad f_k^-(R) = e^{-ikR}$$

e assim, as funções de Green ficam

$$\mathfrak{F}_k^+(R) = \frac{f_k^+(R)}{R} = \frac{e^{ikR}}{R} \tag{20.43}$$

e

$$\mathfrak{F}_k^-(R) = \frac{f_k^-(R)}{R} = \frac{e^{-ikR}}{R} \tag{20.44}$$

resultando na função de Green geral

$$\mathfrak{F}_k(R) = \frac{Ae^{ikR}}{R} + \frac{Be^{-ikR}}{R} \quad (20.45)$$

em que os coeficientes A e B dependem das condições auxiliares para o problema. Os dois termos do lado direito na equação acima representam ondas esféricas. O primeiro indica uma onda partindo da origem, em $\vec{r} = \vec{r}'$, ao passo que o segundo está associado a uma onda esférica dirigindo-se para a origem. Quando uma fonte de potencial (carga ou corrente) é ligada num instante $t = 0$, a onda emitida por ela deve divergir a partir do ponto em que está a fonte, de modo que a função de Green $\mathfrak{F}_k^+$ tem uma interpretação física bastante simples. A outra função de Green, $\mathfrak{F}_k^-$, associada com uma onda convergindo para a origem, não tem uma interpretação tão direta, mas dependendo das condições de contorno no tempo ³, ela pode também ser utilizada.

O comportamento das duas funções de Green acima é mais claramente entendido quando consideramos a função de Green dependente do tempo, que deve estar sujeita, por analogia com 20.35, à equação

$$\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, t; \vec{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, t; \vec{r}', t')}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \quad (20.46)$$

Podemos definir as transformadas de Fourier

$$\mathfrak{F}_k(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') e^{-i\omega t} d\omega \quad (20.47)$$

e

$$\mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_k(\vec{r}, t; \vec{r}', t') e^{i\omega t} dt \quad (20.48)$$

Além disso, o termo de fonte em 20.35 pode ser identificado com as funções delta em 20.46, ou seja,

$$v(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \quad (20.49)$$

³ Não no espaço, pois, por hipótese, não há fronteiras delimitando duas regiões espacialmente diferentes.

de modo que, por 20.39, temos

$$v(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') e^{i\omega t} dt$$

ou

$$v(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{i\omega t'}$$

Assim, pela equação 20.37, obtemos

$$v(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} d\omega$$

ou, pela expressão 20.49,

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad (20.50)$$

ou então,

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') = \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

e assim,

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad (20.51)$$

que é uma equação importante, indicando que a função delta de Dirac pode ser escrita em termos de uma integral semelhante a uma transformada de Fourier. Retornando ao problema de obter a função de Green dependente do tempo que esteja sujeita à equação 20.46, vamos substituir as expressões 20.47 e 20.50 na equação diferencial, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') e^{-i\omega t} d\omega \right] \\ - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') e^{-i\omega t} d\omega \right] = \\ - 4\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{-i\omega(t-t')} d\omega \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') e^{-i\omega t} d\omega \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [e^{-i\omega t}] d\omega = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{-i\omega(t-t')} d\omega \end{aligned}$$

Utilizando a definição 20.40 e reunindo as integrais numa única, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') + k^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') \right. \\ & \left. + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{i\omega t'} \right] e^{-i\omega t} d\omega = 0 \end{aligned}$$

de modo que obtemos a equação diferencial

$$\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') + k^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') = -4\pi \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{i\omega t'} \right] \quad (20.52)$$

que pode ser comparada com a equação diferencial 20.42 para a função de Green independente do tempo,

$$\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Assim, supondo que a função de Green $\mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega')$ possa ser escrita na forma de um produto entre uma função de Green independente do tempo (e da frequência) e uma função que tenha apenas dependência da frequência, isto é,

$$\mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') = \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') \Omega(\omega, \omega') \quad (20.53)$$

e substituindo 20.53 em 20.52, ficamos com

$$\nabla^2 [\mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') \Omega(\omega, \omega')] + k^2 [\mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') \Omega(\omega, \omega')] = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}}$$

ou

$$\Omega(\omega, \omega') [\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}')] = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}}$$

de onde extraímos

$$\Omega(\omega, \omega') = \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \quad (20.54)$$

e

$$\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

sendo que esta última é a equação 20.42, cujas soluções já determinamos, dadas por 20.45,

$$\mathfrak{F}_k(R) = \frac{Ae^{ikR}}{R} + \frac{Be^{-ikR}}{R}$$

Voltando agora à equação 20.53 e aplicando 20.54, temos a função de Green dependente do tempo (ou da frequência), ou seja,

$$\mathfrak{F}_k(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') = \left[\frac{Ae^{ikR}}{R} + \frac{Be^{-ikR}}{R} \right] \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \quad (20.55)$$

que é formada pela funções

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') = \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \quad (20.56)$$

e

$$\mathfrak{F}_k^-(\vec{r}, \omega; \vec{r}', \omega') = \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} \quad (20.57)$$

combinadas com coeficientes A e B apropriados. Retornando agora à transformada de Fourier 20.47, obtemos

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} d\omega$$

ou

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikR} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

Note que devemos ter cuidado na expressão acima, pois, pela relação 20.40,

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Temos, portanto,

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \frac{R}{c}} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

ou

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t'-\frac{R}{c})} d\omega$$

ou ainda, numa forma para nós mais interessante,

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega[-t'+(t-\frac{R}{c})]} d\omega$$

e, finalmente,

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[t'-(t-\frac{R}{c})]} d\omega$$

Definimos agora uma mudança de variável dada por

$$\begin{array}{ll} \Omega = -\omega & d\Omega = -d\omega \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \Omega \rightarrow -\infty & \omega \rightarrow -\infty \Rightarrow \Omega \rightarrow \infty \end{array}$$

de modo que

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{\infty}^{-\infty} e^{i(-\Omega)[t'-(t-\frac{R}{c})]} (-d\Omega)$$

ou, trocando os limites de integração, o que troca o sinal da integral,

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega[t'-(t-\frac{R}{c})]} d\Omega \quad (20.58)$$

Pela relação 20.51, temos

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

Alternando t com t' , obtemos

$$\delta(t' - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t'-t)} d\omega \quad (20.59)$$

Comparando agora com 20.58, vemos que

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{R} \delta\left[t' - \left(t - \frac{R}{c}\right)\right] \quad (20.60)$$

Além disso, fazendo a mesma mudança de variáveis definida acima em 20.51, achamos

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i(-\Omega)(t-t')} (-d\Omega)$$

ou

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega(t'-t)} d\Omega$$

e então, por 20.59, ficamos com

$$\delta(t - t') = \delta(t' - t) \quad (20.61)$$

A outra função de Green, equação 20.57, tem a transformada

$$\mathfrak{F}_k^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} d\omega$$

ou

$$\mathfrak{F}_k^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{R}{c}} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$$

e então,

$$\mathfrak{F}_k^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t'+\frac{R}{c})} d\omega$$

ou

$$\mathfrak{F}_k^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \left[-t' + \left(t + \frac{R}{c} \right) \right]} d\omega$$

ou ainda,

$$\mathfrak{F}_k^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \left[t' - \left(t + \frac{R}{c} \right) \right]} d\omega$$

Aplicando agora a mudança de variáveis que troca ω por $-\Omega$ e realizando as devidas simplificações, obtemos, como resultado final,

$$\mathfrak{F}_k^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{R} \delta \left[t' - \left(t + \frac{R}{c} \right) \right] \quad (20.62)$$

Lembrando que $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, vemos que as funções de Green 20.60 e 20.62 podem ser escritas como

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta \left[t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \right] \quad (20.63)$$

e

$$\mathfrak{F}_k^-(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta \left[t' - \left(t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \right] \quad (20.64)$$

Assim, em termos das funções de Green, as soluções da equação diferencial 20.35,

$$\nabla^2 \Upsilon - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -4\pi v(\vec{r}, t)$$

são dadas mediante

$$\Upsilon^\pm(\vec{r}, t) = \int \int_V \mathfrak{F}_k^\pm(\vec{r}, t; \vec{r}', t') v(\vec{r}', t') dV dt'$$

ou ainda, utilizando-se explicitamente as funções de Green 20.63 e 20.64,

$$\Upsilon^\pm(\vec{r}, t) = \int \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta \left[t' - \left(t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \right] v(\vec{r}', t') dV dt'$$

ou, trocando-se a ordem em que as integrais são feitas,

$$\Upsilon^{\pm}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{v(\vec{r}', t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Lembrando a definição 20.33 para o tempo retardado,

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

e definindo um *tempo avançado* t_a por meio de

$$t_a = t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (20.65)$$

vemos que as soluções acima podem ser escritas como

$$\Upsilon^+(\vec{r}, t) = \int_V \frac{v(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.66)$$

e

$$\Upsilon^-(\vec{r}, t) = \int_V \frac{v(\vec{r}', t_a)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.67)$$

A introdução dos tempos retardado e avançado e a análise das funções de Green dependentes do tempo 20.63 e 20.64 facilitam a interpretação das soluções acima. A solução referente ao tempo retardado indica uma “informação” propagando-se a partir de $\vec{r}'$ que foi emitida no tempo t' e que, por causa da velocidade finita da luz, leva um certo tempo até atingir um ponto de observação $\vec{r}$ no espaço, sendo percebida num instante de tempo t *posterior* a t' . A outra solução, referente ao tempo avançado, é uma solução matemática que eventualmente pode ser utilizada como artifício de cálculo em algum problema específico, mas que apresenta dificuldades quanto a uma interpretação física porque representa uma informação emitida num tempo t' a partir de um ponto $\vec{r}'$ e que é recebida num ponto $\vec{r}$ e num instante t *anterior* a t' , violando, portanto, a questão de causalidade dos fenômenos físicos. Os efeitos precederiam as causas, e isso não parece ser fisicamente muito lógico. Assim, a situação mais comum em problemas físicos envolve apenas a solução 20.66 para $\Upsilon^+(\vec{r}, t)$.

Essa questão talvez não seja tão clara quanto parece. No mundo microscópico e submicroscópico não é raro interpretar quanticamente algumas partículas elementares como sendo produzidas por meio de reações envolvendo aniquilações ou criações de outros tipos de partículas, algumas delas movendo-se para trás no tempo. Isso ocorre basicamente porque o conceito de entropia, que, através da segunda lei da termodinâmica, estabelece um sentido natural para o fluxo do tempo, é macroscópico e perde o sentido quando aplicado a sistemas microscópicos. Assim, microscopicamente, para um dado processo físico os dois sentidos de tempo são igualmente prováveis, mas estaticamente mais processos ocorrem no sentido “correto” do tempo do que no outro sentido, fazendo com que macroscopicamente os processos naturais sejam da forma como nós os percebemos e estamos acostumados. Essas questões físicas e até mesmo filosóficas não são de forma alguma simples ou óbvias, e elas requerem muito estudo e reflexão para serem compreendidas ou mesmo aceitas, já que vivemos e interagimos com um mundo macroscópico em que tais fenômenos não ocorrem. Eventualmente, com novos avanços científicos tanto experimentais quanto teóricos, assimilaremos com mais facilidade as idéias acima.

Tendo resolvido a equação genérica 20.35,

$$\nabla^2 \Upsilon - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -4\pi v(\vec{r}, t)$$

podemos agora retornar às equações de onda 20.29 no calibre de Lorentz,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbb{V} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

e à equação 20.25 para o potencial vetor magnético no calibre de Coulomb,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_t$$

que terão, como solução, as expressões

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

e

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

que são exatamente as expressões 20.34, além de

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (20.68)$$

válido para o calibre de Coulomb. Portanto, demonstramos que as equações 20.34, que foram obtidas através de uma argumentação qualitativa, estão corretas. Além disso, obtivemos o potencial vetor magnético no calibre de Coulomb, em que aparece o tempo retardado, de forma que ele não viola a Relatividade, como faz o potencial escalar $\mathbb{V}$. O aparecimento do tempo retardado nas soluções para o calibre de Lorentz já era esperado, mas a existência de um tempo retardado no calibre de Coulomb é um fato inusitado. Note que a fonte do potencial vetor magnético no calibre de Coulomb é a densidade de corrente transversal $\vec{J}_t$ e não a densidade de corrente total $\vec{J}$. Por isso, os potenciais vetores magnéticos nos calibres de Lorentz e Coulomb serão, em geral, diferentes.

Conforme dissemos no final da seção anterior, tínhamos dois objetivos. Primeiro, queríamos deduzir as soluções das equações de onda 20.29 e verificar que elas correspondem às expressões 20.34. Segundo, pretendíamos verificar explicitamente que as soluções mencionadas acima resolvem as equações diferenciais. A primeira parte já foi feita, e agora iniciamos a segunda. Começamos com a equação diferencial para $\mathbb{V}$, dada por 20.29a,

$$\nabla^2 \mathbb{V} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Precisamos tomar cuidado, pois $\mathbb{V}$, dado por 20.34a,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

depende de $\vec{r}$ tanto de forma explícita, no termo $|\vec{r} - \vec{r}'|$, como implicitamente, no tempo retardado $t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, e isso precisa ser levado em conta na hora de calcular seu Laplaciano. Vamos iniciar considerando o gradiente de $\mathbb{V}$, ou seja,

$$\nabla \mathbb{V} = \nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right]$$

ou

$$\nabla \Psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla \left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

Pela identidade 1.58d, temos

$$\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$$

de modo que

$$\nabla \left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \rho(\vec{r}', t_r) + \rho(\vec{r}', t_r) \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad (20.69)$$

Pela expressão 5.9,

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Além disso, para calcular $\nabla \rho(\vec{r}', t_r)$, precisamos de uma regra da cadeia. Em coordenadas retangulares, temos

$$\nabla \rho(\vec{r}', t_r) = \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \rho(\vec{r}', t_r)$$

ou

$$\nabla \rho(\vec{r}', t_r) = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \quad (20.70)$$

Como

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

e $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ são independentes de t , temos

$$\frac{\partial}{\partial t_r} = \frac{\partial t}{\partial t_r} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}$$

de modo que podemos escrever

$$\nabla \rho(\vec{r}', t_r) = \frac{\partial \rho(\vec{r}', t_r)}{\partial t} \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] t_r \quad (20.71)$$

ou

$$\nabla \rho(\vec{r}', t_r) = \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) \nabla t_r \quad (20.72)$$

onde $\dot{\rho}$ representa a derivada temporal de ρ . Comparando as expressões 20.70 e 20.71, chegamos a uma propriedade importante, isto é,

$$\left[\frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{t_r} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\vec{r}', t')]_{t_r}$$

onde o termo entre colchetes é calculado e depois aplicado no tempo retardado t_r . Essa relação vale em geral, de modo que, para qualquer função $f(\vec{r}', t')$, temos

$$\left[\frac{\partial f(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{t_r} = \frac{\partial}{\partial t} [f(\vec{r}', t')]_{t_r} \quad (20.73)$$

Como

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

achamos

$$\nabla t_r = \nabla \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right]$$

ou

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c} \nabla (|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (20.74)$$

Precisamos agora de

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r}' &= x' \hat{\mathbf{i}} + y' \hat{\mathbf{j}} + z' \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r} - \vec{r}' &= (x - x') \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\nabla (|\vec{r} - \vec{r}'|) = \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) = & \hat{\mathbf{i}} \frac{1}{2} \frac{2(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ & + \hat{\mathbf{j}} \frac{1}{2} \frac{2(y - y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ & + \hat{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \frac{2(z - z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}\end{aligned}$$

ou então,

$$\nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{(x - x') \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

ou ainda,

$$\nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.75)$$

Com o uso da expressão acima, achamos

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.76)$$

e

$$\nabla \rho(\vec{r}', t_r) = -\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.77)$$

Portanto, a expressão 20.69 fica

$$\nabla \left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

e desse modo,

$$\nabla \mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV \quad (20.78)$$

Vamos tomar agora a divergência da expressão acima, para obter o Laplaciano, ou seja,

$$\nabla \cdot \nabla \mathbb{V} = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV \right\}$$

ou

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla \cdot \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV$$

Pela identidade 1.58e, temos

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\nabla \cdot \vec{A})$$

de forma que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ -\frac{1}{c} \nabla \dot{\rho} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\rho}}{c} \nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] \right. \\ \left. - \nabla \rho \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \rho \nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \right\} dV \quad (20.79) \end{aligned}$$

Para o primeiro e terceiro fatores dentro da integral, precisamos de 20.72,

$$\nabla \rho(\vec{r}', t_r) = \dot{\rho}(\vec{r}', t_r) \nabla t_r$$

e de 20.76,

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

de forma que

$$\nabla \dot{\rho} = \ddot{\rho} \nabla t_r = -\frac{\ddot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.80)$$

e

$$\nabla \rho = -\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

O último termo faz uso de 4.18,

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (20.81)$$

e resta o segundo, em que precisamos calcular

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \nabla \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right]$$

De acordo com o exemplo 1.3, temos

$$\nabla \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = 3$$

Além disso,

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] = \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[\frac{1}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \right]$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] &= - \frac{2(x - x') \hat{\mathbf{i}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^2} \\ &\quad - \frac{2(y - y') \hat{\mathbf{j}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^2} \\ &\quad - \frac{2(z - z') \hat{\mathbf{k}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^2} \end{aligned}$$

ou então,

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] = -2 \frac{(x - x') \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^2}$$

ou ainda,

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] = -2 \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4}$$

Portanto, achamos

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] = \frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \left[-2 \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4} \right]$$

ou

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] = \frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{2|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4}$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (20.82)$$

Assim, reunindo 20.77, 20.80, 20.81 e 20.82 em 20.79, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ -\frac{1}{c} \left[-\frac{\ddot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right. \\ \left. - \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \rho 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \right\} dV \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \frac{\ddot{\rho}}{c^2} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{1}{c} \frac{\dot{\rho}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right. \\ \left. + \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4} - 4\pi\rho(\vec{r}', t_r)\delta(\vec{r} - \vec{r}') \right\} dV \end{aligned}$$

ou ainda, fazendo as devidas simplificações,

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - 4\pi\rho(\vec{r}', t_r)\delta(\vec{r} - \vec{r}') \right\} dV$$

Podemos escrever a expressão acima como

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV - \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', t_r)\delta(\vec{r} - \vec{r}') dV$$

ou

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right] - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

Note que a função delta faz com que $\vec{r}' = \vec{r}$, de modo que $|\vec{r} - \vec{r}'| = 0$ e $t_r = t$. Aplicando agora a expressão 20.34a,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

temos

$$\nabla^2 \mathbb{V} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

ou

$$\nabla^2 \mathbb{V} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

que é justamente a equação diferencial 20.29a, comprovando que o potencial escalar dado pela expressão 20.34a é solução da equação diferencial. Vamos iniciar agora a demonstração referente ao potencial vetor magnético $\vec{\mathcal{A}}$ dado por 20.34b,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

que deve ser solução da equação diferencial 20.29b,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Aqui não podemos utilizar o mesmo raciocínio feito no caso anterior, pois teríamos que calcular o gradiente de um vetor, e esta é uma operação que não está definida. Poderíamos tentar partir para uma transformação, como a que é sugerida pela identidade 1.58c,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

que também seria muito trabalhosa e talvez infrutífera. É mais interessante fazer uso do seguinte argumento, que também é válido para o potencial escalar $\mathbb{V}$. Vamos considerar que o volume V no qual é feita a integração em 20.34b pode ser dividido em duas regiões, V_1 e V_2 , de modo que

$$V = V_1 + V_2$$

sendo que V_1 é uma pequena região em torno do ponto definido pelo vetor $\vec{r}$, que define o ponto em que o potencial vetor magnético $\vec{\mathcal{A}}$ será avaliado (o ponto de observação). O potencial $\vec{\mathcal{A}}$ pode então ser escrito como

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}_1 + \vec{\mathcal{A}}_2$$

e para cada um desses potenciais vale a relação

$$\vec{\mathcal{A}}_i(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV_i$$

ou, como

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

e

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{R}{c}$$

podemos escrever

$$\vec{\mathcal{A}}_i(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV_i$$

Podemos fazer o volume V_1 ser tão pequeno quanto se queira. Quando fazemos isso (formalmente teremos $V_1 \rightarrow 0$), os efeitos de retardo gerados pela região dentro de V_1 tornam-se desprezíveis, de modo que podemos considerar que, dentro de V_1 , a densidade de corrente fica

$$\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \rightarrow \vec{J}(\vec{r}', t)$$

Portanto, o potencial vetor magnético gerado pela região V_1 pode ser escrito como

$$\vec{\mathcal{A}}_1(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t)}{R} dV_1$$

Comparando essa expressão com a equação 20.31b,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

vemos que o potencial gerado pela região V_1 é idêntico ao do caso estático. Para o caso estático, temos a equação de Poisson 20.30b,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

de modo que, para o potencial $\vec{\mathcal{A}}_1$, teremos a equação de Poisson

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}}_1 = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (20.83)$$

Esta é a primeira equação de que precisamos. A segunda vem do potencial vetor magnético $\vec{\mathcal{A}}_2$, que é dado por

$$\vec{\mathcal{A}}_2(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV_2$$

Precisamos calcular $\nabla^2 \vec{\mathcal{A}}_2$. Podemos utilizar o operador Laplaciano em coordenadas esféricas, considerando também que há uma simetria esférica em torno do ponto $\vec{r}$, já que o tempo retardado depende de $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, ou seja, do módulo da diferença entre os dois vetores. Assim, na verdade precisamos apenas da parte radial do Laplaciano, o qual é dado pela expressão B.20,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

isto é,

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r)$$

Como $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ são independentes,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial R}$$

de modo que precisamos calcular

$$\nabla_R^2 \vec{\mathcal{A}}_2(\vec{r}, t) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left[R \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV_2 \right]$$

ou

$$\nabla_R^2 \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left[\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \right] dV_2$$

Vamos iniciar calculando

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \right] = \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{\partial t} \frac{\partial}{\partial R} \left[t - \frac{R}{c} \right]$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \right] = -\frac{1}{c} \dot{\vec{J}}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})$$

Agora, tomamos a próxima derivada com relação a R , ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left[-\frac{1}{c} \dot{\vec{J}}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \right]$$

ou

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} \left[\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\vec{J}}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{\partial t} \frac{\partial}{\partial R} \left[t - \frac{R}{c} \right]$$

ou então,

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} \left[\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \right] = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{J}}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} \left[\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{\partial t^2}$$

Voltando ao potencial $\vec{\mathcal{A}}_2$, temos

$$\nabla_R^2 \vec{\mathcal{A}}_2(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{1}{R} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{\partial t^2} dV_2$$

ou

$$\nabla_R^2 \vec{\mathcal{A}}_2(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV_2 \right]$$

Note que, quando $V_1 \rightarrow 0$, $V_2 \rightarrow V$, o que faz com que nesse limite a integral acima tenda ao potencial $\vec{\mathcal{A}}$ dado por 20.34b. Portanto, no limite, ficamos com

$$\nabla_R^2 \vec{\mathcal{A}}_2(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \overbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV \right]}^{\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)}$$

ou

$$\nabla_R^2 \vec{\mathcal{A}}_2(\vec{r}, t) = \nabla^2 \vec{\mathcal{A}}_2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (20.84)$$

Somando agora as expressões 20.83 e 20.84, obtemos

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}}_1 + \nabla^2 \vec{\mathcal{A}}_2 = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2}$$

ou

$$\nabla^2 (\vec{\mathcal{A}}_1 + \vec{\mathcal{A}}_2) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)$$

ou, finalmente,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)$$

que é a equação diferencial 20.29b, lembrando que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. Demonstramos, portanto, que as equações 20.34 são de fato as soluções das equações diferenciais 20.29. Note que as demonstrações acima são igualmente válidas quando se considera o tempo avançado $t_a = t + \frac{R}{c}$, de modo que a troca de t_r por t_a nas expressões 20.34 não invalida matematicamente as soluções. Elas ainda respeitam as equações de Maxwell, apesar de violarem o princípio de causalidade. Portanto, a questão aqui é física e não matemática, conforme discutimos

anteriormente, e a escolha usual recai sobre as funções que envolvem o tempo retardado t_r . Vejamos agora alguns exercícios.

Exemplo 20.7. *Prove que a função de Green que é solução de 20.42,*

$$\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

é adequada para resolver a equação 20.41.

Para demonstrar que a função de Green sujeita à equação 20.42 é apropriada para resolver 20.41,

$$\nabla^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) + k^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) = -4\pi v(\vec{r}, \omega)$$

procedemos do mesmo modo como fizemos na seção 9.2. Vamos considerar, no teorema de Green 1.62, as funções

$$\Psi = \Upsilon \quad \text{e} \quad \Phi = \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}')$$

de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \Upsilon \nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') - \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 \Upsilon \right\} dV = \\ \oint_S \left\{ \Upsilon \nabla \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') - \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') \nabla \Upsilon \right\} \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

Como não há superfícies limitantes, a integral de volume é feita sobre todo o espaço, e a integral de superfície se anula. Além disso, por 20.41 e 20.42, temos

$$\nabla^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) = -k^2 \Upsilon(\vec{r}, \omega) - 4\pi v(\vec{r}, \omega)$$

e

$$\nabla^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') = -k^2 \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') - 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

o que faz com que achemos

$$\int_V \left\{ \Upsilon \left[-k^2 \mathfrak{F}_k - 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \right] - \mathfrak{F}_k \left[-k^2 \Upsilon - 4\pi v(\vec{r}, \omega) \right] \right\} dV = 0$$

ou

$$\int_V \left\{ -k^2 \mathfrak{F}_k \Upsilon - 4\pi \Upsilon \delta(\vec{r} - \vec{r}') + k^2 \mathfrak{F}_k \Upsilon + 4\pi \mathfrak{F}_k v(\vec{r}, \omega) \right\} dV = 0$$

ou ainda,

$$-4\pi \int_V \Upsilon \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = -4\pi \int_V \mathfrak{F}_k v(\vec{r}, \omega) dV$$

e então,

$$\Upsilon(\vec{r}, \omega) = \int_V \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') v(\vec{r}, \omega) dV \quad (20.85)$$

Lembrando agora que, por 20.36,

$$\Upsilon(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Upsilon(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

temos

$$\Upsilon(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_V \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') v(\vec{r}, \omega) dV \right] e^{-i\omega t} d\omega$$

ou, como a ordem em que as integrais são feitas pode ser alterada, achamos

$$\Upsilon(\vec{r}, t) = \int_V \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] dV$$

Pela expressão 20.37,

$$v(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

obtemos, finalmente,

$$\Upsilon(\vec{r}, t) = \int_V \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') v(\vec{r}, t) dV \quad (20.86)$$

que é a expressão que relaciona $\Upsilon(\vec{r}, t)$ com a função de Green apropriada, sujeita à equação 20.42.

Exemplo 20.8. *Mostre que os potenciais retardados 20.34,*

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \\ \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV\end{aligned}$$

satisfazem o calibre de Lorentz 20.27,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = 0$$

O problema principal aqui consiste em calcular o divergente de $\vec{\mathcal{A}}$, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right]$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV \quad (20.87)$$

Pela identidade 1.58e,

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\nabla \cdot \vec{A})$$

de forma que o termo entre colchetes pode ser escrito como

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \vec{J}(\vec{r}', t_r) \cdot \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \frac{\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Note que t_r depende de $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, já que, por 20.33,

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

e, por causa disso, o divergente de $\vec{J}$ no último termo da penúltima equação acima não é nulo. Pela identidade 10.2, temos

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\nabla' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

sendo que ∇' é o operador nabla agindo sobre as coordenadas $\vec{r}'$. Utilizando a relação acima, podemos escrever

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\vec{J}(\vec{r}', t_r) \cdot \nabla' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \frac{\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.88)$$

Agora aplicamos novamente a identidade 1.58e para a função

$$\nabla' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \vec{J}(\vec{r}', t_r) \cdot \nabla' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Obtemos, portanto,

$$\vec{J}(\vec{r}', t_r) \cdot \nabla' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

e a equação 20.88 torna-se

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\nabla' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.89)$$

Precisamos calcular em seguida os divergentes de $\vec{J}$ que aparecem na equação acima. Começamos com

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) = \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [J_{x'}(\vec{r}', t_r) \hat{i} + J_{y'}(\vec{r}', t_r) \hat{j} + J_{z'}(\vec{r}', t_r) \hat{k}]$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) = \frac{\partial J_{x'}(\vec{r}', t_r)}{\partial x} + \frac{\partial J_{y'}(\vec{r}', t_r)}{\partial y} + \frac{\partial J_{z'}(\vec{r}', t_r)}{\partial z}$$

ou ainda, como $t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$,

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) = \frac{\partial J_{x'}(\vec{r}', t_r)}{\partial t} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \frac{\partial J_{y'}(\vec{r}', t_r)}{\partial t} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \frac{\partial J_{z'}(\vec{r}', t_r)}{\partial t} \frac{\partial t_r}{\partial z}$$

e então,

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) = \dot{J}_{x'}(\vec{r}', t_r) \frac{\partial t_r}{\partial x} + \dot{J}_{y'}(\vec{r}', t_r) \frac{\partial t_r}{\partial y} + \dot{J}_{z'}(\vec{r}', t_r) \frac{\partial t_r}{\partial z}$$

onde $\dot{J}_i$ indica a derivada temporal de J_i . A expressão acima pode ser reescrita se considerarmos que

$$\begin{aligned}\nabla t_r &= \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] t_r \\ \nabla t_r &= \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial t_r}{\partial z}\end{aligned}$$

e então, fazendo o produto escalar com $\dot{\vec{J}}$, temos

$$\dot{\vec{J}} \cdot \nabla t_r = [J_{x'}(\vec{r}', t_r) \hat{\mathbf{i}} + J_{y'}(\vec{r}', t_r) \hat{\mathbf{j}} + J_{z'}(\vec{r}', t_r) \hat{\mathbf{k}}] \cdot \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right]$$

ou

$$\dot{\vec{J}} \cdot \nabla t_r = \dot{J}_{x'}(\vec{r}', t_r) \frac{\partial t_r}{\partial x} + \dot{J}_{y'}(\vec{r}', t_r) \frac{\partial t_r}{\partial y} + \dot{J}_{z'}(\vec{r}', t_r) \frac{\partial t_r}{\partial z}$$

Portanto, temos

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) = \dot{\vec{J}} \cdot \nabla t_r \quad (20.90)$$

A expressão 20.76 nos diz que

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

e assim,

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) = -\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.91)$$

O próximo passo é calcular $\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r)$, observando que agora $\vec{J}$ depende de $\vec{r}'$ explicitamente e também implicitamente, através de t_r :

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) &= \\ &\left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z'} \right] \cdot [J_{x'}(\vec{r}', t_r) \hat{\mathbf{i}} + J_{y'}(\vec{r}', t_r) \hat{\mathbf{j}} + J_{z'}(\vec{r}', t_r) \hat{\mathbf{k}}]\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) = & \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z'} \right] \cdot [J_{x'}(\vec{r}', t_r) \hat{i} + J_{y'}(\vec{r}', t_r) \hat{j} + J_{z'}(\vec{r}', t_r) \hat{k}] \Big|_{t_r} \\
& + \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z'} \right] \cdot [J_{x'}(\vec{r}', t_r) \hat{i} + J_{y'}(\vec{r}', t_r) \hat{j} + J_{z'}(\vec{r}', t_r) \hat{k}] \Big|_{\vec{r}'} \\
& (20.92)
\end{aligned}$$

onde as derivadas no primeiro termo do lado direito são feitas considerando-se t_r constante e as derivadas no segundo são calculadas com $\vec{r}'$ constante. O primeiro termo é simplesmente a divergência usual de $\vec{J}$, e ele pode ser reexpresso por meio da equação de continuidade 12.21,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

ficando, portanto,

$$\begin{aligned}
-\dot{\rho}(\vec{r}', t_r) = & \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z'} \right] \\
& \cdot [J_{x'}(\vec{r}', t_r) \hat{i} + J_{y'}(\vec{r}', t_r) \hat{j} + J_{z'}(\vec{r}', t_r) \hat{k}] \Big|_{t_r} \quad (20.93)
\end{aligned}$$

O segundo termo é idêntico ao que foi calculado no caso do fator $\nabla \cdot \vec{J}$ determinado anteriormente. Pela expressão 20.90, achamos

$$\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) \Big|_{\vec{r}'} = \dot{\vec{J}} \cdot \nabla' t_r$$

Da expressão 20.74, temos

$$\nabla' t_r = -\frac{1}{c} \nabla' (|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

De 20.75 extraímos (lembrando que o módulo da diferença entre dois vetores independe da ordem em que é feita a subtração)

$$\nabla' (|\vec{r} - \vec{r}'|) = \nabla' (|\vec{r}' - \vec{r}|) = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

de forma que a equação 20.76 fica

$$\nabla' t_r = \frac{1}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

e então,

$$\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) \Big|_{\vec{r}'} = \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.94)$$

Reunindo as equações 20.93 e 20.94 em 20.92, obtemos

$$\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t_r) = -\dot{\rho}(\vec{r}', t_r) + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.95)$$

Com as expressões 20.91 e 20.95, a relação 20.89 fica

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \\ - \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

ou

$$\nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -\nabla' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Utilizando essa expressão em 20.87, achamos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

A primeira integral do lado direito pode ser transformada numa integral de superfície, mediante o uso do teorema do divergente 1.54, de modo que

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA$$

O volume V pode ser considerado como sendo todo o espaço, de forma que a integral de superfície acima se anula. O divergente de $\vec{\mathcal{A}}$ fica, portanto,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

que pode ser escrito como

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\frac{\partial \rho(\vec{r}', t_r)}{\partial t}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

O potencial escalar é dado pela expressão 20.34a,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

de modo que

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} [4\pi\epsilon_0 \mathbb{V}(\vec{r}, t)]$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

e então,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{V}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

que é a condição do calibre de Lorentz 20.27.

Exemplo 20.9. *Um fio retilíneo muito longo é percorrido por uma corrente $i(t) = \alpha t$, para $t \geq 0$, onde α é uma constante. Determine os potenciais e os campos eletromagnéticos gerados por ele a uma distância ρ do fio.*

A figura 20.1 ilustra a situação acima.

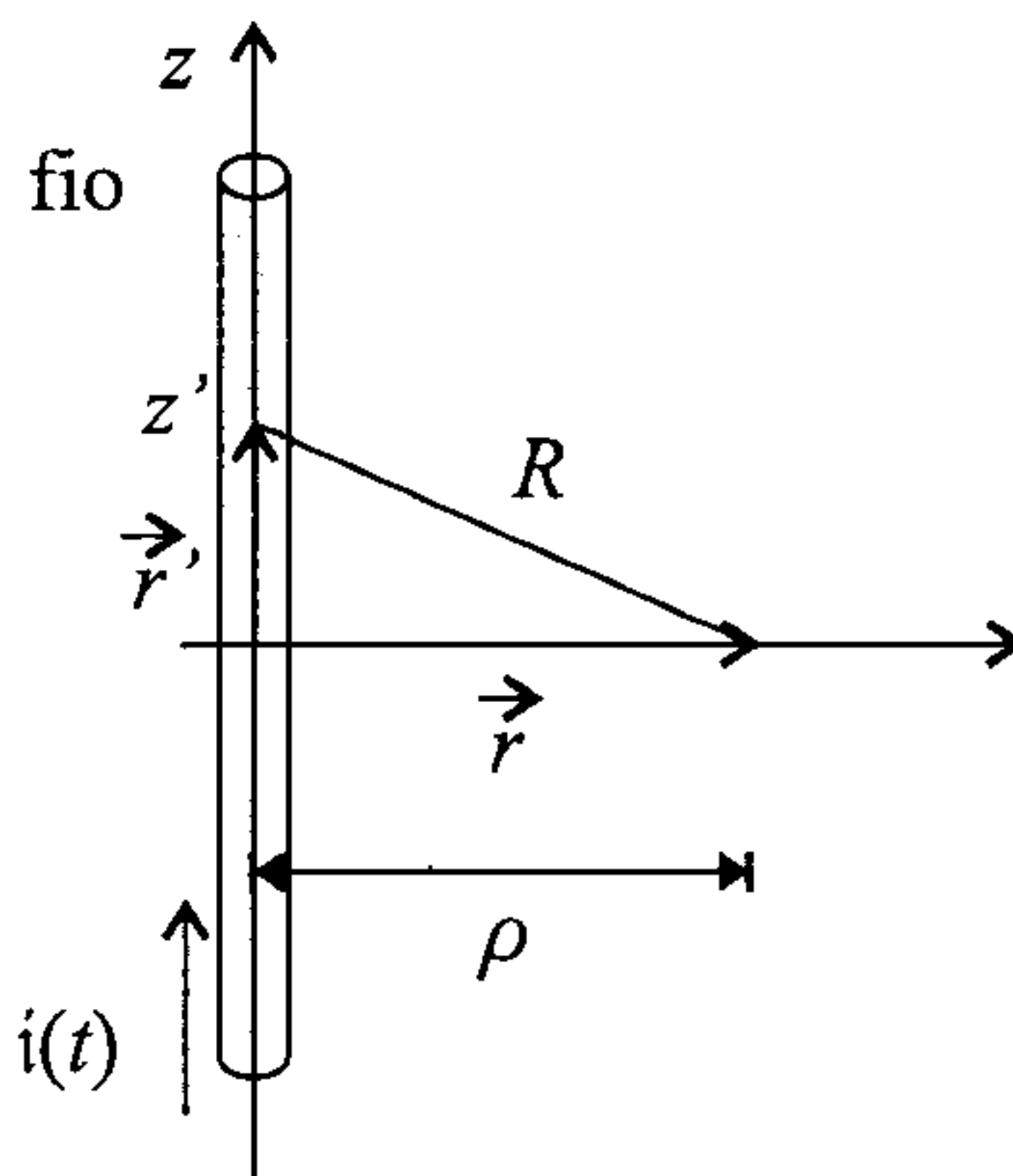


Figura 20.1: Um fio retilíneo muito longo, para o cálculo dos potenciais e campos retardados.

Os potenciais retardados são determinados através de 20.34,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Como o fio é eletricamente neutro, o potencial escalar $\mathbb{V}$ deve ser nulo, ou seja, $\mathbb{V} = 0$. Resta determinar o potencial vetor magnético $\vec{\mathcal{A}}$, que fica, em termos da corrente elétrica,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{i(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}$$

Como $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ e $d\vec{\ell} = dz' \hat{\mathbf{k}}$, temos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(t_r)}{R} dz'$$

No entanto, nem todas as partes do fio contribuem para o potencial vetor magnético em $\vec{r}$ no tempo t , por causa da finitude da velocidade com que a informação é transmitida para este ponto. Para determinar a parte do fio que contribui para o potencial, temos que considerar que o tempo retardado deve ser não-negativo, ou seja,

$$t_r \geq 0$$

Utilizando a definição 20.33 para t_r ,

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

achamos

$$t - \frac{R}{c} \geq 0$$

Da figura, temos

$$R = \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

Então,

$$t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c} \geq 0$$

ou

$$ct \geq \sqrt{\rho^2 + z'^2}$$

ou ainda,

$$c^2 t^2 \geq \rho^2 + z'^2$$

de modo que

$$z'^2 \leq c^2 t^2 - \rho^2$$

e assim,

$$|z'| \leq \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}$$

Portanto, apenas a parte do fio que fica na região

$$-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} \leq z' \leq \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}$$

pode contribuir para o potencial vetor magnético no tempo t na posição $\vec{r}$. Voltando agora à integral, temos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{\alpha t_r}{R} dz'$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}{c}}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} dz'$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha t \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_{-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} - \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{k}}}{4\pi c} \int_{-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} dz'$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{2\mu_0 \alpha t \hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} - \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{k}}}{4\pi c} z' \Big|_{-\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha t \hat{\mathbf{k}}}{2\pi} \int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} - \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{k}}}{2\pi c} \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}$$

A integral acima pode ser resolvida por meio da substituição

$$\begin{aligned} z' &= \rho \operatorname{tg} \theta \\ dz' &= \rho \sec^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

de modo que temos

$$\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \theta}}$$

ou

$$\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec \theta}$$

ou ainda,

$$\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec \theta \, d\theta$$

e então,

$$\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = [\ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Da mudança de variáveis, temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z'}{\rho}$$

de modo que

$$\begin{aligned} z' = 0 & \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_1 = 0 \\ z' = \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} & \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \end{aligned}$$

Da relação

$$\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

temos $\sec \theta_1 = 1$ e

$$\begin{aligned} \sec^2 \theta_2 &= 1 + \operatorname{tg}^2 \theta_2 \\ &= 1 + \frac{c^2 t^2 - \rho^2}{\rho^2} \\ \sec^2 \theta_2 &= \frac{c^2 t^2}{\rho^2} \end{aligned}$$

de forma que

$$\sec \theta_2 = \frac{ct}{\rho}$$

Voltando à integral, achamos

$$\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \ln(\sec \theta_2 + \operatorname{tg} \theta_2) - \ln(\sec \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_1)$$

ou

$$\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \ln \left[\frac{ct}{\rho} + \frac{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \right] - \ln(1 + 0)$$

ou ainda,

$$\int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \ln \left[\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \right]$$

Retornando ao potencial vetor magnético, temos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha t \hat{\mathbf{k}}}{2\pi} \ln \left[\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \right] - \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{k}}}{2\pi c} \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}$$

ou

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha}{2\pi} \left\{ t \ln \left[\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \right] - \frac{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{c} \right\} \hat{\mathbf{k}}$$

Tendo determinado os potenciais retardados, podemos calcular os campos, iniciando com o campo elétrico, que é dado por 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

que se reduz a

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

e então,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha}{2\pi} \left\{ \ln \left[\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \right] + t \frac{c + \frac{c^2 t}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}}{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} - \frac{c^2 t}{c \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\} \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha}{2\pi} \left\{ \ln \left[\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \right] + \frac{ct + \frac{c^2 t^2}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}}{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} - \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\} \hat{k}$$

O campo magnético é obtido por meio de 20.2,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

Utilizando o rotacional em coordenadas cilíndricas dado por B.9,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{A}} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\theta} + \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \frac{\hat{k}}{\rho}$$

e lembrando que $\vec{\mathcal{A}}$ tem apenas a componente $\mathcal{A}_z(\rho)$, achamos

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}} = -\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial \rho} \hat{\theta}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 \alpha}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ t \ln \left[\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho} \right] - \frac{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{c} \right\} \hat{\theta}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 \alpha}{2\pi} \left\{ t \frac{\frac{\rho \left[\frac{-\rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right] - [ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}]}{\rho^2}}{\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}}{\rho}} + \frac{\rho}{c \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\} \hat{\theta}$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha}{2\pi} \left\{ t \frac{\left[\frac{\rho^2}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right] + [ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}]}{\rho [ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}]} - \frac{\rho}{c \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\} \hat{\theta}$$

ou, finalmente,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \alpha}{2\pi} \left\{ \frac{t\rho}{\sqrt{c^2 t^2 - \rho^2} [ct + \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}]} + \frac{t}{\rho} - \frac{\rho}{c \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} \right\} \hat{\theta}$$

que é o campo magnético gerado pelo fio retilíneo muito longo. Alguns outros problemas são tratados nos exercícios. Vejamos agora um modo alternativo de determinar os campos eletromagnéticos partindo dos potenciais retardados.

20.6 Equações de Jefimenko

Partindo dos potenciais retardados 20.34,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \\ \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV\end{aligned}$$

podemos determinar os campos elétrico e magnético dependentes do tempo através das relações 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V} - \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t}$$

e 20.2,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

Note que é preciso tomar cuidado nas derivações porque o tempo retardado t_r nas expressões 20.34 depende de $\vec{r}$, de modo que ρ e $\vec{J}$ têm dependência explícita e implícita nessa variável. Utilizando as equações acima para $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$, é possível generalizar as leis de Coulomb e de Biot-Savart para a situação dependente do tempo. O gradiente de $\mathbb{V}$ já foi calculado, e ele é dado pela expressão 20.78,

$$\nabla\mathbb{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV$$

e agora precisamos determinar

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right]$$

ou

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\partial t}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

que pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

de modo que o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$ fica

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\mu_0\epsilon_0 \dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

ou ainda, utilizando $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\rho(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV \quad (20.96)$$

que é a extensão da expressão 4.5 para a situação dependente do tempo. Note que, quando ρ e $\vec{J}$ independem do tempo, os dois últimos termos na integral se anulam e o primeiro perde a dependência temporal, e assim, a equação 4.5 é reobtida. O campo magnético é obtido mediante

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

Pela identidade 1.58f,

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi (\nabla \times \vec{A})$$

obtemos

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \left[\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] \times \vec{J} + \frac{\nabla \times \vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (20.97)$$

Pela expressão 5.9, temos

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Precisamos agora calcular $\nabla \times \vec{J}(\vec{r}', t_r)$, lembrando que $t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$. O rotacional em coordenadas retangulares fica

$$\nabla \times \vec{J} = \left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (20.98)$$

Cada uma das derivadas espaciais segue uma regra da cadeia. Por exemplo,

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y}$$

ou

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y}$$

Como

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

temos

$$\frac{\partial t}{\partial t_r} = 1$$

e

$$\frac{\partial t_r}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} (|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

de modo que ficamos com

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = -\frac{\dot{J}_z}{c} \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

O outro fator que aparece na componente x é

$$\frac{\partial J_y}{\partial z} = -\frac{\dot{J}_y}{c} \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

e agora, reunindo os dois, temos

$$\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} = \left[-\frac{\dot{J}_z}{c} \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|) + \frac{\dot{J}_y}{c} \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right] \hat{\mathbf{i}}$$

ou

$$\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} = -\frac{1}{c} \left[\dot{J}_z \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|) - \dot{J}_y \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right] \hat{\mathbf{i}} \quad (20.99)$$

A expressão acima pode ser reescrita considerando que

$$\nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x}(|\vec{r} - \vec{r}'|) + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|) + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \vec{J} \times \nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \\ \left[\dot{J}_x \hat{\mathbf{i}} + \dot{J}_y \hat{\mathbf{j}} + \dot{J}_z \hat{\mathbf{k}} \right] \times \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x}(|\vec{r} - \vec{r}'|) + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|) + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right] \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \vec{J} \times \nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \dot{J}_x \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{\mathbf{k}} - \dot{J}_x \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{\mathbf{j}} \\ - \dot{J}_y \frac{\partial}{\partial x}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{\mathbf{k}} + \dot{J}_y \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{\mathbf{i}} \\ + \dot{J}_z \frac{\partial}{\partial x}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{\mathbf{j}} - \dot{J}_z \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\dot{\vec{J}} \times \nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) &= \left[\dot{J}_y \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|) - \dot{J}_z \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right] \hat{i} \\ &\quad + \left[\dot{J}_z \frac{\partial}{\partial x}(|\vec{r} - \vec{r}'|) - \dot{J}_x \frac{\partial}{\partial z}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right] \hat{j} \\ &\quad + \left[\dot{J}_x \frac{\partial}{\partial y}(|\vec{r} - \vec{r}'|) - \dot{J}_y \frac{\partial}{\partial x}(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right] \hat{k}\end{aligned}$$

Comparando a componente x do produto vetorial acima e a expressão 20.99, vemos que podemos escrever

$$\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \right) \hat{i} = -\frac{1}{c} \left[-\dot{\vec{J}} \times \nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right]_x \hat{i}$$

ou

$$\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \right) \hat{i} = \frac{1}{c} \left[\dot{\vec{J}} \times \nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) \right]_x \hat{i}$$

Efetutando os cálculos para as outras componentes da equação 20.98, obtemos

$$\nabla \times \vec{J} = \frac{1}{c} \dot{\vec{J}} \times \nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

A equação 20.75 nos diz que

$$\nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

de forma que achamos

$$\nabla \times \vec{J} = \frac{1}{c} \dot{\vec{J}} \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Retornando agora para 20.97 e utilizando 5.9, ficamos com

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \left[-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \times \vec{J} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{1}{c} \dot{\vec{J}} \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

ou

$$\nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \vec{J}(\vec{r}', t_r) \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c} \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right]$$

de modo que o campo magnético $\vec{B}$ fica

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] dV \quad (20.100)$$

que é a generalização da lei de Biot-Savart 14.14,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

para a situação em que $\vec{J}$ depende do tempo. As expressões 20.96 e 20.100 são conhecidas como equações de Jefimenko para os campos eletromagnéticos dependentes do tempo. Elas podem ser utilizadas na sua determinação, apesar de ser mais fácil em geral obter primeiro os potenciais retardados e em seguida determinar os campos através de derivações apropriadas dos potenciais. Essas expressões são interessantes porque mostram que, para obter os campos eletromagnéticos dependentes do tempo, não basta substituir t por t_r nas expressões usuais para os campos, ao contrário do que ocorre quando se trata dos potenciais. A situação é mais complicada no caso dos campos, porque aparecem termos que envolvem as derivadas temporais de ρ e de $\vec{J}$. Um fato interessante sobre essas expressões é mostrado a seguir.

Exemplo 20.10. *Conforme foi dito no exercício 19.2, quando a densidade de corrente $\vec{J}$ é independente do tempo, a densidade de carga ρ é dada pela expressão 19.43,*

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) + \dot{\rho}(\vec{r}, 0)t$$

Nesse caso, demonstre que o campo elétrico é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', t) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

onde ρ é calculada no tempo atual t , e não no tempo retardado t_r , fazendo com que a situação acima seja idêntica a uma situação eletrostática.

Para realizar a demonstração acima, vamos partir da expressão de Jefimenko 20.96 para o campo elétrico dependente do tempo,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\rho(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

Nesta expressão, temos $\dot{\vec{J}} = 0$. Além disso, por 19.43,

$$\dot{\rho}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \dot{\rho}(\vec{r}, 0)$$

e

$$\rho(\vec{r}, t_r) = \rho(\vec{r}, 0) + \dot{\rho}(\vec{r}, 0)t_r$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ [\rho(\vec{r}', 0) + \dot{\rho}(\vec{r}', 0)t_r] \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right\} dV$$

Como

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', 0) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \dot{\rho}(\vec{r}', 0) \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right] \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', 0) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \dot{\rho}(\vec{r}', 0) t \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \dot{\rho}(\vec{r}', 0) \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \overbrace{\left[\rho(\vec{r}', 0) + \dot{\rho}(\vec{r}', 0)t \right]}^{\rho(\vec{r}', t)} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\ddot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV\end{aligned}$$

e então,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', t) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

que é a expressão que queríamos demonstrar.

Exemplo 20.11. *Demonstre que a lei de Biot-Savart 14.14,*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

permanece válida mesmo para o caso em que a densidade de corrente $\vec{J}$ seja função do tempo, desde que a variação temporal de $\vec{J}$ seja suficientemente lenta para que se possa utilizar a aproximação em primeira ordem

$$\vec{J}(t_r) = \vec{J}(t) + (t_r - t)\dot{\vec{J}}(t) \quad (20.101)$$

o que faz com que $\vec{J}$ possa ser calculado no tempo atual, não no tempo retardado.

O campo magnético é obtido mediante a equação de Jefimenko 20.100,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] dV$$

Na equação acima vamos precisar da derivada temporal da expressão 20.101,

$$\vec{J}(t_r) = \vec{J}(t) + (t_r - t)\dot{\vec{J}}(t)$$

Aqui é preciso tomar cuidado, pois a derivada deve ser feita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \vec{J}(t_r)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{J}(t_r)}{\partial t_r} \overbrace{\frac{\partial t_r}{\partial t}}^1 = \frac{\partial \vec{J}(t_r)}{\partial t_r}$$

e então,

$$\dot{\vec{J}}(t_r) = \dot{\vec{J}}(t)$$

Além disso,

$$t_r - t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

de modo que o campo magnético fica

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{[\vec{J}(\vec{r}', t) + (t_r - t)\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t)] \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right\} dV$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\
& + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \\
& + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\ddot{\vec{J}}(\vec{r}', t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c^2|\vec{r} - \vec{r}'|} dV
\end{aligned}$$

resultando em

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

que é a lei de Biot-Savart, válida na Magnetostática. A expressão acima indica que pelo menos até primeira ordem a aproximação magnetostática é muito boa, porque há um cancelamento entre os dois fatores que são desconsiderados na equação acima, que são o efeito do retardamento introduzido no campo magnético e a derivada temporal da densidade de corrente $\vec{J}$, que compensam um ao outro em primeira ordem. Vejamos agora como ficam os potenciais retardados e os campos eletromagnéticos gerados por cargas pontuais.

20.7 Potenciais e Campos de Liénard-Wiechert

Até o momento as expressões para os potenciais e campos que obtivemos são válidas para distribuições macroscópicas de cargas e correntes, que serão úteis quando tratarmos da emissão de radiação por essas distribuições, por exemplo. Precisamos determinar também o comportamento dessas grandezas para o caso de cargas pontuais em movimento, o que será importante quando estudarmos a radiação emitida por cargas com velocidades próximas à da luz. Para isso, vamos considerar uma partícula de carga Q movendo-se no espaço de modo que sua posição atual seja descrita por $\vec{r}_Q(t)$, como mostra a figura 20.2.

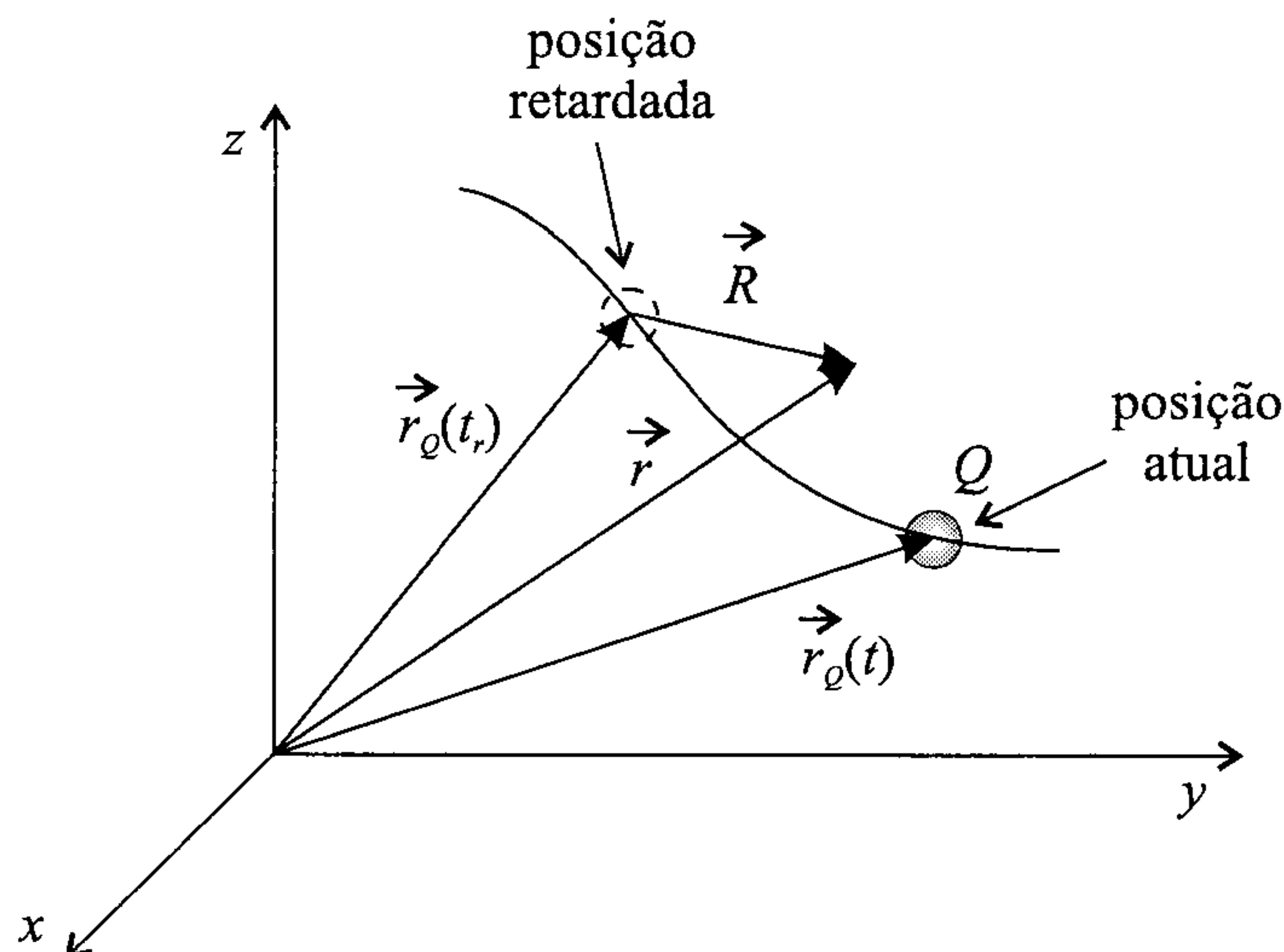


Figura 20.2: Grandezas importantes para o cálculo dos potenciais retardados para uma carga pontual.

A posição no tempo retardado t_r é dada por $\vec{r}_Q(t_r)$, e o ponto onde queremos determinar os potenciais retardados é indicado por $\vec{r}$, que independe de t . O vetor $\vec{R}$ representa a diferença entre $\vec{r}$ e a posição retardada $\vec{r}_Q(t_r)$, ou seja,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$$

Conseqüentemente, o tempo retardado é determinado por meio da expressão

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)| = c(t - t_r) \quad (20.102)$$

já que R é a distância que a informação transmitida pelos potenciais no tempo t_r deve percorrer para chegar ao ponto de observação $\vec{r}$ no tempo t . É interessante notar que um observador situado em $\vec{r}$ não pode ver a carga em dois ou mais locais diferentes num único instante de tempo t . Desenvolva o raciocínio como se isso fosse possível, de modo que dois pontos da trajetória descrita pela carga emitissem potenciais retardados que chegassem no mesmo tempo t no ponto $\vec{r}$. Essas duas informações seriam emitidas nos tempos retardados t_1 e t_2 , de modo que teríamos

$$R_1 = c(t - t_1)$$

e

$$R_2 = c(t - t_2)$$

e assim,

$$R_1 - R_2 = c(t - t_1) - c(t - t_2)$$

ou

$$R_1 - R_2 = c(t_2 - t_1)$$

o que faz com que a velocidade média da partícula entre t_1 e t_2 seja dada por

$$c = \frac{R_1 - R_2}{t_2 - t_1}$$

Assim, a partícula teria uma velocidade média igual à velocidade da luz. Nenhuma partícula carregada pode ter essa velocidade, de modo que não é permitido que dois (ou mais) pontos da trajetória emitam potenciais retardados que atinjam o ponto $\vec{r}$ no mesmo instante. Como esses potenciais são a base das ondas eletromagnéticas que chegam em $\vec{r}$, eles darão origem à imagem da carga, e o observador só pode ver a carga num único lugar de cada vez (eventualmente ele pode até não ver a carga). Note que é possível ouvir ao mesmo tempo um objeto situado em dois locais diferentes. Por exemplo, se a fonte sonora emitir um som num certo local e se mover em sua direção com a velocidade do som, ela pode emitir o mesmo som noutro local, mais próximo de você, e ambos os sons serão percebidos ao mesmo tempo, apesar de terem sido emitidos em locais diferentes.

Voltando à questão da determinação dos potenciais retardados, temos que o potencial escalar retardado 20.34a é

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Isso sugere que o potencial de uma carga pontual Q seja dado por

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|}$$

de modo que a diferença para a situação eletrostática seria o fato de que o denominador é calculado na posição retardada da carga. No entanto, essa hipótese demonstra-se incorreta. Para entender o motivo do erro, é preciso notar que a carga da partícula é dada por uma integral do tipo

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}_Q(t), t_r) dV$$

em que $\rho(\vec{r}_Q(t), t_r)$ é a densidade de carga calculada no tempo retardado t_r . Se a partícula não estivesse em movimento, a integral acima seria calculada sobre toda a distribuição de cargas num único instante de tempo, e teríamos o valor normal da carga. Como a partícula está em movimento, as contribuições de diferentes partes da distribuição de cargas são calculadas em tempos retardados $t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|}{c}$ diferentes, e isso altera o valor da carga total observada por um determinado fator geométrico que iremos deduzir em seguida. Esse fato permanece mesmo quando as cargas são pontuais, porque elas devem ser interpretadas no Eletromagnetismo usual como sendo uma distribuição de cargas contida num volume que tende a zero, e o fator geométrico mencionado acima aparece mesmo nesses casos.

Na discussão a respeito da dilatação geométrica produzida pelo movimento de um objeto, vimos que o comprimento de um objeto em movimento com velocidade $\vec{v}$ quando é visto na posição $\vec{r}'$ por um observador situado em $\vec{r}$ é dado por

$$L' = L \left[1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \right]^{-1}$$

onde L é o comprimento do objeto em movimento e L' é o comprimento com que ele é percebido ⁴. Os comprimentos perpendiculares à direção do movimento não são alterados pelo fator acima, já que não há movimento nessas direções. Portanto, o volume do objeto é alterado por um fator

$$V' = \frac{V}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

onde

⁴ Não há nenhuma relação aqui com a contração de Lorentz ou efeitos relativísticos, já que o comprimento em repouso do objeto não é de nosso interesse.

$$\hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

e

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad (20.103)$$

Assim, o elemento de volume de um corpo em movimento torna-se

$$dV' = \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.104)$$

de modo que a carga da partícula é dada por meio de

$$\int_V \rho(\vec{r}_Q(t), t_r) \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

Para realizar a integral, é preciso escrever a densidade de carga para uma carga pontual. Nesse caso, utilizamos uma função delta de Dirac, ou seja,

$$\rho(\vec{r}_Q(t), t_r) = Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r)) \quad (20.105)$$

e então a carga percebida é

$$\int_V \frac{Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} dV = \frac{Q}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

sendo que agora $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$,

$$\hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|}$$

e $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}(t_r)}{c}$ são calculados no tempo retardado. Podemos então calcular o potencial retardado mediante

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}_Q(t), t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|} dV$$

substituindo os devidos fatores, de modo que

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.106)$$

lembrando que $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$ e que $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}(t_r)}{c}$. O potencial acima é o potencial escalar retardado para uma partícula pontual de carga Q movendo-se no espaço com velocidade $\vec{v}(t_r)$ no tempo retardado t_r . O potencial vetor magnético pode ser determinado por meio da equação 20.34b,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Para determinar a densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r}', t_r)$, partimos de

$$dQ = \rho dV = \rho dA |d\vec{\ell}|$$

onde dA é a área perpendicular ao movimento da carga dQ que ocupa um volume $dV = dA|d\vec{\ell}|$, e $|d\vec{\ell}|$ orienta-se na direção e sentido da velocidade de dQ . Derivando com relação ao tempo, temos

$$\frac{dQ}{dt} = \rho dA \frac{|d\vec{\ell}|}{dt}$$

O lado esquerdo corresponde à corrente elementar produzida pela carga dQ , e a fração no lado direito é a velocidade da partícula. Portanto,

$$di = \rho dA v$$

A densidade de corrente é obtida mediante

$$J = \frac{di}{dA} = \rho v$$

ou, na forma vetorial,

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

de modo que achamos

$$\vec{J}(\vec{r}_Q(t), t_r) = \rho(\vec{r}_Q(t), t_r) \vec{v}(t_r) \quad (20.107)$$

O potencial vetor magnético torna-se, sem esquecer o fator geométrico,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\vec{r}_Q(t), t_r) \vec{v}(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{Q \delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r)) \vec{v}(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou ainda,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \vec{v}(t_r)}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.108)$$

que pode ser reescrito como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \vec{v}(t_r)$$

ou, utilizando $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ e também a expressão 20.106,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

obtemos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}(t_r)}{c^2} \mathbb{V}(\vec{r}, t) \quad (20.109)$$

Os potenciais retardados dados pelas equações 20.106 e 20.108–20.109 são conhecidos como *potenciais de Liénard-Wiechert* para uma carga pontual em movimento. Eles foram deduzidos aqui ressaltando-se o fator geométrico que aparece por causa do movimento da densidade de cargas. É interessante deduzi-los também através de uma forma alternativa, cujo desenvolvimento será útil posteriormente, além de ser mais consistente do ponto de vista formal. Para tanto, percebemos que, em 20.34a,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

a densidade de carga pontual pode ser escrita como em 20.105,

$$\rho(\vec{r}_Q(t), t_r) = Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))$$

e a integral é feita sobre um volume V . Por outro lado, como há uma relação direta entre o tempo retardado t_r e a posição da carga $\vec{r}_Q(t_r)$ no tempo retardado, dada por 20.102,

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)| = c(t - t_r)$$

a densidade de carga também pode ser escrita em termos de uma função delta de Dirac no tempo, não no espaço como ocorre em 20.105, e a integração volumétrica em 20.34a pode ser substituída por uma integração no tempo, isto é,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q\delta(t' - t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} dt'$$

ou, explicitando o tempo retardado,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q|}{c}\right)\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} dt'$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} dt' \quad (20.110)$$

lembrando que $\vec{r}_Q = \vec{r}_Q(t')$, o que impede a integral de ser calculada na forma em que ela está, pois existe um fator $\vec{r}_Q(t')$ dentro do argumento da delta de Dirac. Precisamos realizar uma mudança de variáveis, por meio de

$$t'' = t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|}{c} \quad (20.111)$$

de modo que achamos

$$dt'' = dt' - dt + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) dt'$$

ou, considerando que o tempo t em que a observação dos potenciais e campos é feita é fixo, de modo que $dt = 0$, temos

$$dt'' = dt' \left[1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} (|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) \right] \quad (20.112)$$

Precisamos agora calcular o fator

$$\frac{d}{dt'} (|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) = \frac{d}{dt'} \left\{ \sqrt{[x - x_Q(t')]^2 + [y - y_Q(t')]^2 + [z - z_Q(t')]^2} \right\}$$

ou, como temos uma derivação implícita,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} (|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) = & \frac{\partial}{\partial x_Q} \left\{ \sqrt{[x - x_Q(t')]^2 + [y - y_Q(t')]^2 + [z - z_Q(t')]^2} \right\} \frac{dx_Q}{dt'} \\ & + \frac{\partial}{\partial y_Q} \left\{ \sqrt{[x - x_Q(t')]^2 + [y - y_Q(t')]^2 + [z - z_Q(t')]^2} \right\} \frac{dy_Q}{dt'} \\ & + \frac{\partial}{\partial z_Q} \left\{ \sqrt{[x - x_Q(t')]^2 + [y - y_Q(t')]^2 + [z - z_Q(t')]^2} \right\} \frac{dz_Q}{dt'} \end{aligned}$$

As derivadas temporais na expressão acima dão as componentes da velocidade da carga, de modo que a expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} (|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) = & \nabla_Q \left\{ \sqrt{[x - x_Q(t')]^2 + [y - y_Q(t')]^2 + [z - z_Q(t')]^2} \right\} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d}{dt'} (|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) = \nabla_Q (|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) \cdot \vec{v}$$

onde ∇_Q indica que as derivadas são feitas em relação às coordenadas $\vec{r}_Q$. Da expressão 20.75,

$$\nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

temos

$$\nabla_Q(|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|}$$

e então,

$$\frac{d}{dt'}(|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|} \cdot \vec{v}$$

de forma que a relação 20.112 fica

$$dt'' = dt' \left[1 - \frac{1}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|} \cdot \vec{v} \right] \quad (20.113)$$

ou, definindo

$$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_Q(t')$$

e

$$\hat{R}(t') = \frac{\vec{R}(t')}{R}$$

além de usarmos a expressão 20.103,

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

temos

$$dt'' = dt' [1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}] \quad (20.114)$$

ou ⁵

$$dt' = \frac{dt''}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}}$$

⁵ Note o aparecimento do fator geométrico.

de modo que a integral do potencial escalar 20.110 torna-se

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t'')}{R(t')} \frac{dt''}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t'')}{R(t') - \vec{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t'')} dt''$$

que, integrada, resulta em

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R(t') - \vec{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \right]_{t''=0}$$

sendo que $t'' = 0$ implica, por 20.111,

$$0 = t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|}{c}$$

ou

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t')|}{c}$$

que é o tempo retardado, e assim,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

que é a expressão 20.106. Para o potencial vetor magnético usamos a relação 20.107,

$$\vec{J}(\vec{r}_Q(t), t_r) = \rho(\vec{r}_Q(t), t_r) \vec{v}(t_r)$$

considerando que a densidade de cargas é dada por

$$\rho(\vec{r}_Q(t), t_r) = Q\delta(t - t_r)$$

o que faz com que

$$\vec{J}(\vec{r}_Q(t), t_r) = Q\delta(t - t_r)\vec{v}(t_r) \quad (20.115)$$

de modo que a expressão 20.34b fica

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q\delta(t' - t_r)\vec{v}(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} dt'$$

Efetuada as mesmas substituições acima, o que é deixado como exercício (veja o exercício 20.1), o resultado final é

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}(t_r)}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

que corresponde à expressão 20.108. Partimos agora para a determinação dos campos gerados pela partícula de carga Q em movimento. Novamente, aqui não há um único modo de proceder. Podemos partir das equações 20.2,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

e 20.3,

$$\vec{E} = -\nabla\mathbb{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

juntamente com as expressões 20.106,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

e 20.108,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}(t_r)}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou então, podemos iniciar com as equações de Jefimenko 20.96,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\rho(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV$$

e 20.100,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] dV$$

Esta última opção pode ainda ter (pelo menos) duas variantes. Na verdade, qualquer uma das alternativas é bastante trabalhosa, envolvendo uma grande quantidade de manipulações algébricas. O uso das equações de Jefimenko nos fornece como resultado intermediário as equações de Heaviside-Feynman para os campos gerados por cargas pontuais, e vamos iniciar com essa alternativa.

O primeiro passo a ser considerado consiste em reescrever as equações de Jefimenko de uma forma mais adequada, utilizando a relação 20.73,

$$\left[\frac{\partial f(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{t_r} = \frac{\partial}{\partial t} [f(\vec{r}', t')]_{t_r}$$

Com essa relação, obtemos

$$\dot{\rho}(\vec{r}', t_r) = \frac{\partial \rho(\vec{r}', t_r)}{\partial t_r} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\vec{r}', t_r)]$$

e

$$\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r) = \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\partial t_r} = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{J}(\vec{r}', t_r)]$$

Além disso, nas equações de Jefimenko, $\vec{r}'$ independe do tempo, de modo que o campo elétrico pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \rho(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\vec{r}', t_r)] - \frac{1}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{J}(\vec{r}', t_r)] \right\} dV \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \rho(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} dV \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \right] \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right] \quad (20.116)\end{aligned}$$

Da mesma forma, o campo magnético 20.100 fica

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\vec{J}(\vec{r}', t_r)] \right\} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] dV$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right] \right\} dV$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \right] \quad (20.117)\end{aligned}$$

As expressões 20.116 e 20.117 são o ponto de partida para o próximo passo, que consiste em aplicá-las para uma partícula de carga Q em movimento. Nesse caso, a densidade de carga pode ser escrita por meio de 20.105,

$$\rho(\vec{r}_Q(t), t_r) = Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))$$

enquanto a densidade de corrente fica, por 20.107,

$$\vec{J}(\vec{r}_Q(t), t_r) = \rho(\vec{r}_Q(t), t_r) \vec{v}(t) = Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r)) \vec{v}(t)$$

sem esquecer que, como a carga está em movimento, há uma alteração geométrica do elemento de volume, o qual é dado por 20.104,

$$dV' = \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

de modo que o campo elétrico 20.116 torna-se

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V Q \delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r)) \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|^3} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{Q \delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r))}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|^2} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{Q \delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r)) \vec{v}(t)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|^3} \\ & + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|^2} \right] \\ & - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{v}(t_r)}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|} \right] \end{aligned}$$

ou ainda, como

$$\vec{R}(t_r) = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$$

temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = & \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] R^3} \\ & + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{R}}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} \right] \\ & - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{v}}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] R} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right] \right\} \quad (20.118)$$

Note que nessa expressão $\vec{R}$, R e $\vec{\beta}$ são todos calculados em t_r . Além disso, como $\vec{R}(t_r) = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$ e $\vec{r}_Q(t_r)$ depende do tempo retardado, a relação 20.73,

$$\left[\frac{\partial f(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{t_r} = \frac{\partial}{\partial t} [f(\vec{r}', t')]_{t_r}$$

deixa de ser válida nessa forma simples, pois há derivadas implícitas que precisam ser consideradas. Por causa disso, as derivadas temporais em 20.118 não são simples de serem efetuadas, e essa é uma das causas da complexidade algébrica mencionada anteriormente.

Continuando com a obtenção dos campos, devemos achar agora o campo magnético 20.117, que fica, efetuando as devidas substituições,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r)) \vec{v}(t) \times (\vec{r} - \vec{r}_Q(t))}{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|^3} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{Q\delta(\vec{r}_Q(t) - \vec{r}_Q(t_r)) \vec{v}(t) \times (\vec{r} - \vec{r}_Q(t))}{c|\vec{r} - \vec{r}_Q(t)|^2} \frac{dV}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}(t_r) \times \vec{R}}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] R^3} + \frac{Q\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{v}(t_r) \times \vec{R}}{c[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} \right]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} \right] \right\} \quad (20.119)$$

As expressões 20.118 e 20.119 são uma das formas das equações de Heaviside-Feynman. A forma usual da equação de Feynman para o campo elétrico é

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{R}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{R}}{R^3} \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\vec{R}}{R} \right] \right\} \quad (20.120)$$

enquanto a expressão de Heaviside para o campo magnético é

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right] \right\} \quad (20.121)$$

onde $\vec{v}$, $\vec{\beta}$, $\vec{R}$ e R são todos calculados em t_r . A equivalência entre as formas 20.118 e 20.119 e as formas usuais 20.120 e 20.121 necessita de uma álgebra cuidadosa, e ela será deixada como exercício (veja o exercício 20.4).

Conforme dissemos no início do processo de obtenção dos campos, a utilização das equações de Jefimenko tem pelo menos duas variantes. Utilizaremos uma delas, que consiste em interpretar a densidade de cargas e correntes através das funções delta de Dirac espaciais em 20.105 e 20.107, de modo que realizamos integrações volumétricas. Podemos também realizar uma integração temporal, como fizemos na obtenção dos potenciais de Liénard-Wiechert mostrada a partir da página 110. O procedimento é o mesmo que foi feito lá, e o resultado são as expressões 20.118 e 20.119, e isso também será deixado como exercício (veja o exercício 20.6). Nos dedicaremos agora a calcular as derivadas temporais nas expressões para os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ referidas acima. É preciso ter cuidado com as derivadas temporais, pois $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$ depende de t de uma forma não muito simples, visto que $t_r = t - \frac{\vec{R}(t_r)}{c}$ ⁶. Iniciamos calculando

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)) = -\frac{\partial \vec{r}_Q(t_r)}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{r}_Q(t_r)}{\partial t_r} \frac{t_r}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\vec{v} \frac{\partial t_r}{\partial t} \quad (20.122)$$

Em seguida, temos que determinar

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}] = \frac{1}{2\sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}} \left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \cdot \vec{R} + \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \right]$$

⁶ Em particular, $\frac{\partial t_r}{\partial t} \neq 1$, por causa da dependência complicada de $\vec{r}_Q(t_r)$ com t_r .

ou

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\vec{R}}{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}$$

ou ainda, utilizando 20.122,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -(\hat{R} \cdot \vec{v}) \frac{\partial t_r}{\partial t} \quad (20.123)$$

Por outro lado, por 20.102,

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)| = c(t - t_r)$$

temos também

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [c(t - t_r)] = c \left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) \quad (20.124)$$

Reunindo 20.123 e 20.124, achamos

$$-(\hat{R} \cdot \vec{v}) \frac{\partial t_r}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t} \right)$$

ou

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} - (\hat{R} \cdot \vec{\beta}) \frac{\partial t_r}{\partial t} = 1$$

ou ainda,

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.125)$$

que é o fator geométrico em 20.104, de modo que 20.122 fica

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\frac{\vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.126)$$

e 20.123 fica

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\hat{R} \cdot \vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.127)$$

Vamos precisar também de

$$\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{d\vec{v}(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial t}$$

que fica, utilizando 20.125,

$$\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\vec{a}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

onde $\vec{a}$ é a aceleração da partícula no tempo retardado t_r . Definindo

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{a}}{c} \quad (20.128)$$

obtemos

$$\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} = \frac{\vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.129)$$

Por fim, precisamos também de

$$\frac{\partial}{\partial t} (R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}) = \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t}$$

Utilizando 20.126, 20.127 e 20.129, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} (R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}) = -\frac{\hat{R} \cdot \vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} + \frac{\vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} (R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}) = -\frac{\hat{R} \cdot \vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t} (R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{v} - \vec{R} \cdot \vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.130)$$

Agora estamos prontos para voltar às equações dos campos. Iniciamos com o campo elétrico 20.118, que fica

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} - \frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\vec{R}}{R [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \frac{\partial}{\partial t} [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] \right\}$$

$$- \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} - \frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \frac{\partial}{\partial t} [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] \right\}$$

ou, substituindo as derivadas temporais,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ -\frac{1}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} \frac{\vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right.$$

$$+ \frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} \frac{\hat{R} \cdot \vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} - \frac{\vec{R}}{R [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{v} - \vec{R} \cdot \vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \left. \right\}$$

$$- \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \frac{\vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} - \frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{v} - \vec{R} \cdot \vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right\}$$

que pode ser reescrito como

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right.$$

$$+ \frac{\hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} - \frac{\vec{R}(\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \left. \right\}$$

$$- \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{R \frac{\vec{\alpha}}{c}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} - \frac{R \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} - \frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right.$$

$$+ \frac{\hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} - \frac{\vec{R}(\beta^2 - \hat{R} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3}$$

$$\left. - \frac{R \frac{\vec{\alpha}}{c}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} + \frac{R \vec{\beta}(\beta^2 - \hat{R} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} - \frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} + \frac{\hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} - \frac{\vec{R}\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R}(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{R\frac{\vec{\alpha}}{c}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} + \frac{R\vec{\beta}\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{R\vec{\beta}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{R\vec{\beta}(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

Agora, vamos começar a coleccionar termos que resultarão no resultado final, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{R}[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] - R\vec{\beta}}{R[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} + \frac{\left\{ \hat{R}[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] + \vec{R} - R\vec{\beta} \right\}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R\vec{\beta} - \vec{R})\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{R[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]\frac{\vec{\alpha}}{c}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{R\hat{R} - \hat{R}(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) - R\vec{\beta}}{R[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} + \frac{[R\hat{R} - \hat{R}(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) + \vec{R} - R\vec{\beta}](\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R\vec{\beta} - \vec{R})\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{R^2\frac{\vec{\alpha}}{c} - R(\vec{R} \cdot \vec{\beta})\frac{\vec{\alpha}}{c}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

O termo

$$R^2\frac{\vec{\alpha}}{c} - R(\vec{R} \cdot \vec{\beta})\frac{\vec{\alpha}}{c}$$

pode ser reescrito como

$$R^2 \frac{\vec{\alpha}}{c} - R(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) \frac{\vec{\alpha}}{c} = [\vec{R} \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta})] \frac{\vec{\alpha}}{c}$$

Temos, então, simplificando também a primeira fração,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\hat{R} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} + \frac{[2\vec{R} - \hat{R}(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) - R\vec{\beta}](\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R\vec{\beta} - \vec{R})\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{[\vec{R} \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta})] \frac{\vec{\alpha}}{c}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

A propriedade 1.19a do produto triplo vetorial estabelece que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Fazendo as identificações

$$\vec{a} = \vec{R} \qquad \vec{b} = \vec{R} - R\vec{\beta} \qquad \vec{c} = \frac{\vec{\alpha}}{c}$$

temos

$$\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}] = \left[\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c} \right] (\vec{R} - R\vec{\beta}) - [\vec{R} \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta})] \frac{\vec{\alpha}}{c} \quad (20.131)$$

que corresponde exatamente aos numeradores das duas últimas frações na expressão do campo elétrico. Assim, ficamos com

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{[\hat{R} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}][R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{[2\vec{R} - \hat{R}(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) - R\vec{\beta}](\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R\vec{\beta} - \vec{R})\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \left\{ \frac{R\hat{R} - R\hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - R\vec{\beta} - \hat{R}(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) + \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{2\vec{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \hat{R}(\vec{R} \cdot \vec{\beta})(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - R\vec{\beta}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R\vec{\beta} - \vec{R})\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R} - 2\vec{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - R\vec{\beta} + \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) + R\vec{\beta}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{2\vec{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \hat{R}(\vec{R} \cdot \vec{\beta})(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - R\vec{\beta}(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R\vec{\beta} - \vec{R})\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

Realizando as devidas simplificações,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R} - R\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R\vec{\beta} - \vec{R})\beta^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} \quad (20.132)$$

que é o campo elétrico de Liénard-Wiechert produzido por uma partícula pontual em movimento contendo uma carga Q . Devemos obter agora o campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$, através de 20.119,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R} \right] \right\}$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{c\vec{\beta} \times \hat{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R} + \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} \times \frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R} \right. \\ \left. + \frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} - \frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 R} \frac{\partial}{\partial t} [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] \right. \\ \left. - \frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R^2} \frac{\partial R}{\partial t} \right\}$$

ou, substituindo as derivadas temporais dadas por 20.127–20.130, achamos

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{c\vec{\beta} \times \hat{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R} + \frac{\vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \times \frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R} \right. \\ \left. - \frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R} \times \frac{\vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} - \frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 R} \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{v} - \vec{R} \cdot \vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right. \\ \left. + \frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R^2} \frac{\hat{R} \cdot \vec{v}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right\}$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{c\vec{\beta} \times \hat{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]R} + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right. \\ \left. - \frac{\vec{\beta} \times \vec{v}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} - \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{v} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{v} - \vec{R} \cdot \vec{\alpha})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right. \\ \left. + \frac{(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{v})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

ou ainda, como $\vec{\beta} \parallel \vec{v}$, e já iniciando com algumas manipulações,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{(c\vec{\beta} \times \hat{R})[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 R} - \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(c\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\hat{R} \cdot c\vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \vec{\alpha})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot c\vec{\beta})[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

ou então,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{cR(\vec{\beta} \times \hat{R}) - cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 R} - \frac{c\beta^2(\vec{\beta} \times \vec{R})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \vec{\alpha})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

que fica

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{[c(\vec{\beta} \times \hat{R}) - c(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})][R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{2cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 - c\beta^2(\vec{\beta} \times \vec{R})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \vec{\alpha})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

ou

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{cR(\vec{\beta} \times \hat{R})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{c(\vec{\beta} \times \hat{R})(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) + cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - c(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})(\vec{R} \cdot \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{2cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 - c\beta^2(\vec{\beta} \times \vec{R})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \vec{\alpha})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

ou então,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{c(\vec{\beta} \times \vec{R}) - 2cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) + cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})^2}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{2cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - cR(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 - c\beta^2(\vec{\beta} \times \vec{R})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \vec{\alpha})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

ou ainda, fazendo as simplificações,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{c(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \vec{\alpha})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{\alpha} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

que pode ser reescrito como

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0 c}{4\pi} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

Lembrando que $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, temos $\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}$, e então,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\} \quad (20.133)$$

que é o campo magnético de Liénard-Wiechert para uma partícula pontual de carga Q em movimento. Ele pode ser relacionado ao campo elétrico 20.132, como pode ser visto se efetuarmos o produto vetorial de $\hat{R}$, aplicado no tempo retardado, com $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$, isto é,

$$\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \hat{R} \times \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

onde todas as grandezas do lado direito na expressão acima são calculadas no tempo retardado. Efetuando os produtos, temos

$$\begin{aligned} \hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\hat{R} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right. \\ \left. - \frac{R(\hat{R} \times \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \hat{R} \times \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} \end{aligned}$$

Como $\hat{R} \parallel \vec{R}$, o primeiro termo do lado direito é nulo. Além disso, pela equação 20.131, temos

$$\vec{R} \times \left[(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c} \right] = \left[\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c} \right] (\vec{R} - R\vec{\beta}) - [\vec{R} \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta})] \frac{\vec{\alpha}}{c}$$

de modo que ficamos com

$$\begin{aligned} \hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right. \\ \left. + \hat{R} \times \frac{[\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c}] (\vec{R} - R\vec{\beta}) - [\vec{R} \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta})] \frac{\vec{\alpha}}{c}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right. \\ \left. + \frac{[\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c}] (\hat{R} \times \vec{R} - R\hat{R} \times \vec{\beta}) - [\vec{R} \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta})] \hat{R} \times \frac{\vec{\alpha}}{c}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R^2 - R\vec{R} \cdot \vec{\beta})(\frac{\vec{a}}{c} \times \hat{R})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

que fica

$$\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})(\frac{\vec{a}}{c} \times \vec{R})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

e então,

$$\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{a}}{c} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

Comparando esta relação com a expressão 20.133, temos

$$\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = c\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)}{c} \quad (20.134)$$

Podemos agora analisar as expressões 20.132, 20.133 e 20.134. O campo elétrico 20.132,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

é dado por dois fatores, o primeiro deles dependente apenas da velocidade $\vec{v} = c\vec{\beta}$ da partícula, enquanto o segundo dependente também da aceleração $\vec{a} = c\vec{\alpha}$. Por causa disso, o primeiro fator é conhecido como campo elétrico de velocidade, ao passo que o segundo é o campo elétrico de aceleração. O campo de velocidade tem componentes nas direções de $\vec{R}$ e da velocidade $\vec{v}$ da partícula, e quando $\vec{v} = 0$, ele se reduz a

$$\vec{\mathcal{E}}_v(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

que é o campo elétrico usual de uma carga pontual Q . Por essa razão, o campo elétrico de velocidade também é chamado de campo de Coulomb generalizado. Em geral, ele pode ser reescrito como

$$\vec{\mathcal{E}}_v(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R(\hat{R} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_v(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\hat{R} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]} \quad (20.135)$$

o que ressalta sua dependência com o inverso do quadrado da distância, a partir do ponto de emissão, que é o comportamento usual do campo elétrico coulombiano. Por outro lado, o campo elétrico de aceleração,

$$\vec{\mathcal{E}}_a(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3}$$

pode ser reescrito como

$$\vec{\mathcal{E}}_a(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_a(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]} \quad (20.136)$$

de modo que ele tem uma dependência com o inverso da distância, diferentemente do que ocorre no caso coulombiano. A grandes distâncias da carga, essa parcela é a que domina o campo elétrico, e ela será importante na emissão de radiação por partículas carregadas. Por causa disso, ela também é chamada de campo elétrico de radiação.

O campo magnético 20.133,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{a}}{c} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

que pode ser relacionado ao campo elétrico por 20.134,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{E}(\vec{r}, t)}{c}$$

também apresenta duas componentes. O termo de velocidade é

$$\vec{B}_v(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3}$$

que pode ser reescrito como

$$\vec{B}_v(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{R(\vec{\beta} \times \hat{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}$$

ou

$$\vec{B}_v(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{(\vec{\beta} \times \hat{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]}$$

que tem também uma dependência com o inverso do quadrado da distância. Esse termo é uma generalização da lei de Biot-Savart para cargas pontuais em movimento. O termo de aceleração do campo magnético,

$$\vec{B}_a(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{a}}{c} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\}$$

pode ser expresso por

$$\vec{B}_a(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{R^2(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]} + \frac{R \frac{\vec{a}}{c} \times \hat{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]} \right\}$$

ou

$$\vec{B}_a(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \hat{R})(\hat{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c})}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]} + \frac{\frac{\vec{a}}{c} \times \hat{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]} \right\}$$

que explicita a dependência com o inverso da distância, de modo que esse campo é importante a grandes distâncias da carga. Ele também é chamado de campo magnético de radiação. É interessante ressaltar que, por causa de 20.134,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)}{c}$$

o campo magnético é perpendicular ao campo elétrico e também ao vetor $\vec{R}(t_r)$ calculado no tempo retardado. De posse das expressões para os campos elétrico e magnético, a força de Lorentz agindo sobre uma carga de prova q causada pela carga pontual Q em movimento é dada por 15.25,

$$\vec{F}_q = q\vec{\mathcal{E}} + q\vec{v}_q \times \vec{B}$$

onde $\vec{v}_q$ é a velocidade da carga q . Substituindo as expressões para os campos, temos

$$\begin{aligned} \vec{F}_q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} & \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} \\ & + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{v}_q \times \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{F}_q(t) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} & \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right. \\ & \left. + \vec{\beta}_q \times \left[\frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right] \right\} \quad (20.137) \end{aligned}$$

que é a força de Lorentz produzida por Q sobre a carga de prova q , na situação geral em que ambas estão em movimento. Nessa expressão, apenas $\vec{\beta}_q = \frac{\vec{v}_q}{c}$ é calculada no tempo atual t . As outras grandezas, a saber, $\vec{R}$, R , $\vec{\beta}$ e $\vec{\alpha}$, são todas calculadas em t_r . Note que não há em todas essas expressões nenhuma restrição a respeito das velocidades das partículas, ou seja, elas são corretas do ponto de vista relativístico. Além disso, como existe a questão do intervalo de tempo em que as informações são emitidas por uma das cargas e o recebimento dessas informações pela outra, a terceira lei de Newton não é

em geral respeitada na forma usual, pois a força de Lorentz produzida por Q sobre q não é, em geral, igual à produzida por q sobre Q , no mesmo instante de tempo. Isso indica uma violação do princípio de conservação de momento linear, e ficam as questões: qual a real importância do princípio de conservação de momento linear em Física? Será que ele pode ser violado? Será que ele pode ser descartado? Pense a respeito dessas perguntas, e compare suas respostas com as que são dadas no capítulo 21. Por ora, vamos retornar ao estudo dos campos gerados pela carga Q em movimento.

Na dedução que fizemos para a determinação dos campos retardados, utilizamos as equações de Jefimenko 20.96 e 20.100. No entanto, conforme dissemos no início da obtenção dos campos, poderíamos ter partido das relações 20.2,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

e 20.3,

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

juntamente com as expressões 20.106,

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

e 20.108,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}(t_r)}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou 20.109,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}(t_r)}{c^2} V(\vec{r}, t)$$

Como já temos os campos, e por uma questão de completeza, é interessante efetuar a dedução seguindo esse caminho. Vamos iniciar calculando ∇V , ou seja,

$$\nabla V(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[\frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right]$$

Note que o operador ∇ age sobre $\vec{r}$ e sobre $\vec{r}_Q(t_r)$, já que

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|}{c} = t - \frac{\vec{R}}{c}$$

Temos, então,

$$\nabla V(\vec{r}, t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \nabla [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]$$

ou

$$\nabla V(\vec{r}, t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} [\nabla R - \nabla(\vec{R} \cdot \vec{\beta})] \quad (20.138)$$

Da equação 20.102,

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)| = c(t - t_r)$$

temos

$$\nabla R = c \nabla(t - t_r) = -c \nabla t_r \quad (20.139)$$

Por outro lado, achamos também

$$\nabla R = \nabla \left[\sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}} \nabla(\vec{R} \cdot \vec{R}) \quad (20.140)$$

Pela identidade 1.58h,

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

de modo que

$$\nabla(\vec{R} \cdot \vec{R}) = (\vec{R} \cdot \nabla) \vec{R} + \vec{R} \times (\nabla \times \vec{R}) + (\vec{R} \cdot \nabla) \vec{R} + \vec{R} \times (\nabla \times \vec{R})$$

ou

$$\nabla(\vec{R} \cdot \vec{R}) = 2(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{R} + 2\vec{R} \times (\nabla \times \vec{R}) \quad (20.141)$$

Primeiro, determinamos

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{R} = (\vec{R} \cdot \nabla) [\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)]$$

ou

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{R} = (\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r} - (\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r}_Q(t_r) \quad (20.142)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \vec{R} &= R_x \hat{\mathbf{i}} + R_y \hat{\mathbf{j}} + R_z \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r} &= x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r}_Q(t_r) &= x_Q(t_r) \hat{\mathbf{i}} + y_Q(t_r) \hat{\mathbf{j}} + z_Q(t_r) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

e lembrando que

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}$$

temos

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r} = \left\{ [R_x \hat{\mathbf{i}} + R_y \hat{\mathbf{j}} + R_z \hat{\mathbf{k}}] \cdot \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} [x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}]$$

ou

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r} = \left[R_x \frac{\partial}{\partial x} + R_y \frac{\partial}{\partial y} + R_z \frac{\partial}{\partial z} \right] [x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}]$$

ou ainda,

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r} = R_x \hat{\mathbf{i}} + R_y \hat{\mathbf{j}} + R_z \hat{\mathbf{k}}$$

de modo que

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r} = \vec{R} \quad (20.143)$$

Além disso, temos também

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r}_Q(t_r) = \left\{ [R_x \hat{\mathbf{i}} + R_y \hat{\mathbf{j}} + R_z \hat{\mathbf{k}}] \cdot \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} \vec{r}_Q(t_r)$$

ou

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r}_Q(t_r) = \left[R_x \frac{\partial}{\partial x} + R_y \frac{\partial}{\partial y} + R_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \vec{r}_Q(t_r)$$

ou ainda,

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r}_Q(t_r) = R_x \frac{d\vec{r}_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y \frac{d\vec{r}_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z \frac{d\vec{r}_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z}$$

ou

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r}_Q(t_r) = R_x \vec{v}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y \vec{v}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z \vec{v}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial z}$$

que pode ser reescrito como

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{r}_Q(t_r) = \vec{v}(\vec{R} \cdot \nabla t_r) \quad (20.144)$$

Reunindo 20.143 e 20.144 em 20.142, achamos

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{R} = \vec{R} - \vec{v}(\vec{R} \cdot \nabla t_r) \quad (20.145)$$

Temos que calcular agora

$$\nabla \times \vec{R} = \nabla \times [\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)] = \overbrace{\nabla \times \vec{r}}^0 - \nabla \times \vec{r}_Q(t_r) = -\nabla \times \vec{r}_Q(t_r) \quad (20.146)$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{r}_Q(t_r) &= \left(\frac{\partial z_Q(t_r)}{\partial y} - \frac{\partial y_Q(t_r)}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &\quad + \left(\frac{\partial x_Q(t_r)}{\partial z} - \frac{\partial z_Q(t_r)}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial y_Q(t_r)}{\partial x} - \frac{\partial x_Q(t_r)}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{r}_Q(t_r) &= \left(\frac{dz_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dy_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &\quad + \left(\frac{dx_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dz_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + \left(\frac{dy_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dx_Q(t_r)}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{r}_Q(t_r) = & \left(v_z \frac{\partial t_r}{\partial y} - v_y \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{i} \\ & + \left(v_x \frac{\partial t_r}{\partial z} - v_z \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(v_y \frac{\partial t_r}{\partial x} - v_x \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{k}\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como (veja o exercício 20.7)

$$\nabla \times \vec{r}_Q(t_r) = -\vec{v} \times \nabla t_r \quad (20.147)$$

Voltando agora para 20.146, obtemos

$$\nabla \times \vec{R} = \vec{v} \times \nabla t_r \quad (20.148)$$

Utilizando 20.145 e 20.148 em 20.141, ficamos com

$$\nabla(\vec{R} \cdot \vec{R}) = 2[\vec{R} - \vec{v}(\vec{R} \cdot \nabla t_r)] + 2\vec{R} \times (\vec{v} \times \nabla t_r)$$

e, por fim, retornando a 20.140, obtemos

$$\nabla R = \frac{\vec{R} - \vec{v}(\vec{R} \cdot \nabla t_r) + \vec{R} \times (\vec{v} \times \nabla t_r)}{R}$$

Pela propriedade 1.19a do produto triplo vetorial, temos

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

de modo que

$$\vec{R} \times (\vec{v} \times \nabla t_r) = (\vec{R} \cdot \nabla t_r)\vec{v} - (\vec{R} \cdot \vec{v})\nabla t_r$$

e então,

$$\nabla R = \frac{\vec{R} - \vec{v}(\vec{R} \cdot \nabla t_r) + (\vec{R} \cdot \nabla t_r)\vec{v} - (\vec{R} \cdot \vec{v})\nabla t_r}{R}$$

ou

$$\nabla R = \frac{\vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{v})\nabla t_r}{R}$$

Utilizando agora a equação 20.139, obtemos

$$\frac{\vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{v}) \nabla t_r}{R} = c \nabla t_r$$

ou

$$\hat{R} - (\hat{R} \cdot \vec{v}) \nabla t_r = -c \nabla t_r$$

ou ainda,

$$\hat{R} = (-c + \hat{R} \cdot \vec{v}) \nabla t_r$$

e então,

$$\nabla t_r = -\frac{\hat{R}}{c - \hat{R} \cdot \vec{v}}$$

ou

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.149)$$

de modo que a equação 20.139 fica

$$\nabla R = -c \frac{-1}{c} \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou

$$\nabla R = \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.150)$$

Precisamos agora calcular $\nabla(\vec{R} \cdot \vec{\beta})$, que fica, utilizando a identidade 1.58h,

$$\nabla(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) = (\vec{R} \cdot \nabla) \vec{\beta} + \vec{R} \times (\nabla \times \vec{\beta}) + (\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{R} + \vec{\beta} \times (\nabla \times \vec{R}) \quad (20.151)$$

O primeiro fator, $(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{\beta}$, é obtido mediante o mesmo processo realizado para se obter a equação 20.144, e assim achamos

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{\beta} = \vec{\alpha}(\vec{R} \cdot \nabla t_r)$$

ou, utilizando 20.149,

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{\beta} = \vec{\alpha} \left(\vec{R} \cdot \frac{-1}{c} \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right)$$

ou ainda,

$$(\vec{R} \cdot \nabla) \vec{\beta} = - \frac{R^2 \frac{\vec{\alpha}}{c}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.152)$$

O termo $\nabla \times \vec{\beta}$ pode ser calculado seguindo-se os passos realizados para a determinação da expressão 20.147, de modo que achamos

$$\nabla \times \vec{\beta} = -\vec{\alpha} \times \nabla t_r$$

ou

$$\nabla \times \vec{\beta} = -\vec{\alpha} \times \frac{-1}{c} \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{\beta} = \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.153)$$

de modo que o fator $\vec{R} \times (\nabla \times \vec{\beta})$ fica

$$\vec{R} \times (\nabla \times \vec{\beta}) = \frac{\vec{R} \times (\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R})}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

e, utilizando a propriedade 1.19a, achamos

$$\vec{R} \times \left(\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R} \right) = (\vec{R} \cdot \vec{R}) \frac{\vec{\alpha}}{c} - \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c} \right) \vec{R}$$

ou

$$\vec{R} \times \left(\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R} \right) = R^2 \frac{\vec{\alpha}}{c} - \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c} \right) \vec{R}$$

e assim,

$$\vec{R} \times (\nabla \times \vec{\beta}) = \frac{R^2 \frac{\vec{\alpha}}{c} - (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c}) \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.154)$$

O terceiro termo, $(\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{R}$, emprega a dedução da expressão 20.145, e fica

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{R} = \vec{\beta} - \vec{v}(\vec{\beta} \cdot \nabla t_r)$$

ou

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{R} = \vec{\beta} - \vec{v} \left(\vec{\beta} \cdot \frac{-1}{c} \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right)$$

ou ainda,

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{R} = \vec{\beta} + \frac{\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{R})}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou então,

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{R} = \frac{\vec{\beta}[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] + \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{R})}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

que resulta em

$$(\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{R} = \frac{R \vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.155)$$

Por fim, por 20.148, temos

$$\nabla \times \vec{R} = \vec{v} \times \nabla t_r$$

ou

$$\nabla \times \vec{R} = \vec{v} \times \left[\frac{-1}{c} \frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right]$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{R} = - \frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

de modo que

$$\vec{\beta} \times (\nabla \times \vec{R}) = -\frac{\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{R})}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

Utilizando novamente 1.19a, ficamos com

$$\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{R}) = (\vec{\beta} \cdot \vec{R})\vec{\beta} - (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})\vec{R}$$

ou

$$\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{R}) = (\vec{\beta} \cdot \vec{R})\vec{\beta} - \beta^2 \vec{R}$$

e então,

$$\vec{\beta} \times (\nabla \times \vec{R}) = -\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{R})\vec{\beta} - \beta^2 \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou

$$\vec{\beta} \times (\nabla \times \vec{R}) = \frac{\beta^2 \vec{R} - (\vec{\beta} \cdot \vec{R})\vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.156)$$

Voltamos agora à equação 20.151, utilizando as expressões 20.152, 20.154, 20.155 e 20.156, e assim achamos

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) = & \\ & -\frac{R^2 \frac{\vec{\alpha}}{c}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} + \frac{R^2 \frac{\vec{\alpha}}{c} - (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} + \frac{R\vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} + \frac{\beta^2 \vec{R} - (\vec{\beta} \cdot \vec{R})\vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \end{aligned}$$

ou

$$\nabla(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) = \frac{R\vec{\beta} - (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})\vec{R} + \beta^2 \vec{R} - (\vec{\beta} \cdot \vec{R})\vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \quad (20.157)$$

Voltando agora a 20.138 e aplicando 20.150 e 20.157, achamos

$$\begin{aligned} \nabla \mathbb{V}(\vec{r}, t) = & -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \\ & \times \left[\frac{\vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} - \frac{R\vec{\beta} - (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})\vec{R} + \beta^2 \vec{R} - (\vec{\beta} \cdot \vec{R})\vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\nabla V(\vec{r}, t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \times \left[\vec{R} - R\vec{\beta} + \left(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c}\right)\vec{R} - \beta^2 \vec{R} + (\vec{\beta} \cdot \vec{R})\vec{\beta} \right]$$

ou ainda,

$$\nabla V(\vec{r}, t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2)\vec{R} + (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})\vec{R} + [(\vec{\beta} \cdot \vec{R}) - R]\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \quad (20.158)$$

Precisamos agora determinar a derivada temporal de $\vec{A}$ dado por 20.108,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}(t_r)}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{\beta}(t_r)}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right]$$

ou

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} - \frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \frac{\partial}{\partial t} [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] \right\}$$

Utilizando as equações 20.129 e 20.130, achamos

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \frac{\vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} - \frac{\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{v} - \vec{R} \cdot \vec{\alpha}}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right\}$$

ou

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \frac{R\vec{\alpha}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} - \frac{R\vec{\beta}}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2} \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{v} - \vec{R} \cdot \vec{\alpha}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right\}$$

e então,

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c Q}{4\pi} \left\{ \frac{R\vec{\alpha}}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2} - \frac{R\vec{\beta}(\vec{v} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{v} - \vec{R} \cdot \vec{\alpha})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right\}$$

Como $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, podemos escrever $\mu_0 c = \frac{1}{c \epsilon_0}$. Além disso, temos também

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ \frac{R \vec{\alpha} (R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} - \frac{c R \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \hat{R} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right\}$$

ou

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{R \frac{\vec{\alpha}}{c} (R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} - \frac{R \vec{\beta} (\beta^2 - \hat{R} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right\}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{R^2 \frac{\vec{\alpha}}{c} - R(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) \frac{\vec{\alpha}}{c} - R \vec{\beta} \beta^2 + R \vec{\beta} (\hat{R} \cdot \vec{\beta}) + R \vec{\beta} (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \quad (20.159)$$

Podemos agora calcular o campo elétrico por meio da equação 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \mathcal{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

empregando as equações 20.158 e 20.159, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = & \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2) \vec{R} + (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c}) \vec{R} + [(\vec{\beta} \cdot \vec{R}) - R] \vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \\ & - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{R^2 \frac{\vec{\alpha}}{c} - R(\vec{R} \cdot \vec{\beta}) \frac{\vec{\alpha}}{c} - R \vec{\beta} \beta^2 + R \vec{\beta} (\hat{R} \cdot \vec{\beta}) + R \vec{\beta} (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = & \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2) \vec{R} + (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c}) \vec{R} + \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{R}) - R \vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right. \\ & \left. - \frac{\vec{R} \cdot (\vec{R} - R \vec{\beta}) \frac{\vec{\alpha}}{c} - R \vec{\beta} \beta^2 + R \vec{\beta} (\hat{R} \cdot \vec{\beta}) + R \vec{\beta} (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right\} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = & \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2) \vec{R} + R \vec{\beta} \beta^2 - R \vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right. \\ & \left. + \frac{(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c}) \vec{R} - R \vec{\beta} (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c}) - \vec{R} \cdot (\vec{R} - R \vec{\beta}) \frac{\vec{\alpha}}{c} + \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{R}) - \vec{\beta} (\vec{R} \cdot \vec{\beta})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right\} \end{aligned}$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)\vec{R} - R\vec{\beta}(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})(\vec{R} - R\vec{\beta}) - \vec{R} \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta})\frac{\vec{\alpha}}{c}}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right\}$$

Utilizando a equação 20.131, ficamos com

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}]}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \right\}$$

que é o campo elétrico de Liénard-Wiechert calculado em 20.132, como deveria ocorrer. Podemos agora determinar o campo magnético, através de 20.2,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

empregando, para o potencial vetor magnético, a equação 20.109,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}(t_r)}{c^2} \mathbb{V}(\vec{r}, t)$$

Temos, então,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \left[\frac{\vec{v}(t_r)}{c^2} \mathbb{V}(\vec{r}, t) \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c} \nabla \times (\vec{\beta} \mathbb{V})$$

Pela identidade 1.58f,

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi(\nabla \times \vec{A})$$

de modo que temos

$$\nabla \times (\vec{\beta} \mathbb{V}) = (\nabla \mathbb{V}) \times \vec{\beta} + \mathbb{V}(\nabla \times \vec{\beta})$$

e

$$\vec{B} = \frac{(\nabla \mathbb{V}) \times \vec{\beta} + \mathbb{V}(\nabla \times \vec{\beta})}{c}$$

Utilizando agora as equações 20.106, 20.153 e 20.158, achamos

$$\begin{aligned} \vec{B} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{(1 - \beta^2)\vec{R} + (\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})\vec{R} + [(\vec{\beta} \cdot \vec{R}) - R]\vec{\beta}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \times \vec{\beta} \\ + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\vec{R} \times \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})(\vec{R} \times \vec{\beta})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2} \right\}$$

onde nos valem os fatos de que $\vec{\beta} \times \vec{\beta} = 0$. A expressão acima pode ser escrita como

$$\vec{B} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{-(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} - \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2} \right\}$$

e então,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \left\{ \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{\alpha}}{c} \times \vec{R}}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2} \right\}$$

que corresponde à expressão 20.133 para o campo magnético de Liénard-Wiechert, como deveria ser. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação dos potenciais e campos de Liénard-Wiechert para cargas pontuais.

Exemplo 20.12. *Determine os potenciais de Liénard-Wiechert para uma partícula de carga Q em movimento retilíneo uniforme com velocidade $\vec{v}$ partindo da origem em $t = 0$.*

Os potenciais de Liénard-Wiechert são dados pelas expressões 20.106,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

e 20.109,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}(t_r)}{c^2} \mathbb{V}(\vec{r}, t)$$

Portanto, vamos precisar determinar a grandeza $R = \vec{R} \cdot \vec{\beta}$, sendo que

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)$$

A posição da partícula em movimento retilíneo uniforme é dada por

$$\vec{r}_Q(t) = \vec{v}t = ct\vec{\beta}$$

e o primeiro passo consiste em determinar o tempo retardado t_r , o que pode ser feito através de 20.102,

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)| = c(t - t_r)$$

que fica

$$|\vec{r} - c\vec{\beta}t_r| = c(t - t_r)$$

ou

$$\sqrt{(\vec{r} - c\vec{\beta}t_r) \cdot (\vec{r} - c\vec{\beta}t_r)} = c(t - t_r)$$

de modo que

$$(\vec{r} - c\vec{\beta}t_r) \cdot (\vec{r} - c\vec{\beta}t_r) = c^2(t - t_r)^2$$

ou ainda,

$$r^2 + c^2\beta^2t_r^2 - 2c\vec{r} \cdot \vec{\beta}t_r = c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2)$$

que fica

$$c^2\beta^2t_r^2 - c^2t_r^2 + 2tc^2t_r - 2c(\vec{r} \cdot \vec{\beta})t_r + r^2 - c^2t^2 = 0$$

ou

$$(c^2\beta^2 - c^2)t_r^2 + 2(c^2t - c\vec{r} \cdot \vec{\beta})t_r + r^2 - c^2t^2 = 0$$

ou ainda,

$$c^2(\beta^2 - 1)t_r^2 + 2c(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})t_r + r^2 - c^2t^2 = 0$$

Resolvendo para t_r , achamos

$$t_r = \frac{-2c(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta}) \pm \sqrt{4c^2(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 - 4c^2(\beta^2 - 1)(r^2 - c^2t^2)}}{2c^2(\beta^2 - 1)}$$

ou

$$t_r = \frac{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta}) \mp \sqrt{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2t^2)}}{c(1 - \beta^2)} \quad (20.160)$$

Para determinar o sinal correto, podemos considerar o limite em que v vai a zero, bem no início do movimento da partícula, e assim,

$$t_r = \frac{ct \mp \sqrt{(ct)^2 + (r^2 - c^2t^2)}}{c}$$

ou

$$t_r = \frac{ct \mp \sqrt{c^2t^2 + r^2 - c^2t^2}}{c}$$

ou ainda,

$$t_r = t \mp \frac{r}{c}$$

Quando a partícula inicia o movimento, ela está na origem, de modo que $\vec{r}_Q(0) = 0$ e assim $\vec{R} = \vec{r}$, de forma que o tempo retardado deve ser dado por

$$t_r = t - \frac{R}{c} = t - \frac{r}{c}$$

o que fixa o sinal negativo na equação 20.160, ou seja,

$$t_r = \frac{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta}) - \sqrt{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2t^2)}}{c(1 - \beta^2)} \quad (20.161)$$

Agora podemos determinar

$$R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = c(t - t_r) - (\vec{r} - ct_r \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta}$$

onde fizemos uso da relação 20.102. A equação acima pode ser reescrita como

$$R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = c(t - t_r) - \vec{r} \cdot \vec{\beta} + ct_r \beta^2$$

ou

$$R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta} - ct_r(1 - \beta^2)$$

Utilizando agora 20.161, ficamos com

$$R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta} - c(1 - \beta^2) \left[\frac{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta}) - \sqrt{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{c(1 - \beta^2)} \right]$$

ou

$$R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta} - (ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta}) + \sqrt{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2 t^2)}$$

ou ainda,

$$R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = \sqrt{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2 t^2)}$$

O potencial escalar 20.106 fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2 t^2)}} \quad (20.162)$$

e o potencial vetor magnético 20.109 torna-se

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{(ct - \vec{r} \cdot \vec{\beta})^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2 t^2)}} \quad (20.163)$$

que são os potenciais retardados para uma partícula de carga pontual Q em movimento retilíneo uniforme.

Exemplo 20.13. *Mostre que o potencial escalar 20.162 para uma partícula de carga Q movendo-se com velocidade constante pode ser reescrito como*

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t)\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}} \quad (20.164)$$

onde $\vec{R}(t) = \vec{r} - c\vec{\beta}t$ é calculado no tempo atual, não no tempo retardado, e θ é o ângulo entre $\vec{v} = c\vec{\beta}$ e $\vec{R}(t)$.

A figura 20.3 apresenta as grandezas relevantes para o nosso caso.

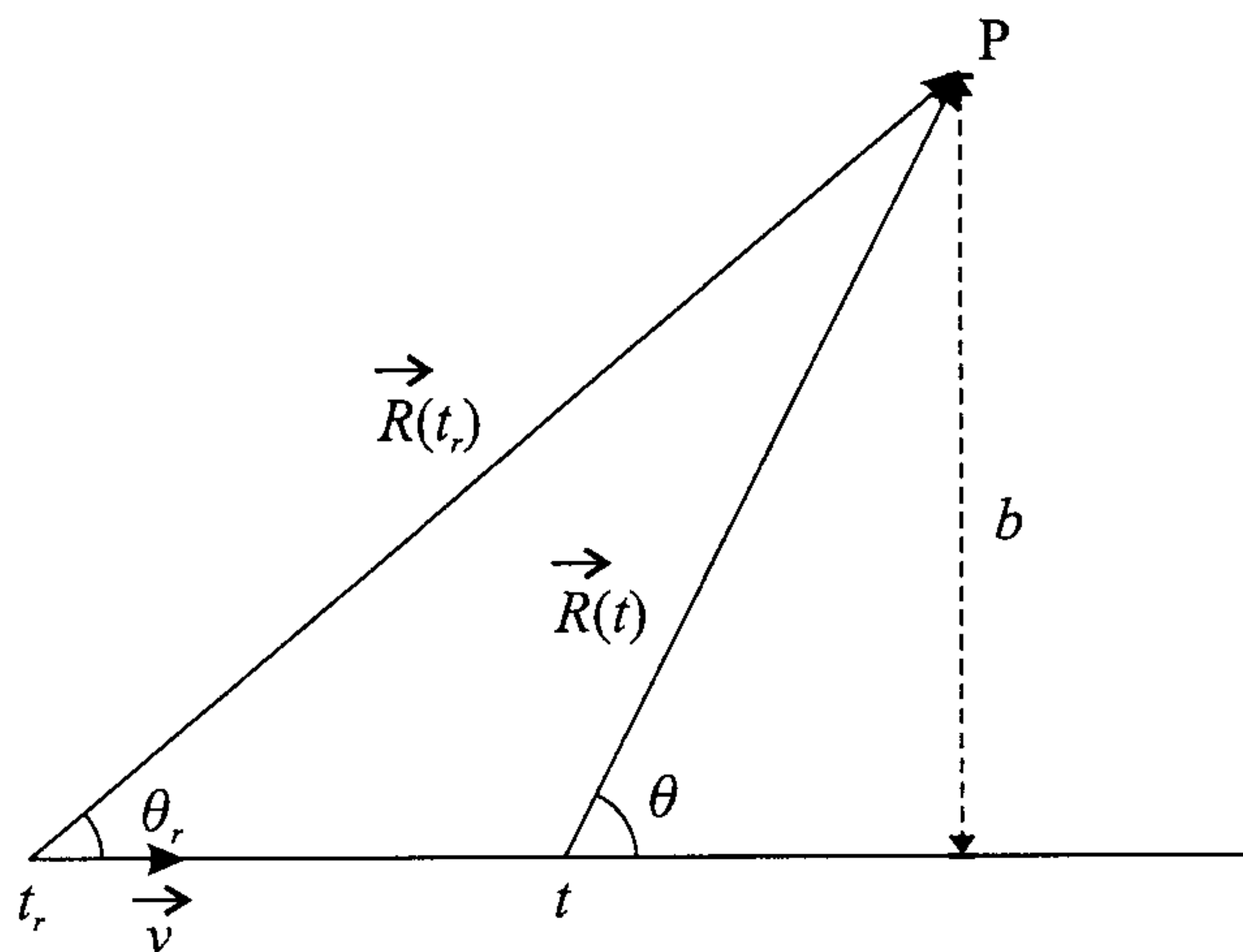


Figura 20.3: Vetores importantes para o cálculo da expressão 20.164.

Da figura, temos

$$\vec{R}(t_r) = \vec{R}(t) + (t - t_r)\vec{v} = \vec{R}(t) + c(t - t_r)\vec{\beta}$$

Pela equação 20.102,

$$R(t_r) = |\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)| = c(t - t_r)$$

obtemos

$$\vec{R}(t_r) = \vec{R}(t) + R(t_r)\vec{\beta} \quad (20.165)$$

ou

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t_r) - R(t_r)\vec{\beta} \quad (20.166)$$

O potencial escalar é dado por 20.106,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

onde as grandezas são calculadas em t_r . Portanto, precisamos determinar

$$R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta} = \sqrt{[R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2} \quad (20.167)$$

Assim, começamos com

$$[R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 = R^2(t_r) - 2R(t_r)[\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}] + [\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 \quad (20.168)$$

Em seguida, elevamos 20.166 ao quadrado, para determinar $\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}$, ou seja,

$$\vec{R}(t) \cdot \vec{R}(t) = [\vec{R}(t_r) - R(t_r)\vec{\beta}] \cdot [\vec{R}(t_r) - R(t_r)\vec{\beta}]$$

ou

$$R^2(t) = R^2(t_r) + R^2(t_r)\beta^2 - 2R(t_r)[\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]$$

ou ainda,

$$2R(t_r)[\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}] = (1 + \beta^2)R^2(t_r) - R^2(t)$$

a qual, substituída em 20.168, nos dá

$$[R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 = R^2(t_r) - (1 + \beta^2)R^2(t_r) + R^2(t) + [\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2$$

ou

$$[R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 = R^2(t) - \beta^2 R^2(t_r) + [\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 \quad (20.169)$$

Agora, dos triângulos da figura 20.3, temos

$$\text{sen } \theta_r = \frac{b}{R(t_r)} \Rightarrow b = R(t_r) \text{sen } \theta_r = R(t_r) \sqrt{1 - \cos^2 \theta_r}$$

e

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{R(t)} \quad \Rightarrow \quad b = R(t) \text{sen } \theta$$

de modo que

$$R(t_r) \sqrt{1 - \cos^2 \theta_r} = R(t) \text{sen } \theta$$

ou

$$R^2(t_r)(1 - \cos^2 \theta_r) = R^2(t) \text{sen}^2 \theta \quad (20.170)$$

Além disso, utilizando a definição 1.4 para o produto escalar, achamos

$$\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta} = R(t_r) \beta \cos \theta_r$$

ou

$$\cos \theta_r = \frac{\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}}{R(t_r) \beta}$$

o que faz com que 20.170 fique

$$R^2(t_r) \left[1 - \left(\frac{\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}}{R(t_r) \beta} \right)^2 \right] = R^2(t) \text{sen}^2 \theta$$

ou

$$R^2(t_r) - R^2(t_r) \frac{[\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2}{R^2(t_r) \beta^2} = R^2(t) \text{sen}^2 \theta$$

ou ainda,

$$\beta^2 R^2(t_r) - [\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 = R^2(t) \beta^2 \text{sen}^2 \theta$$

e então,

$$[\vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 = \beta^2 R^2(t_r) - R^2(t) \beta^2 \text{sen}^2 \theta$$

Substituindo essa expressão em 20.169, ficamos com

$$[R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 = R^2(t) - \beta^2 R^2(t_r) + \beta^2 R^2(t_r) - R^2(t) \beta^2 \text{sen}^2 \theta$$

ou

$$[R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta}]^2 = R^2(t)(1 - \beta^2 \sin^2 \theta) \quad (20.171)$$

de modo que 20.167 fica

$$R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta} = \sqrt{R^2(t)(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)}$$

ou

$$R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta} = R(t) \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \quad (20.172)$$

o que faz com que o potencial escalar 20.106 torne-se

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R(t) \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}}$$

que é a equação 20.164 que queríamos demonstrar.

Exemplo 20.14. *Determine os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ produzidos pela partícula de carga Q do exemplo 20.12.*

A partícula do exemplo 20.12 está em movimento retilíneo uniforme com velocidade $\vec{v} = c\vec{\beta}$ constante, de modo que ela não tem aceleração ($\vec{a} = c\vec{\alpha} = 0$), e sua posição é dada por $\vec{r}_Q(t) = c\vec{\beta}t$. Assim, o campo elétrico 20.132,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\}$$

torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3}$$

lembrando que todas as grandezas são calculadas no tempo retardado. Utilizando agora as equações 20.166,

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t_r) - R(t_r)\vec{\beta}$$

e 20.172,

$$R(t_r) - \vec{R}(t_r) \cdot \vec{\beta} = R(t) \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}$$

o campo elétrico pode ser escrito como

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}(t)(1 - \beta^2)}{R^3(t) [1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} \quad (20.173)$$

que é o campo elétrico de uma partícula de carga Q em movimento retilíneo uniforme. Note que ele depende de $\vec{R}(t)$ medido no tempo atual, não no tempo retardado. Assim, quando a partícula se move com velocidade constante, a informação emitida por ela no tempo retardado t_r “antecipa” qual será a sua posição no tempo t e o campo elétrico se ajusta de tal forma que ele se comporta como se fosse emitido pela carga na sua posição atual. Quando $\vec{v}$ é muito pequena em comparação com c , temos a situação não-relativística em que $\beta \ll 1$, e o campo elétrico torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} \quad (20.174)$$

que é o campo elétrico usual de uma carga pontual em repouso. Por outro lado, quando $\beta \rightarrow 1$, o campo elétrico dado por 20.173 perde a simetria esférica que ele apresenta no caso não-relativístico. Sua intensidade aumenta em comparação com o campo 20.174 nas direções perpendiculares à direção do movimento, em que $\theta = \frac{\pi}{2}$, por um fator

$$\frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ao passo que sua intensidade diminui na direção de $\vec{\beta}$ ($\theta = 0, \pi$) por um fator

$$\frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2(0, \pi)]^{\frac{3}{2}}} = 1 - \beta^2$$

como ilustra a figura 20.4 para uma partícula de carga Q positiva.

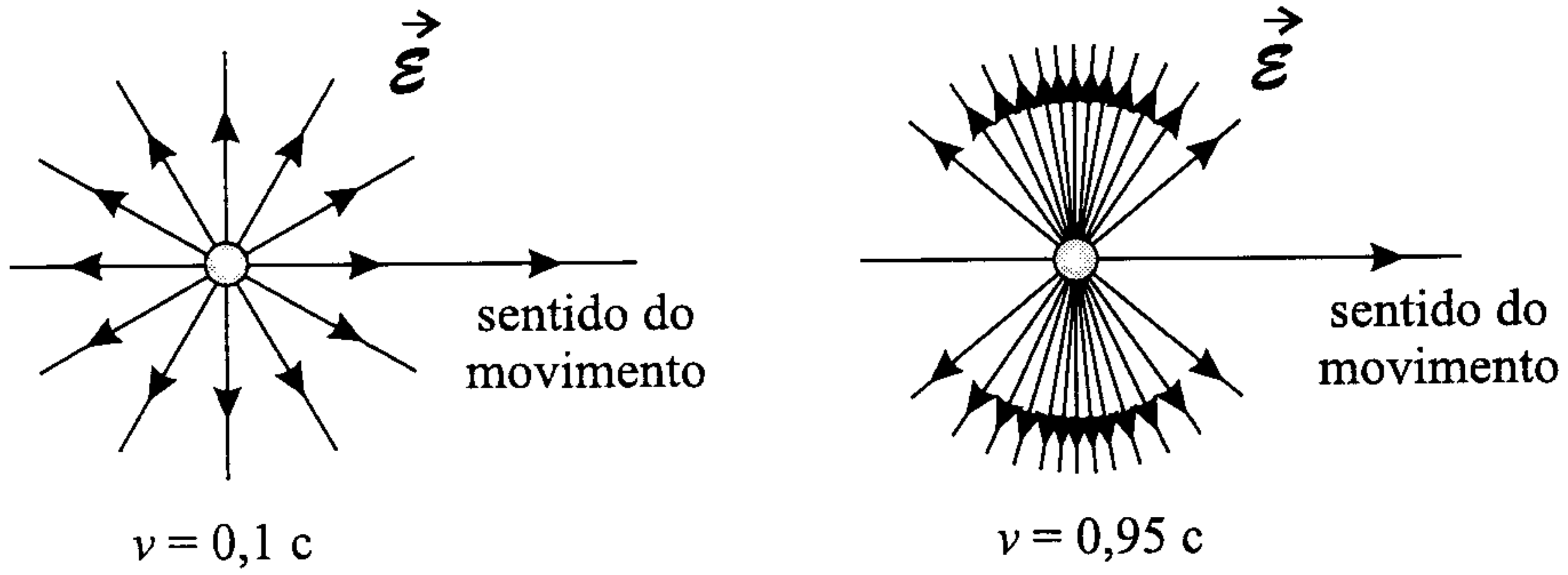


Figura 20.4: Campo elétrico de uma partícula com carga Q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ constante, sendo $v \ll c$ (esquerda) e $v \rightarrow c$ (direita).

O campo magnético pode ser determinado por meio de 20.134,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{E}(\vec{r}, t)}{c}$$

Nesta expressão, podemos escrever

$$\hat{R}(t_r) = \frac{\vec{R}(t_r)}{R(t_r)}$$

e, utilizando 20.165,

$$\vec{R}(t_r) = \vec{R}(t) + R(t_r)\vec{\beta}$$

ficamos com

$$\hat{R}(t_r) = \frac{\vec{R}(t) + R(t_r)\vec{\beta}}{R(t_r)} = \frac{\vec{R}(t)}{R(t_r)} + \vec{\beta}$$

e assim, fazendo uso da equação 20.173,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \left[\frac{\vec{R}(t)}{R(t_r)} + \vec{\beta} \right] \times \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} \right]$$

ou, como $\vec{R}(t) \times \vec{R}(t) = 0$,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{\beta} \times \vec{R}(t)}{R^3(t)} \quad (20.175)$$

As linhas de campo magnético circulam em torno da direção do movimento da partícula, e a mesma análise feita com relação à intensidade de $\vec{E}$ pode ser efetuada para $\vec{B}$. A figura 20.5 ilustra o campo magnético para uma partícula de carga Q positiva.

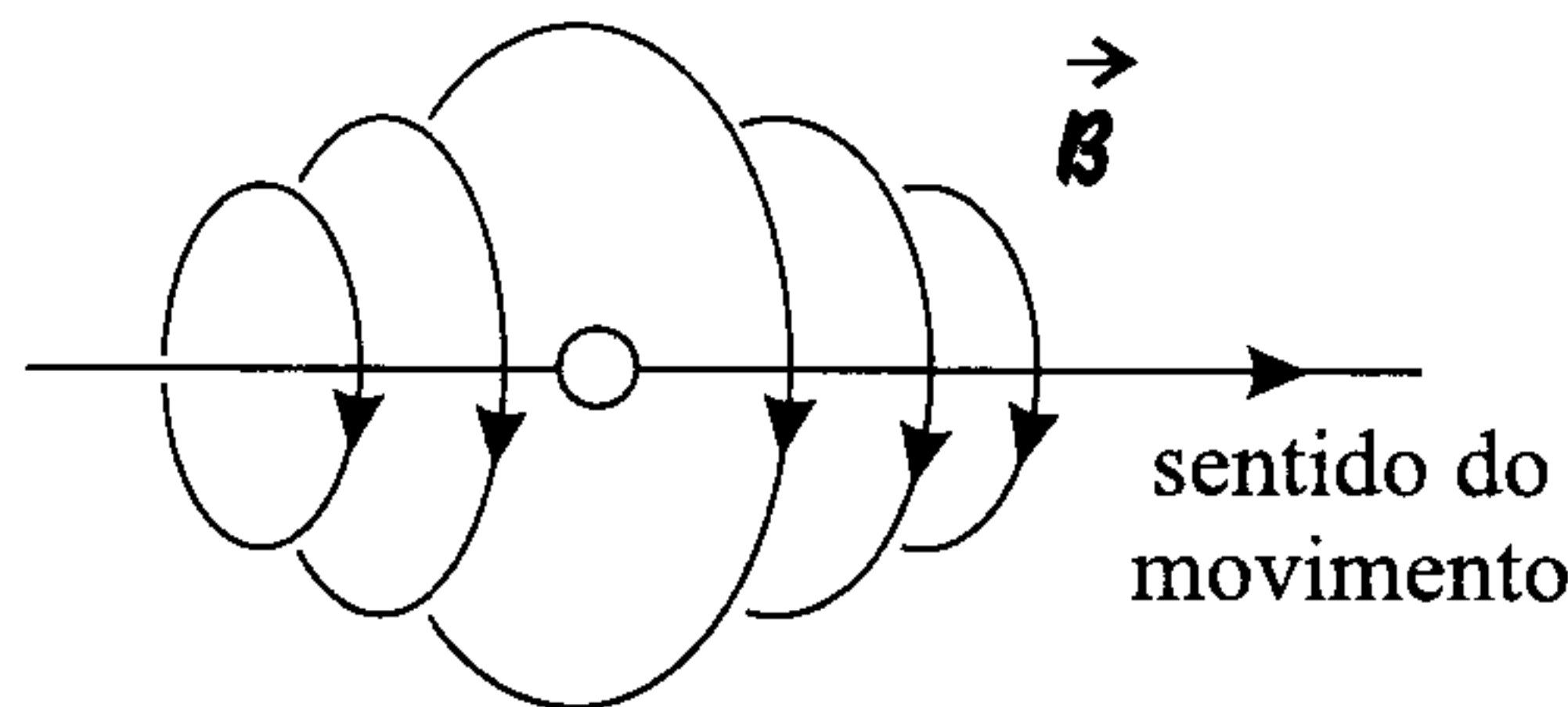


Figura 20.5: Campo magnético de uma partícula com carga Q movendo-se com velocidade $\vec{v}$ constante.

Utilizando os campos 20.173 e 20.175, podemos determinar a força de Lorentz produzida por uma carga Q em movimento retilíneo uniforme sobre uma carga de prova q com velocidade $\vec{v}_q$ arbitrária. Partimos de 15.25,

$$\vec{F}_q = q\vec{E} + q\vec{v}_q \times \vec{B}$$

que se torna

$$\vec{F}_q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} + q\vec{v}_q \times \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{\beta} \times \vec{R}(t)}{R^3(t)} \right]$$

ou

$$\vec{F}_q(t) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} + \frac{\vec{\beta}_q \times [\vec{\beta} \times \vec{R}(t)]}{R^3(t)} \right\} \quad (20.176)$$

sendo que, na expressão acima, todas as grandezas são calculadas no tempo atual t , e não no tempo retardado t_r . Note que o movimento da carga q , que sofre a ação da força de Lorentz acima, é arbitrário, ou seja, $\vec{v}_q = c\vec{\beta}_q$ não precisa ser constante. O resultado acima é explorado no próximo exercício.

Exemplo 20.15. Uma partícula de carga Q_1 está em repouso na origem enquanto uma partícula de carga Q_2 move-se ao longo do eixo z com uma velocidade constante $\vec{v}_{Q_2} = v \hat{\mathbf{k}}$. Sua equação de movimento é dada por $\vec{r}_{Q_2}(t) = vt \hat{\mathbf{k}}$.

a) Determine a força de Lorentz produzida por Q_1 sobre Q_2 , como função de t .

Como Q_1 está em repouso, sua velocidade é nula e constante, e a expressão 20.176 pode ser utilizada imediatamente. Nessa expressão, devemos fazer $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}_{Q_1}}{c} = 0$ e

$$\vec{R}(t) = \vec{r}_{Q_2}(t) - \vec{r}_{Q_1}(t) = vt \hat{\mathbf{k}}$$

de modo que achamos

$$\vec{\mathbb{F}}_{Q_2}(t) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{vt \hat{\mathbf{k}}}{v^3 t^3}$$

ou

$$\vec{\mathbb{F}}_{Q_2}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{v^2 t^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (20.177)$$

b) Determine a força produzida por Q_2 sobre Q_1 , como função de t .

Novamente aqui podemos utilizar a expressão 20.176, pois Q_2 está em movimento retilíneo uniforme. Nesse caso, porém, temos

$$\vec{R}(t) = \vec{r}_{Q_1}(t) - \vec{r}_{Q_2}(t) = -vt \hat{\mathbf{k}}$$

além de $\vec{\beta}_q = \vec{\beta}_{Q_1} = 0$. A força fica

$$\vec{\mathbb{F}}_{Q_1}(t) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \frac{-vt \hat{\mathbf{k}}}{v^3 t^3}$$

ou

$$\vec{\mathbb{F}}_{Q_1}(t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \frac{Q_1 Q_2}{v^2 t^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (20.178)$$

Comparando as expressões 20.177 e 20.178, vemos que

$$\vec{\mathbb{F}}_{Q_2}(t) \neq -\vec{\mathbb{F}}_{Q_1}(t)$$

o que indica que a terceira lei de Newton não é válida na forma usual nesse caso. Já havíamos comentado essa situação anteriormente, e voltaremos a discuti-la no capítulo 21.

20.8 Lagrangeana e Hamiltoniana de uma Partícula num Campo Eletromagnético

O movimento de uma partícula carregada sujeita a um campo eletromagnético pode ser descrito em termos da força de Lorentz 15.25,

$$\vec{\mathbb{F}} = Q\vec{\mathcal{E}} + Q\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}$$

Temos então um formalismo essencialmente newtoniano, e equações de movimento envolvendo forças. Podemos, também, introduzir os formalismos lagrangeano e hamiltoniano, que estão relacionados com as formas de energia presentes no sistema. Esses formalismos são mais indicados quando os campos são tratados do ponto de vista relativístico e quântico, e por isso vale a pena discuti-los neste momento. A questão central do formalismo lagrangeano é escrever uma função lagrangeana para o sistema dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_j, \dot{x}_j, t) = K - U \quad (20.179)$$

onde K indica as diversas formas de energia cinética presentes no sistema e U corresponde às energias potenciais, que podem ser funções das coordenadas generalizadas x_j , das velocidades generalizadas $\dot{x}_j$ e do tempo t . A força generalizada associada à coordenada generalizada x_j é relacionada à energia potencial U através de

$$F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \right) \quad (20.180)$$

onde $\dot{x}_j$ é a velocidade generalizada associada à coordenada x_j . No caso eletromagnético, a força de Lorentz é a força generalizada, e queremos obter a lagrangeana do sistema. Para tanto, vamos reescrever os campos em termos dos potenciais, por meio de 20.2,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

e 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathcal{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

de modo que ficamos com

$$\vec{F} = Q \left[-\nabla\mathcal{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] + Q\vec{v} \times [\nabla \times \vec{A}]$$

Vamos calcular agora o fator

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} \right] \hat{i} + \left[\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} \right] \hat{j} + \left[\frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} \right] \hat{k}$$

e também

$$\begin{aligned} \vec{v} \times [\nabla \times \vec{A}] &= (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \\ &\times \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} \right] \hat{i} + \left[\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} \right] \hat{j} + \left[\frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} \right] \hat{k} \right\} \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \vec{v} \times [\nabla \times \vec{A}] &= v_x \left[\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} \right] \hat{k} - v_x \left[\frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} \right] \hat{j} \\ &\quad - v_y \left[\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} \right] \hat{k} + v_y \left[\frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} \right] \hat{i} \\ &\quad + v_z \left[\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} \right] \hat{j} - v_z \left[\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} \right] \hat{i} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{v} \times [\nabla \times \vec{\mathcal{A}}] = & \left\{ v_y \left[\frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} \right] - v_z \left[\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} \right] \right\} \hat{i} \\ & + \left\{ v_z \left[\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} \right] - v_x \left[\frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} \right] \right\} \hat{j} \\ & + \left\{ v_x \left[\frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} \right] - v_y \left[\frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} \right] \right\} \hat{k}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{v} \times [\nabla \times \vec{\mathcal{A}}] = & \left[v_y \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} + v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} \right] \hat{i} \\ & \left[v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - v_z \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} - v_x \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial x} + v_x \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial y} \right] \hat{j} \\ & + \left[v_x \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} - v_x \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} + v_y \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} \right] \hat{k}\end{aligned}$$

Vamos considerar a componente z da grandeza acima, que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\left\{ \vec{v} \times [\nabla \times \vec{\mathcal{A}}] \right\}_z = \\ v_x \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z} - v_x \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} - v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z} \quad (20.181)\end{aligned}$$

sendo que somamos e subtraímos o fator $v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z}$. A derivada temporal total de $\mathcal{A}_z$ é

$$\frac{d\mathcal{A}_z}{dt} = \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

ou

$$\frac{d\mathcal{A}_z}{dt} = \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z}$$

de modo que

$$v_x \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z} = \frac{d\mathcal{A}_z}{dt} - \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t} \quad (20.182)$$

Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial z}(\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{A}}) = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial z} + \vec{\mathcal{A}} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

Como no formalismo lagrangeano a velocidade generalizada $\vec{v}$ é independente das coordenadas generalizadas x_j , a equação acima simplifica-se para

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{A}}) = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial x} = v_x \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial z} \quad (20.183)$$

Substituindo as expressões 20.182 e 20.183 em 20.181, obtemos

$$\left\{ \vec{v} \times [\nabla \times \vec{\mathcal{A}}] \right\}_z = \frac{\partial}{\partial z}(\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{A}}) - \frac{d\mathcal{A}_z}{dt} + \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t}$$

A componente z da força de Lorentz fica sendo, então,

$$\mathbb{F}_z = -Q \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial z} - Q \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t} + Q \left\{ \vec{v} \times [\nabla \times \vec{\mathcal{A}}] \right\}_z$$

ou

$$\mathbb{F}_z = -Q \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial z} - Q \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial z}(\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{A}}) - Q \frac{d\mathcal{A}_z}{dt} + Q \frac{\partial \mathcal{A}_z}{\partial t}$$

ou ainda,

$$\mathbb{F}_z = -\frac{\partial}{\partial z} [Q\mathbb{V} - Q\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{A}}] - Q \frac{d\mathcal{A}_z}{dt}$$

Agora, vamos considerar o fator

$$\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v} = \mathcal{A}_x v_x + \mathcal{A}_y v_y + \mathcal{A}_z v_z$$

e tomar sua derivada com relação a v_z , ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial v_z} [\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v}] = \frac{\partial}{\partial v_z} [\mathcal{A}_x v_x + \mathcal{A}_y v_y + \mathcal{A}_z v_z]$$

O potencial vetor magnético não depende das velocidades. Além disso, cada componente da velocidade é independente das outras, de modo que achamos

$$\frac{\partial}{\partial v_z} [\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v}] = \mathcal{A}_z \frac{\partial v_z}{\partial v_z} = \mathcal{A}_z$$

Derivando agora essa expressão com relação ao tempo, ficamos com

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_z} [\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v}] \right\} = \frac{d\mathcal{A}_z}{dt}$$

Portanto, a força de Lorentz pode ser escrita como

$$\mathbb{F}_z = -\frac{\partial}{\partial z} [Q\mathbb{V} - Q\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{A}}] - Q \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_z} [\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v}] \right\}$$

Por fim, como $\mathbb{V}$ independe das velocidades, podemos escrever também

$$\mathbb{F}_z = -\frac{\partial}{\partial z} [Q\mathbb{V} - Q\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{A}}] + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_z} [Q\mathbb{V} - Q\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v}] \right\}$$

Comparando esta expressão com a equação 20.180,

$$F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \right)$$

vemos que o potencial U pode ser escrito como

$$U = Q\mathbb{V} - Q\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v} \quad (20.184)$$

e assim, a lagrangeana 20.179 para uma partícula carregada de massa m num campo eletromagnético torna-se

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} - Q\mathbb{V} + Q\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v} \quad (20.185)$$

No formalismo lagrangeano, o momento conjugado a uma coordenada generalizada x_j é dado por

$$\Pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \quad (20.186)$$

Assim, da lagrangeana 20.185 acima podemos extrair o momento generalizado conjugado à coordenada x_j , utilizando a equação 20.186, ou seja,

$$\Pi_j = \frac{\partial}{\partial v_j} \left[\frac{mv^2}{2} - Q\mathbb{V} + Q\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{v} \right]$$

o que resulta em

$$\Pi_j = mv_j + Q\mathcal{A}_j$$

Como o momento linear (clássico) mecânico da partícula é dado por $p_j = mv_j$, vemos que, na presença de um campo eletromagnético, o momento total da partícula é a soma do momento clássico e um fator associado ao campo eletromagnético. Vetorialmente, temos

$$\vec{\Pi} = \vec{p} + Q\vec{\mathcal{A}} \quad (20.187)$$

A função lagrangeana 20.179 é útil no formalismo lagrangeano, e a partir dela as equações de movimento podem ser deduzidas. Entretanto, em Mecânica Estatística e Mecânica Quântica, ela não é tão utilizada quanto a função hamiltoniana e o formalismo hamiltoniano. A função hamiltoniana de um sistema pode ser derivada da lagrangeana através de

$$H(x_j, \Pi_j, t) = \sum_j \Pi_j \dot{x}_j - \mathcal{L}(x_j, \dot{x}_j, t) \quad (20.188)$$

sendo que a hamiltoniana é função das coordenadas generalizadas x_j , dos *momentos generalizados* Π_j e do tempo. Assim, é preciso transformar a lagrangeana para variáveis apropriadas para obter a hamiltoniana. Essencialmente, as velocidades generalizadas da lagrangeana devem ser substituídas por funções das coordenadas e momentos generalizados. Lembrando que o momento generalizado para uma partícula carregada num campo eletromagnético é dado por 20.187, podemos extrair dessa expressão a velocidade como sendo

$$\vec{\Pi} = m\vec{v} + Q\vec{\mathcal{A}}$$

ou

$$m\vec{v} = \vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}}$$

e então,

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}}}{m}$$

Retornando agora à hamiltoniana 20.188 e utilizando a lagrangeana 20.185, ficamos com

$$H(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) = \Pi \cdot \left[\frac{\vec{\Pi} - Q\vec{A}}{m} \right] - \frac{m}{2} \left[\frac{\vec{\Pi} - Q\vec{A}}{m} \right]^2 + QV - Q\vec{A} \cdot \left[\frac{\vec{\Pi} - Q\vec{A}}{m} \right]$$

ou

$$H(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) = \frac{\Pi^2 - Q\vec{\Pi} \cdot \vec{A}}{m} - \frac{1}{2m} [\Pi^2 - 2Q\vec{\Pi} \cdot \vec{A} + Q^2 A^2] + QV - \frac{Q\vec{A} \cdot \vec{\Pi} - Q^2 A^2}{m}$$

ou ainda,

$$H(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) = \frac{1}{2m} [\Pi^2 - 2Q\vec{\Pi} \cdot \vec{A} + Q^2 A^2] + QV$$

que pode ser reescrita como

$$H(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) = \frac{[\vec{\Pi} - Q\vec{A}]^2}{2m} + QV \quad (20.189)$$

que é a hamiltoniana (clássica) de uma partícula carregada sujeita a um campo eletromagnético. Quando passamos para uma formulação quântica V e $\vec{A}$, que são funções de $\vec{r}$, devem ser entendidos como sendo funções do *operador* de posição $\vec{r}$, o qual não comuta com o operador de momento conjugado $\vec{\Pi}$ ⁷. Portanto, $\vec{\Pi}$ e as funções de $\vec{r}$, e em particular, $V(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$, não comutam, o que indica que é preciso ter cuidado ao utilizar a expressão 20.189 quando estamos trabalhando com um problema quântico. A forma mais correta de escrever 20.189, preservando a hermiticidade do operador hamiltoniano, é

$$H(\vec{r}, \vec{\Pi}, t) = \frac{\Pi^2 - Q\vec{\Pi} \cdot \vec{A} - Q\vec{A} \cdot \vec{\Pi} + Q^2 A^2}{2m} + QV \quad (20.190)$$

Outro modo de escrever o operador hamiltoniano consiste em utilizar o momento mecânico $\vec{p}$ definido por 20.187,

$$\vec{p} = \vec{\Pi} - Q\vec{A} \quad (20.191)$$

⁷ Lembrando que o comutador da componente Π_i do momento conjugado com a coordenada x_j é dado por

$$[\Pi_i, x_j] = \Pi_i x_j - x_j \Pi_i = -i\hbar \delta_{ij}$$

ou seja,

$$H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{p^2}{2m} + Q\mathbb{V} \quad (20.192)$$

É preciso ter cuidado, no entanto, ao utilizar a hamiltoniana nessa forma, pois as componentes do momento generalizado $\vec{\Pi}$ conjugado às coordenadas $\vec{r}$ comutam entre si, isto é,

$$[\Pi_i, \Pi_j] = 0 \quad (20.193)$$

o que não é verdade quando consideramos as componentes do momento linear mecânico $\vec{p}$. Vejamos explicitamente o comutador de $[p_i, p_j]$.

$$\begin{aligned} [p_i, p_j] &= p_i p_j - p_j p_i \\ [p_i, p_j] &= (\Pi_i - Q\mathcal{A}_i)(\Pi_j - Q\mathcal{A}_j) - (\Pi_j - Q\mathcal{A}_j)(\Pi_i - Q\mathcal{A}_i) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [p_i, p_j] &= \Pi_i \Pi_j - Q\Pi_i \mathcal{A}_j - Q\mathcal{A}_i \Pi_j + Q^2 \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \\ &\quad - \Pi_j \Pi_i + Q\Pi_j \mathcal{A}_i + Q\mathcal{A}_j \Pi_i - Q^2 \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} [p_i, p_j] &= \Pi_i \Pi_j - \Pi_j \Pi_i + Q\mathcal{A}_j \Pi_i - Q\Pi_i \mathcal{A}_j \\ &\quad + Q\Pi_j \mathcal{A}_i - Q\mathcal{A}_i \Pi_j + Q^2 \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j - Q^2 \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i \end{aligned}$$

que pode ser reescrito em termos de comutadores como

$$[p_i, p_j] = [\Pi_i, \Pi_j] - Q[\Pi_i, \mathcal{A}_j] + Q[\Pi_j, \mathcal{A}_i] + Q^2[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j]$$

Pela relação 20.193, o primeiro termo do lado direito é nulo. Além disso, $\vec{\mathcal{A}}$ é função do operador de posição $\vec{r}$, e suas componentes comutam entre si, ou seja,

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = 0$$

de modo que resta

$$[p_i, p_j] = -Q[\Pi_i, \mathcal{A}_j] + Q[\Pi_j, \mathcal{A}_i]$$

Para obter esses comutadores, utilizamos a relação

$$[\Pi_i, G(\vec{r})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (20.194)$$

e temos então

$$[p_i, p_j] = -Q \left[-i\hbar \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x_i} \right] + Q \left[-i\hbar \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_j} \right]$$

ou

$$[p_i, p_j] = i\hbar Q \left[\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x_j} \right]$$

Agora, devemos lembrar que $\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$, o que faz com que o colchetes acima torne-se a componente $\mathcal{B}_k$ do campo magnético quando $i \neq j$. Isso pode ser expresso mediante a utilização do tensor de Levi-Civita 15.51,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \text{ ou } i = j = k \\ +1, & i = 1, j = 2, k = 3 \text{ ou qualquer permutação par} \\ -1, & \text{qualquer outro caso} \end{cases}$$

de modo que ficamos com

$$[p_i, p_j] = i\hbar Q \mathcal{B}_k \varepsilon_{ijk} \quad (20.195)$$

Essa relação de comutação pode ser utilizada para obter a forma quântica da força de Lorentz, considerando que no formalismo de Heisenberg para a Mecânica Quântica a evolução temporal de um operador é dada por

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{A}, H] \quad (20.196)$$

onde H é o operador hamiltoniano. Assim, a força de Lorentz pode ser obtida mediante

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{p}, H]$$

empregando-se as equações 20.192, e 20.194–20.196. A força de Lorentz quântica fica

$$\vec{\mathbb{F}} = Q\vec{\mathcal{E}} + Q\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{B}} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right] \quad (20.197)$$

e a demonstração será deixada como exercício para o leitor (veja o exercício 20.9).

O fato de a hamiltoniana de uma partícula carregada (expressões 20.189, 20.190 ou 20.192) depender de $\mathbb{V}$ e $\vec{\mathcal{A}}$ faz com que surja a questão de como se comportam as grandezas mensuráveis quando uma transformação de calibre é feita nesses potenciais. Da discussão já feita na seção 20.1, quando os potenciais são submetidos a uma transformação de calibre dada por 20.8,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}' &= \vec{\mathcal{A}} + \nabla\Lambda \\ \mathbb{V}' &= \mathbb{V} - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ mantêm-se invariantes. A alteração no calibre também deve manter invariantes grandezas mecânicas como o momento linear mecânico $\vec{p}$. Por outro lado, o momento generalizado $\vec{\Pi}$, que envolve o potencial vetor magnético, não é invariante frente a uma transformação de calibre. Isso ocorre tanto do ponto de vista clássico como quântico, caso em que os valores esperados das grandezas mecânicas devem se manter iguais. Um caso de particular importância ocorre quando Λ independe de t , de modo que apenas $\vec{\mathcal{A}}$ é transformado, de acordo com 20.8a, em

$$\vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + \nabla\Lambda \quad (20.198)$$

Nesse caso, considerando que o sistema seja descrito quanticamente pelo ket $|S\rangle$ quando o potencial vetor vale $\vec{\mathcal{A}}$, ao sofrer uma transformação de calibre dada pela expressão acima, o sistema passa a ser descrito pelo ket $|S'\rangle$, correspondente ao potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}'$. Lembrando que o valor esperado de um operador O é dado por

$$\langle O \rangle = \langle S|O|S \rangle$$

notamos que as funções do operador $\vec{r}$ devem manter seu valor esperado inalterado com esta mudança de calibre, de modo que deve ocorrer

$$\langle S|\vec{r}|S \rangle = \langle S'|\vec{r}|S' \rangle \quad (20.199)$$

Além disso, como o momento linear mecânico é dado por 20.191,

$$\vec{p} = \vec{\Pi} - Q\vec{A}$$

deve ocorrer

$$\langle S | (\vec{\Pi} - Q\vec{A}) | S \rangle = \langle S' | (\vec{\Pi} - Q\vec{A}') | S' \rangle \quad (20.200)$$

para que seu valor esperado seja independente do calibre utilizado. É importante manter, também, a normalização do ket de estado, de modo que

$$\langle S | S \rangle = \langle S' | S' \rangle \quad (20.201)$$

Para relacionar os kets $|S\rangle$ e $|S'\rangle$, podemos definir um operador O tal que

$$|S'\rangle = O|S\rangle \quad (20.202)$$

e, conseqüentemente,

$$\langle S' | = \langle S | O^\dagger \quad (20.203)$$

onde o operador $O^\dagger$ é o adjunto hermitiano do operador O . Utilizando essas expressões na equação 20.199, temos

$$\langle S | \vec{r} | S \rangle = \langle S | O^\dagger \vec{r} O | S \rangle$$

ou seja,

$$\vec{r} = O^\dagger \vec{r} O \quad (20.204)$$

Aplicando agora as equações 20.202 e 20.203 em 20.200, achamos

$$\langle S | (\vec{\Pi} - Q\vec{A}) | S \rangle = \langle S | O^\dagger (\vec{\Pi} - Q\vec{A}') O | S \rangle$$

ou, de acordo com 20.198,

$$\langle S | (\vec{\Pi} - Q\vec{A}) | S \rangle = \langle S | O^\dagger (\vec{\Pi} - Q\vec{A} - Q\nabla\Lambda) O | S \rangle$$

e assim,

$$\vec{\Pi} - Q\vec{A} = O^\dagger (\vec{\Pi} - Q\vec{A} - Q\nabla\Lambda) O \quad (20.205)$$

Se o operador O for tal que

$$O = \exp \left[\frac{iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right] \quad (20.206)$$

as equações 20.201, 20.204 e 20.205 são automaticamente satisfeitas, conforme podemos verificar explicitamente. Primeiro, temos que

$$O^\dagger = \exp \left[\frac{-iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right]$$

de modo que

$$O^\dagger O = \exp \left[\frac{-iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right] \exp \left[\frac{iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right] = 1$$

Assim, temos

$$\langle S'|S' \rangle = \langle S|O^\dagger O|S \rangle = \langle S|S \rangle$$

e 20.201 é satisfeita. Como qualquer função de $\vec{r}$ comuta com $\vec{r}$, 20.204 torna-se

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \exp \left[\frac{-iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right] \vec{r} \exp \left[\frac{iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right] \\ &= \exp \left[\frac{-iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right] \exp \left[\frac{iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right] \vec{r} \\ \vec{r} &= \vec{r} \end{aligned}$$

e 20.199 também é satisfeita. Por fim, para 20.205 temos

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} &= O^\dagger(\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} - Q\nabla\Lambda)O \\ &= O^\dagger\vec{\Pi}O - QO^\dagger\vec{\mathcal{A}}O - QO^\dagger\nabla\Lambda O \\ &= O^\dagger\vec{\Pi}O - QO^\dagger O\vec{\mathcal{A}} - QO^\dagger O\nabla\Lambda \\ \vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} &= O^\dagger\vec{\Pi}O - Q\vec{\mathcal{A}} - Q\nabla\Lambda \end{aligned} \quad (20.207)$$

e assim, devemos verificar que

$$\vec{\Pi} = O^\dagger\vec{\Pi}O - Q\nabla\Lambda \quad (20.208)$$

Para isso, lembrando que o comutador de $\vec{\Pi}$ com O é dado por

$$[\vec{\Pi}, O] = \vec{\Pi}O - O\vec{\Pi}$$

vamos calcular

$$O^\dagger \vec{\Pi} O = O^\dagger \{ [\vec{\Pi}, O] + O\vec{\Pi} \}$$

ou seja,

$$O^\dagger \vec{\Pi} O = O^\dagger [\vec{\Pi}, O] + \overbrace{O^\dagger O}^1 \vec{\Pi}$$

Agora, aplicamos 20.194, isto é,

$$[\vec{\Pi}, G(\vec{r})] = -i\hbar \nabla G$$

o que nos deixa com

$$O^\dagger \vec{\Pi} O = O^\dagger (-i\hbar \nabla O) + \vec{\Pi}$$

ou

$$O^\dagger \vec{\Pi} O = -i\hbar O^\dagger \nabla O + \vec{\Pi}$$

Utilizando 20.206, achamos

$$\nabla O = \frac{iQ}{\hbar} \nabla \Lambda \exp \left[\frac{iQ\Lambda(\vec{r})}{\hbar} \right]$$

ou

$$\nabla O = \frac{iQ}{\hbar} \nabla \Lambda O$$

de modo que

$$O^\dagger \vec{\Pi} O = -i\hbar O^\dagger \frac{iQ}{\hbar} \nabla \Lambda O + \vec{\Pi}$$

ou

$$O^\dagger \vec{\Pi} O = Q \nabla \Lambda O^\dagger O + \vec{\Pi}$$

e, finalmente,

$$O^\dagger \vec{\Pi} O = Q \nabla \Lambda + \vec{\Pi}$$

que é a equação 20.208. A evolução temporal do sistema é governada pela equação de Schrödinger para o ket $|S\rangle$, que é

$$H|S\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|S\rangle \quad (20.209)$$

onde H é o operador hamiltoniano para o sistema, que pode ser escrito também como

$$\left\{ \frac{[\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}}]^2}{2m} + Q\mathbb{V} \right\} |S\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|S\rangle \quad (20.210)$$

sendo que usamos a hamiltoniana na forma 20.189. Quando a transformação de calibre 20.198 é feita, a nova equação de Schrödinger torna-se

$$\left\{ \frac{[\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} - Q\nabla\Lambda]^2}{2m} + Q\mathbb{V} \right\} |S'\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|S'\rangle \quad (20.211)$$

Entretanto, o movimento da partícula independe do calibre utilizado, de modo que deve ser possível transformar 20.211 em 20.210. Lembrando que, por 20.202,

$$|S'\rangle = O|S\rangle$$

temos

$$\left\{ \frac{[\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} - Q\nabla\Lambda]^2}{2m} + Q\mathbb{V} \right\} O|S\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O|S\rangle$$

ou

$$\left\{ \frac{[\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} - Q\nabla\Lambda]^2}{2m} + Q\mathbb{V} \right\} O|S\rangle = i\hbar O \frac{\partial}{\partial t} |S\rangle$$

Agora, multiplicamos os dois lados dessa expressão por $O^\dagger$. Além disso, como $O^\dagger O = O O^\dagger = 1$, podemos escrever

$$\left\{ \frac{O^\dagger [\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} - Q\nabla\Lambda] \overbrace{O O^\dagger}^1 [\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} - Q\nabla\Lambda] O}{2m} + O^\dagger QV O \right\} |S\rangle = O^\dagger i\hbar O \frac{\partial}{\partial t} |S\rangle$$

A propriedade 20.207 diz que

$$\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} = O^\dagger (\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}} - Q\nabla\Lambda) O$$

de modo que achamos

$$\left\{ \frac{[\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}}] [\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}}]}{2m} + QV \right\} |S\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |S\rangle$$

ou

$$\left\{ \frac{[\vec{\Pi} - Q\vec{\mathcal{A}}]^2}{2m} + QV \right\} |S\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |S\rangle$$

que é a equação de Schrödinger 20.210. Portanto, ao ser submetido a uma transformação de calibre 20.198,

$$\vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + \nabla\Lambda$$

o estado do sistema é alterado para

$$|S'\rangle = O|S\rangle = \exp \left[\frac{iQ\Lambda}{\hbar} \right] |S\rangle$$

Em termos de funções de onda, a relação fica

$$\psi'(\vec{r}, t) = \exp \left[\frac{iQ\Lambda}{\hbar} \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (20.212)$$

sendo que $\psi(\vec{r}, t)$ representa o estado $|S\rangle$, em que o potencial vetor vale $\vec{\mathcal{A}}$ e $\psi'(\vec{r}, t)$ indica o estado $|S'\rangle$, associado ao potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}'$. Essa expressão

será particularmente útil quando discutirmos a quantização da carga elétrica na seção 21.5.

20.9 Potenciais de Polarização

Para encerrarmos a discussão a respeito de como a introdução de potenciais apropriados pode facilitar a obtenção dos campos eletromagnéticos, devemos comentar brevemente a existência de outros potenciais além dos potenciais usuais $\mathbb{V}$ e $\vec{\mathcal{A}}$. Dentre esses outros potenciais, os mais importantes são os *potenciais de polarização*, ou *vetores de Hertz*, que foram introduzidos por Hertz (1889) e Righi (1901). Esses potenciais são úteis quando existem densidades macroscópicas de polarização elétrica $\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}$ e magnética $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$ externas conhecidas e as densidades de carga e corrente são nulas. Nesse caso, o meio é caracterizado por uma permissividade elétrica ϵ e uma permeabilidade magnética μ . Se as densidades de polarização externas fossem nulas, os campos seriam dados pelas relações 10.9 e 17.11,

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \qquad \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$$

Entretanto, as densidades de polarização externas produzem campos que devem ser adicionados aos campos acima, que são produzidos pelo próprio material, para dar

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \tag{20.213}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}} + \mu_0 \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \tag{20.214}$$

Esses campos seguem as equações de Maxwell 19.20, que devem ser escritas considerando-se $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$, ou seja,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0 \tag{20.215a}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \tag{20.215b}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \tag{20.215c}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \tag{20.215d}$$

Os campos são dados pelas relações 20.2,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

e 20.3,

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Assim, podemos obter equações do tipo das equações de onda se considerarmos algumas manipulações nas equações de Maxwell. Iniciamos tomando o rotacional de $\vec{B}$, ou seja,

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

Considerando que $\vec{B}$ é dado por 20.214 e que a identidade 1.58c estabelece que

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

achamos

$$\nabla \times (\mu \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_{\text{ext}}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

ou

$$\mu \nabla \times \vec{H} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}_{\text{ext}} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Utilizamos agora a equação de Maxwell 20.215d, e assim obtemos

$$\mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}_{\text{ext}} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (20.216)$$

Calculamos agora a derivada temporal de 20.213, que fica

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_{\text{ext}}}{\partial t}$$

ou, utilizando 20.3,

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] + \frac{\partial \vec{P}_{\text{ext}}}{\partial t}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial \nabla \mathbb{V}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{P}_{\text{ext}}}{\partial t}$$

que, substituído em 20.216, fornece

$$\mu \left[-\epsilon \frac{\partial \nabla \mathbb{V}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{P}_{\text{ext}}}{\partial t} \right] + \mu_0 \nabla \times \vec{M}_{\text{ext}} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

ou, trocando a ordem do operador ∇ com a derivada temporal,

$$-\mu\epsilon \nabla \left[\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} \right] - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \vec{P}_{\text{ext}}}{\partial t} - \mu_0 \nabla \times \vec{M}_{\text{ext}}$$

ou ainda,

$$-\nabla \left[\mu\epsilon \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \right] + \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \vec{P}_{\text{ext}}}{\partial t} - \mu_0 \nabla \times \vec{M}_{\text{ext}}$$

Utilizando a condição de Lorentz 20.27 escrita para meios quaisquer,

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = 0 \quad (20.217)$$

achamos

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu \frac{\partial \vec{P}_{\text{ext}}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}_{\text{ext}} \quad (20.218)$$

A equação para $\mathbb{V}$ é obtida tomando-se o divergente de 20.3,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left[-\nabla \mathbb{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \mathbb{V} - \nabla \cdot \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \mathbb{V} - \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \vec{A}]$$

Calculando o divergente de 20.213, achamos

$$\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P}_{\text{ext}}$$

Pela equação de Maxwell 20.215a, a expressão acima torna-se

$$0 = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P}_{\text{ext}}$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla \cdot \vec{P}_{\text{ext}}}{\epsilon}$$

e assim,

$$-\frac{\nabla \cdot \vec{P}_{\text{ext}}}{\epsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \vec{A}]$$

Pela condição de Lorentz 20.217, temos

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

e então,

$$-\frac{\nabla \cdot \vec{P}_{\text{ext}}}{\epsilon} = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} \left[-\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right]$$

ou

$$-\frac{\nabla \cdot \vec{P}_{\text{ext}}}{\epsilon} = -\nabla^2 V + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

ou

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V = -\frac{\nabla \cdot \vec{P}_{\text{ext}}}{\epsilon} \quad (20.219)$$

que é a equação de onda para o potencial escalar. Reunindo as duas equações, temos

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \quad (20.220a)$$

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbb{V} = -\frac{\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}}{\epsilon} \quad (20.220b)$$

que estão sujeitas à condição de Lorentz 20.217. Podemos agora introduzir os potenciais vetoriais de polarização $\vec{\mathfrak{P}}_e$ e $\vec{\mathfrak{P}}_m$ por meio de uma comparação com o lado direito das equações acima, ou seja,

$$\vec{A} = \mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m \quad (20.221a)$$

$$\mathbb{V} = -\frac{\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e}{\epsilon} \quad (20.221b)$$

Com os potenciais definidos dessa maneira, a condição de Lorentz 20.217 é automaticamente satisfeita, como vemos em seguida. Vamos calcular o divergente de $\vec{A}$ dado por 20.221a, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \left[\mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m \right]$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{A} = \mu \nabla \cdot \left[\frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} \right] + \mu_0 \nabla \cdot [\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m]$$

A identidade 1.58a estabelece que

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

para qualquer campo vetorial $\vec{A}$. Além disso, podemos trocar a ordem em que a derivada temporal e as derivadas espaciais são feitas, resultando em

$$\nabla \cdot \vec{A} = \mu \frac{\partial \nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} \quad (20.222)$$

Agora, utilizando 20.221b, calculamos o fator

$$\mu\epsilon \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial t} = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e}{\epsilon} \right]$$

ou

$$\mu\epsilon\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\nabla\cdot\vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} \quad (20.223)$$

Em seguida, somando as equações 20.222 e 20.223, achamos

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t} = \mu\frac{\partial\nabla\cdot\vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} - \mu\frac{\partial\nabla\cdot\vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t}$$

ou

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t} = 0$$

que é a condição de Lorentz 20.217. Podemos agora determinar as equações que $\vec{\mathfrak{P}}_e$ e $\vec{\mathfrak{P}}_m$ devem satisfazer se substituirmos as expressões 20.221 em 20.220. Iniciamos com a equação 20.221a em 20.220a, ou seja,

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\mu\frac{\partial\vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} + \mu_0\nabla\times\vec{\mathfrak{P}}_m\right] - \nabla^2\left[\mu\frac{\partial\vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} + \mu_0\nabla\times\vec{\mathfrak{P}}_m\right] = \mu\frac{\partial\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}}{\partial t} + \mu_0\nabla\times\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$$

ou

$$\mu^2\epsilon\frac{\partial^3\vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^3} + \mu_0\mu\epsilon\nabla\times\frac{\partial^2\vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial\nabla^2\vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} - \mu_0\nabla^2(\nabla\times\vec{\mathfrak{P}}_m) = \mu\frac{\partial\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}}{\partial t} + \mu_0\nabla\times\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{\mathfrak{P}}_e - \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}\right] \\ + \mu_0\nabla\times\left[\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} - \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}\right] - \mu_0\nabla^2(\nabla\times\vec{\mathfrak{P}}_m) = 0 \end{aligned} \quad (20.224)$$

O último termo pode ser reescrito se considerarmos a identidade 1.58c,

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

Assim, temos

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (20.225)$$

de modo que

$$\nabla^2(\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m) = \nabla[\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m)] - \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m)$$

e, por 1.58a,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

Portanto,

$$\nabla^2(\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m) = -\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m)$$

Utilizando novamente 1.58c, obtemos

$$\nabla^2(\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m) = -\nabla \times (\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_m) + \nabla \times (\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m))$$

e, de acordo com 1.58b,

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

o que nos fornece

$$\nabla^2(\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m) = \nabla \times (\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m) \quad (20.226)$$

Assim, retornando a 20.224, achamos

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e - \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \right] \\ + \mu_0 \nabla \times \left[\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} - \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \right] - \mu_0 \nabla \times (\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e - \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \right] + \mu_0 \nabla \times \left[\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m - \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \right] = 0$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \right] \\ + \mu_0 \nabla \times \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \right] = 0 \quad (20.227) \end{aligned}$$

A segunda equação para os vetores de Hertz é determinada mediante as expressões 20.221b e 20.220b, isto é,

$$\mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[-\frac{\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e}{\epsilon} \right] - \nabla^2 \left[-\frac{\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e}{\epsilon} \right] = -\frac{\nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}}{\epsilon}$$

ou

$$-\mu \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} + \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e) + \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} = 0$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \left[\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} \right] + \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e) = 0 \quad (20.228)$$

O último termo pode ser escrito na forma

$$\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e) = \nabla \cdot [\nabla (\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e)]$$

Agora, a identidade 1.58c pode ser reescrita como

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) = \nabla \times \nabla \times \vec{A} + \nabla^2 \vec{A}$$

de modo que

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e) = \nabla \times \nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_e + \nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e$$

e, tomando seu divergente,

$$\nabla \cdot [\nabla (\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e)] = \nabla \cdot [\nabla \times \nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_e] + \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e)$$

ou

$$\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e) = \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e)$$

de modo que 20.228 fica

$$\nabla \cdot \left[\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} \right] + \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e) = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \right] = 0 \quad (20.229)$$

Comparando a equação acima com a identidade 1.58a,

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

vemos que o termo entre colchetes deve ser igual ao rotacional de alguma função vetorial, que pode ser escrita na forma $\frac{\mu_0}{\mu} \vec{\mathfrak{V}}$, ou seja,

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} = \nabla \times \frac{\mu_0}{\mu} \vec{\mathfrak{V}} \quad (20.230)$$

ou

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} = \frac{\mu_0}{\mu} \nabla \times \vec{\mathfrak{V}} - \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \quad (20.231)$$

Utilizando 20.230 na equação 20.227, ficamos com

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \times \frac{\mu_0}{\mu} \vec{\mathfrak{V}} \right] + \mu_0 \nabla \times \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \right] = 0$$

ou

$$\mu_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{\mathfrak{V}}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \right] = 0$$

ou ainda,

$$\mu_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{\mathfrak{V}}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \right] = 0$$

que fica

$$\nabla \times \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} + \frac{\partial \vec{\mathfrak{V}}}{\partial t} \right] = 0$$

Comparando a equação acima com a identidade 1.58b,

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

vemos que o termo entre colchetes pode ser escrito como o gradiente de alguma função escalar apropriada, que chamaremos de $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$. Assim, temos

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} + \frac{\partial \vec{\mathfrak{V}}}{\partial t} = \nabla \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$$

ou

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t^2} = \nabla \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} - \frac{\partial \vec{\mathfrak{V}}}{\partial t} \quad (20.232)$$

Assim, achamos duas equações de onda para os vetores de Hertz, dadas pelas expressões 20.231 e 20.232, que envolvem campos $\vec{\mathfrak{V}}$ e $\mathfrak{Z}$ arbitrários. Através de uma transformação de calibre dos vetores de Hertz $\vec{\mathfrak{P}}_e$ e $\vec{\mathfrak{P}}_m$ é possível demonstrar que podemos considerar $\vec{\mathfrak{V}} = 0$ e $\mathfrak{Z} = 0$ sem perda de generalidade. Para tanto, considere a transformação de calibre

$$\vec{\mathfrak{P}}'_e = \vec{\mathfrak{P}}_e + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{G}} - \nabla g \quad (20.233a)$$

$$\vec{\mathfrak{P}}'_m = \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t} \quad (20.233b)$$

onde $\vec{\mathfrak{G}}$ e g são funções bem comportadas da posição e do tempo. Vamos agora utilizar essa transformação de calibre nas equações de onda 20.231 e 20.232. Precisamos primeiro inverter as relações acima, que ficam

$$\vec{\mathfrak{P}}_e = \vec{\mathfrak{P}}'_e - \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{G}} + \nabla g \quad (20.234)$$

$$\vec{\mathfrak{P}}_m = \vec{\mathfrak{P}}'_m + \mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t} \quad (20.235)$$

Utilizando 20.234 em 20.231, obtemos

$$\nabla^2 [\vec{\mathfrak{P}}'_e + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{G}} - \nabla g] - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{\mathfrak{P}}'_e + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{G}} - \nabla g] = \frac{\mu_0}{\mu} \nabla \times \vec{\mathfrak{V}} - \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}$$

que fica

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e + \mu_0 \nabla^2 (\nabla \times \vec{\mathfrak{G}}) - \nabla^2 (\nabla \mathfrak{g}) \\ - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e}{\partial t^2} - \mu_0 \mu\epsilon \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{\mathfrak{G}})}{\partial t^2} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \nabla \mathfrak{g}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0}{\mu} \nabla \times \vec{\mathfrak{V}} - \vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e}{\partial t^2} + \mu_0 \nabla \times (\nabla^2 \vec{\mathfrak{G}}) - \mu_0 \mu\epsilon \nabla \times \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t^2} \\ - \nabla (\nabla^2 \mathfrak{g}) + \mu\epsilon \nabla \frac{\partial^2 \mathfrak{g}}{\partial t^2} - \frac{\mu_0}{\mu} \nabla \times \vec{\mathfrak{V}} = -\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \quad (20.236) \end{aligned}$$

onde fizemos uso de 20.226 e também de 20.225,

$$\nabla^2 (\nabla \mathfrak{g}) = \nabla [\nabla \cdot (\nabla \mathfrak{g})] - \overbrace{\nabla \times \nabla \times (\nabla \mathfrak{g})}^0$$

ou

$$\nabla^2 (\nabla \mathfrak{g}) = \nabla (\nabla^2 \mathfrak{g})$$

Reunindo os termos em 20.236, achamos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e}{\partial t^2} + \mu_0 \nabla \times \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{G}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t^2} + \frac{\vec{\mathfrak{V}}}{\mu} \right] \\ - \nabla \left[\nabla^2 \mathfrak{g} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{g}}{\partial t^2} \right] = -\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \quad (20.237) \end{aligned}$$

Agora, aplicamos 20.235 em 20.232,

$$\nabla^2 \left[\vec{\mathfrak{P}}'_m + \mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t} \right] - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\vec{\mathfrak{P}}'_m + \mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t} \right] = \nabla \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} - \frac{\partial \vec{\mathfrak{V}}}{\partial t}$$

ou

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}'_m + \mu \nabla^2 \frac{\partial \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}'_m}{\partial t^2} - \mu^2 \epsilon \frac{\partial^3 \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t^3} - \nabla \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathfrak{V}}}{\partial t} = -\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}'_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}'_m}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 \vec{\mathfrak{G}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t^2} + \frac{\vec{\mathfrak{V}}}{\mu} - \frac{\nabla \mathfrak{V}}{\mu} \right] = -\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \quad (20.238)$$

Da expressão acima, vemos que, se $\vec{\mathfrak{G}}$ satisfizer a equação de onda

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{G}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t^2} + \frac{\vec{\mathfrak{V}}}{\mu} - \frac{\nabla \mathfrak{V}}{\mu} = 0$$

ou

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{G}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \mathfrak{V}}{\mu} - \frac{\vec{\mathfrak{V}}}{\mu} \quad (20.239)$$

a equação 20.238 reduz-se a

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}'_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}'_m}{\partial t^2} = -\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} \quad (20.240)$$

que é uma equação de onda independente de $\vec{\mathfrak{G}}$ ou $\mathfrak{g}$. Além disso, a expressão 20.237 fica

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e}{\partial t^2} + \overbrace{\mu_0 \nabla \times \left[\frac{\nabla \mathfrak{V}}{\mu} \right]}^0 - \nabla \left[\nabla^2 \mathfrak{g} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{g}}{\partial t^2} \right] = -\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}}$$

Se $\mathfrak{g}$ satisfizer a equação de onda

$$\nabla^2 \mathfrak{g} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{g}}{\partial t^2} = 0 \quad (20.241)$$

ficamos com

$$\nabla^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}'_e}{\partial t^2} = -\vec{\mathcal{P}}_{\text{ext}} \quad (20.242)$$

que também é uma equação de onda que independe de $\vec{\mathfrak{G}}$ ou $\mathfrak{g}$. É possível mostrar também que a transformação de calibre 20.233 é equivalente a uma transformação de calibre feita nos potenciais $\vec{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{V}$ dados pelas equações 20.221, $\mathfrak{a}$ que será deixado como exercício (veja o exercício 20.10). Devemos agora obter os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ a partir de 20.221 e das relações 20.2,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

e 20.3,

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Iniciamos com o campo elétrico, determinando

$$\nabla V = \nabla \left[-\frac{\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e}{\epsilon} \right]$$

ou

$$\nabla V = -\frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e)}{\epsilon}$$

Em seguida, calculamos

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m \right]$$

ou

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m)}{\partial t}$$

ou então,

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} + \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t}$$

de modo que o campo elétrico fica

$$\vec{E} = \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e)}{\epsilon} - \mu \frac{\partial^2 \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t^2} - \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_m}{\partial t} \quad (20.243)$$

Para o campo magnético, precisamos do rotacional de $\vec{A}$, ou seja,

$$\vec{B} = \nabla \times \left[\mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m \right]$$

ou

$$\vec{B} = \mu \nabla \times \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m \quad (20.244)$$

As expressões 20.243 e 20.244 fornecem os campos elétrico e magnético em termos dos vetores de Hertz, os quais, por sua vez, são obtidos por meio das equações de onda 20.240 e 20.242. Tais potenciais podem ser utilizados no estudo da emissão de radiação por multipolos elétricos e magnéticos, mas aqui vamos preferir empregar os potenciais usuais V e $\vec{A}$ além dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Com os vetores de Hertz encerramos por ora o estudo dos potenciais retardados. Voltaremos a utilizá-los quando tratarmos da emissão de radiação eletromagnética no capítulo 24. Antes disso, porém, precisamos estudar algumas leis de conservação importantes envolvendo os campos eletromagnéticos.

20.10 Exercícios

20.1 Obtenha o potencial vetor magnético 20.108,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\vec{v}(t_r)}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

através da suposição de uma densidade de corrente $\vec{J}$ dada por uma função delta de Dirac temporal, como em 20.115,

$$\vec{J}(\vec{r}_Q(t), t_r) = Q\delta(t - t_r)\vec{v}(t_r)$$

20.2 O fio mostrado na figura 20.6 é percorrido por uma corrente $i(t) = kt$. Calcule o potencial vetor magnético retardado $\vec{A}$ na origem dos eixos coordenados. Determine também o campo elétrico na mesma posição. É possível calcular $\vec{B}$ a partir dessa expressão para $\vec{A}$?

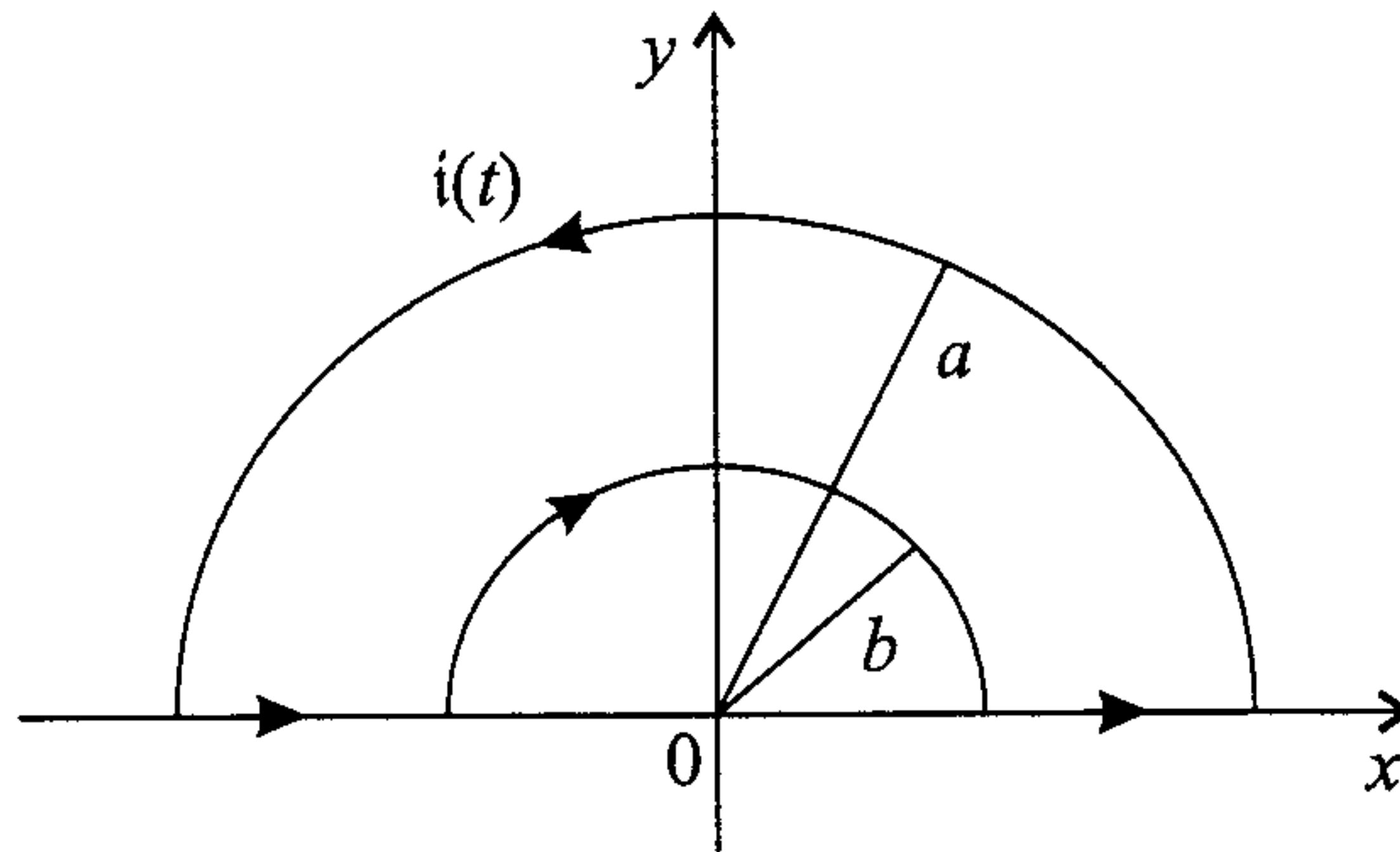


Figura 20.6: Fio para o exercício 20.2.

- 20.3** Uma partícula de carga Q move-se descrevendo uma trajetória hiperbólica dada por

$$\vec{r}_Q(t) = \sqrt{b^2 + c^2 t^2} \hat{\mathbf{i}}, \quad -\infty < t < \infty$$

Existem pontos (x, t) no espaço onde a partícula não pode ser vista? Quando ela é vista pela primeira vez? Determine os potenciais de Liénard-Wiechert para essa partícula, supondo que $\vec{r}$ esteja no eixo x à direita da partícula.

- 20.4** Demonstre que o campo elétrico 20.118,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right] \right\}$$

é equivalente ao campo elétrico de Feynman 20.120,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{R}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{R}}{R^3} \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\vec{R}}{R} \right] \right\}$$

Em seguida, mostre que o campo magnético 20.119,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}] R} \right] \right\}$$

pode ser transformado no campo magnético de Heaviside 20.121,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{\beta} \times \vec{R}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}} \right] \right\}$$

lembrando que todas as grandezas do lado direito das equações acima são calculadas no tempo retardado t_r . (Para referências, consulte R. P. Feynman, *The Feynman Lectures in Physics*, v. 1, cap. 28, e v. 2, cap. 21, além de O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, v. 3.)

20.5 Uma partícula de carga Q está em movimento circular uniforme num círculo de raio a com velocidade angular ω . A órbita está no plano xy e em $t = 0$ a partícula está na posição $(a, 0)$. Determine os potenciais e campos de Liénard-Wiechert no eixo z .

20.6 Mostre que, utilizando funções delta de Dirac temporais apropriadas para as densidades de carga e correntes, é possível obter as equações 20.118 e 20.119 partindo de 20.116,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}', t_r) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \right] \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right] \end{aligned}$$

e 20.117,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{c |\vec{r} - \vec{r}'|^2} dV \right] \end{aligned}$$

20.7 Demonstre a equação 20.147,

$$\nabla \times \vec{r}_Q(t_r) = -\vec{v} \times \nabla t_r$$

20.8 Um dipolo elétrico tem um momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ de direção fixa no espaço. O dipolo está localizado em $\vec{r}_d(t)$ e tem uma velocidade $\vec{v} = \frac{d\vec{r}_d}{dt}$ não-relativística.

- a) Mostre que as densidades de carga e corrente para o dipolo elétrico podem ser escritas como

$$\rho(\vec{r}, t) = -(\vec{p} \cdot \nabla) \delta(\vec{r} - \vec{r}_d(t))$$

e

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\vec{v}(\vec{p} \cdot \nabla) \delta(\vec{r} - \vec{r}_d(t))$$

- b) Ache os potenciais retardados para esse dipolo. Em particular, mostre que

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \vec{v}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{p})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\vec{p} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{2r^3} + \frac{\vec{p}(\vec{r} \cdot \vec{v}) + \vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{2r^3} \right]$$

- c) Mostre que o dipolo elétrico em movimento dá origem a um campo magnético associado a um dipolo magnético de momento magnético

$$\vec{m} = \frac{\vec{p} \times \vec{v}}{2}$$

além de um campo elétrico associado a um quadrupolo elétrico de momento de quadrupolo de componentes

$$Q_{i,j} = 3(x_{d_i} p_j + x_{d_j} p_i) - 2(\vec{r}_d \cdot \vec{p}) \delta_{i,j}$$

Note que há momentos de multipolo de ordem mais alta, mas eles não nos interessam no momento.

- d) Ache o campo elétrico quase-estático, isto é, tome o limite em que $v \rightarrow 0$.

e) Mostre que o campo magnético é dado por

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{v} \times \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}$$

20.9 Demonstre a expressão 20.197 para a forma quântica da força de Lorentz.

20.10 Mostre que a transformação de calibre 20.233,

$$\begin{aligned}\vec{\mathfrak{P}}'_e &= \vec{\mathfrak{P}}_e + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{G}} - \nabla g \\ \vec{\mathfrak{P}}'_m &= \vec{\mathfrak{P}}_m - \mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{G}}}{\partial t}\end{aligned}$$

é equivalente a uma transformação de calibre feita diretamente nos potenciais $\mathbb{V}$ e $\vec{\mathcal{A}}$ dados por 20.221,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}} &= \mu \frac{\partial \vec{\mathfrak{P}}_e}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathfrak{P}}_m \\ \mathbb{V} &= -\frac{\nabla \cdot \vec{\mathfrak{P}}_e}{\epsilon}\end{aligned}$$

e determine a função Λ em 20.8,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}}' &= \vec{\mathcal{A}} + \nabla \Lambda \\ \mathbb{V}' &= \mathbb{V} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\end{aligned}$$

Capítulo 21

Campos Eletromagnéticos, IV: Leis de Conservação

Neste capítulo vamos estabelecer algumas leis de conservação associadas com grandezas físicas de grande importância, como energia e momentos linear e angular. Tais leis de conservação serão necessárias nos próximos capítulos, e a partir delas algumas situações de aparente incoerência física serão resolvidas, como a questão da validade da terceira lei de Newton. Vamos iniciar com a lei de conservação da carga.

21.1 Lei de Conservação da Carga Elétrica

A lei de conservação da carga elétrica é a primeira e a mais simples das leis de conservação que podem ser obtidas a partir das equações de Maxwell. Sendo assim, partindo da hipótese de que o Eletromagnetismo clássico (e mesmo no domínio relativístico) é descrito corretamente pelas leis de Maxwell 20.1 ou, de um ponto de vista macroscópico, por 19.20, aqui repetidas,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \quad (21.1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (21.1b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (21.1c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (21.1d)$$

a lei de conservação da carga é facilmente derivada considerando-se as equações 21.1a e 21.1d. Assim, ela torna-se uma consequência da formulação teórica vista até o momento. Ela é, porém, mais do que isso. A conservação da carga elétrica é uma questão bastante investigada experimentalmente e até o momento não há indícios experimentais de que a carga elétrica não seja conservada mesmo em processos que envolvem altas velocidades. É interessante notar que a conservação é válida globalmente, ou seja, a carga elétrica total do universo não se altera, mas também é válida localmente, isto é, se num dado volume V há uma certa quantidade de cargas, qualquer variação nessa quantidade de cargas deve ser observada como uma quantidade igual de cargas que passou para dentro ou para fora do volume V ¹.

Para demonstrar a lei de conservação da carga a partir das equações de Maxwell, iniciamos lembrando que a carga contida num volume V é dada por

$$Q(t) = \int_V \rho(\vec{r}', t) dV$$

Derivando a carga com relação ao tempo, temos

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}', t) dV$$

ou, aplicando a derivada temporal dentro da integral, o que a transforma numa derivada parcial,

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (21.2)$$

A corrente elétrica que atravessa a superfície fechada S de um volume V (para fora de V) é dada por 12.19,

$$i = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Pela conservação da carga, a essa corrente corresponde uma diminuição da carga dentro de V , dada por

¹ Algo como: não basta que você, para entrar numa casa, simplesmente suma da frente da porta e reapareça na sala da casa. É preciso que você abra a porta e passe por ela.

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

de modo que

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

e então, utilizando 21.2,

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

Agora utilizamos o teorema do divergente 1.54,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS$$

para transformar o lado direito da equação acima em

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV$$

ou

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} \right] dV = 0$$

que, sendo válida para qualquer volume arbitrário V , reduz-se a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

que é a equação de continuidade 12.21, forma matemática da lei de conservação da carga. Podemos passar agora à lei de conservação de energia no Eletromagnetismo.

21.2 Lei de Conservação da Energia

Para estabelecer a lei de conservação de energia para um sistema formado por cargas e correntes que produzem campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$, precisamos saber a variação de energia que ocorre no sistema quando as cargas e correntes se movem durante um tempo infinitesimal dt sob a ação desses campos, ou seja, precisamos determinar o trabalho dW realizado pelas forças que agem sobre as cargas e correntes durante dt . Considerando uma carga pontual Q que se move com uma velocidade $\vec{v}$, a força que age sobre ela causada pelos campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ é dada pela força de Lorentz 15.25,

$$\vec{F} = Q\vec{\mathcal{E}} + Q\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}$$

O trabalho realizado por essa força durante um deslocamento $d\vec{\ell} = \vec{v} dt$ é dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = (Q\vec{\mathcal{E}} + Q\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}) \cdot d\vec{\ell}$$

ou

$$dW = (Q\vec{\mathcal{E}} + Q\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}) \cdot \vec{v} dt$$

ou ainda, lembrando que $\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}$ é perpendicular a $\vec{v}$,

$$dW = Q\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{v} dt$$

de modo que a taxa de realização do trabalho, ou a potência dissipada, fica

$$\frac{dW}{dt} = Q\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{v}$$

Se, ao invés de uma única carga Q , tivermos, num volume V , uma distribuição de cargas com uma densidade ρ e uma distribuição de correntes com densidade $\vec{J} = \rho\vec{v}$, a potência dissipada pelo sistema durante o movimento no tempo dt será

$$\mathbb{P} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} dV \quad (21.3)$$

Essa potência dissipada é a que aparece, por exemplo, nos resistores, como efeito Joule. O termo $\vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ representa a potência dissipada por unidade de

volume (uma espécie de densidade volumétrica de potência). Ele pode ser reescrito se utilizarmos a lei de Ampère-Maxwell 21.1d para eliminar $\vec{J}$, isto é,

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

e

$$\vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \left[\nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right]$$

ou

$$\vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (21.4)$$

Da identidade 1.58g,

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$$

temos

$$\nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) = (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \vec{\mathcal{H}} - (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \vec{\mathcal{H}} - \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}})$$

Utilizando agora a lei de Faraday 21.1c, achamos

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \cdot \vec{\mathcal{H}} - \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}})$$

o que faz com que 21.4 torne-se

$$\vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \cdot \vec{\mathcal{H}} - \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (21.5)$$

Agora, temos que

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \qquad \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$$

Se o meio for linear e, além disso, não existirem perdas por meio de algum tipo de dissipação não-ôhmica ou por dispersão, isto é, se ϵ e μ não dependem dos campos elétricos ou magnéticos, nem da eventual frequência de oscilação desses campos, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot \vec{\mathcal{D}}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \cdot (\epsilon \vec{\mathcal{E}})$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \overbrace{\frac{\partial (\epsilon \vec{\mathcal{E}})}{\partial t}}^{\vec{\mathcal{D}}}$$

ou então,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = 2\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) \quad (21.6)$$

Analogamente, para o campo magnético temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}) = \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \cdot \vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{B}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}) = \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \cdot \vec{\mathcal{H}} + (\mu \vec{\mathcal{H}}) \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \overbrace{(\mu \vec{H})}^{\vec{B}}}{\partial t}$$

e então,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{H}) = 2 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H}$$

de forma que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (21.7)$$

Reunindo 21.6 e 21.7 em 21.5, ficamos com

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} \cdot \vec{H}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \cdot \vec{D})$$

ou

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \right] - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (21.8)$$

Os três termos na equação acima têm dimensões de energia por unidade de volume por unidade de tempo. Podemos comparar o primeiro termo do lado direito com as expressões 10.53 e 18.58,

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \qquad u = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

que expressam as densidades volumétricas de energia elétrica e magnética armazenada nos campos, respectivamente. Assim, esse termo representa a derivada temporal da densidade volumétrica total de energia eletromagnética armazenada nos campos, ou seja,

$$u_{el} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (21.9)$$

O segundo termo envolve o divergente do vetor $\vec{E} \times \vec{H}$. Esse vetor é muito importante na análise do transporte de energia pelos campos, e ele tem um nome especial. Ele é chamado de *vetor de Poynting* $\vec{S}$, em homenagem a J. H. Poynting, que foi o primeiro a investigar suas propriedades, de modo que

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \quad (21.10)$$

Assim, com o uso de 21.9 e 21.10, a expressão 21.8 fica

$$\vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial u_{\text{el}}}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S} \quad (21.11)$$

ou

$$\frac{\partial u_{\text{el}}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (21.12)$$

Voltando à equação 21.3 e empregando 21.11, ficamos com

$$\mathbb{P} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} dV = \int_V \left[-\frac{\partial u_{\text{el}}}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S} \right] dV$$

ou

$$\mathbb{P} = -\frac{d}{dt} \int_V u_{\text{el}} dV - \int_V \nabla \cdot \vec{S} dV$$

ou ainda, utilizando o teorema do divergente 1.54 para reescrever a última integral, temos

$$\mathbb{P} = -\frac{dU_{\text{el}}}{dt} - \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} dA$$

onde nos valem os fatos de que a energia eletromagnética total armazenada nos campos é dada por

$$U_{\text{el}} = \int_V u_{\text{el}} dV \quad (21.13)$$

Como o trabalho dW realizado produz uma variação igual na energia mecânica total (energia cinética mais as energias potenciais) do sistema de cargas e correntes, temos $dW = dU_{\text{mec}}$, e assim,

$$\mathbb{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{dU_{\text{mec}}}{dt}$$

Portanto,

$$\frac{dU_{\text{mec}}}{dt} + \frac{dU_{\text{el}}}{dt} = - \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$\frac{d}{dt}(U_{\text{mec}} + U_{\text{el}}) = - \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} dA$$

Definindo agora a energia total U do sistema como sendo a soma das energias mecânica total e eletromagnética total do sistema,

$$U = U_{\text{mec}} + U_{\text{el}} \quad (21.14)$$

ficamos com

$$\frac{dU}{dt} + \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (21.15)$$

Podemos definir a densidade volumétrica total de energia como sendo a soma da densidade de energia eletromagnética e da densidade de energia mecânica, ou seja,

$$u = u_{\text{el}} + u_{\text{mec}} \quad (21.16)$$

de modo que

$$U = \int_V u dV \quad (21.17)$$

Com essa definição, a expressão 21.15 torna-se

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V u dV \right] + \oint_S \vec{S} \cdot \hat{n} dA = 0$$

ou, utilizando o teorema do divergente 1.54 para reescrever o último termo,

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \vec{S} dV = 0$$

ou ainda,

$$\int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \right] dV = 0$$

Como o volume de integração é qualquer, o integrando deve ser sempre nulo, e assim achamos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad (21.18)$$

As equações 21.12, 21.15 e 21.18 expressam de formas diferentes o *teorema de Poynting*, o qual indica que a variação temporal da energia total armazenada por um sistema mecânico-eletromagnético contido num volume V surge como um fluxo de energia (dado pelo vetor de Poynting $\vec{S}$) através da superfície S que delimita o sistema. Além disso, elas indicam também que é possível converter energia mecânica do sistema em eletromagnética, e vice-versa, e se não houver perdas através de S , o conteúdo energético total do sistema permanece constante. Note que essas expressões são válidas para meios lineares sem perdas não-ôhmicas e sem dispersão (ϵ e μ independentes da frequência angular ω de oscilação dos campos eletromagnéticos). Elas são válidas mesmo para meios anisotrópicos, nos quais ϵ e μ são, na verdade, tensores, e as relações constitutivas entre $\vec{E}$ e $\vec{D}$ e $\vec{B}$ e $\vec{H}$ são dadas por

$$\vec{D} = \overleftrightarrow{\epsilon} \vec{E} \quad (21.19)$$

e

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu} \vec{H}$$

onde $\overleftrightarrow{\epsilon}$ e $\overleftrightarrow{\mu}$ são tensores de ordem 2, representados pelas matrizes

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

e

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$$

A equação 21.19 pode ser reescrita como

$$\vec{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_j \hat{\mathbf{e}}_i$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_i$ indica os versores das direções x ($i = 1$), y ($i = 2$) e z ($i = 3$). A componente i do deslocamento elétrico fica, então,

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_j \quad (21.20)$$

O produto escalar entre $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{D}}$ pode ser expresso por

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i \mathcal{D}_i$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_j$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j$$

A derivada temporal dessa expressão, considerando que $\vec{\epsilon}$ não depende de t , é

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} \mathcal{E}_j + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_i \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial t}$$

A primeira somatória envolve termos do tipo

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} \mathcal{E}_j = \epsilon_{11} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} \mathcal{E}_1 + \epsilon_{12} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} \mathcal{E}_2 + \epsilon_{13} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} \mathcal{E}_3 + \epsilon_{21} \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} \mathcal{E}_1 + \dots$$

Levando em conta o fato de que $\vec{\epsilon}$ é um tensor simétrico, de modo que

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

podemos reescrever a somatória acima como

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} \mathcal{E}_j = \epsilon_{11} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} \mathcal{E}_1 + \epsilon_{21} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} \mathcal{E}_2 + \epsilon_{31} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} \mathcal{E}_3 + \epsilon_{12} \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} \mathcal{E}_1 + \dots$$

ou, de uma forma condensada,

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} \mathcal{E}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_i \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial t}$$

de modo que achamos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_i \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_i \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial t}$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_i \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial t}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_{ij} \mathcal{E}_j)$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_j \right)$$

Lembrando a expressão 21.20,

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_j$$

temos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial t}$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) = \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

que é a relação 21.6, que ainda permanece válida mesmo quando o material é anisotrópico. O mesmo acontece com a relação 21.7, e a prova é deixada como exercício (veja o exercício 21.1). Tais relações foram utilizadas para obter a equação 21.8, da qual derivam as várias formas do teorema de Poynting. A situação muda, entretanto, quando o meio apresenta perdas não-ôhmicas ou é dispersivo (sendo ainda linear), isto é, quando ϵ e μ dependem da frequência de oscilação dos campos elétricos e magnéticos. Nesse caso, é interessante introduzir uma análise de Fourier dos campos, na forma

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (21.21a)$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (21.21b)$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Note que, nas expressões acima, os campos como função de $\vec{r}$ e t são reais, ao passo que, como função de $\vec{r}$ e ω , eles podem ser complexos. Como o meio é linear, temos que $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega)$ e $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, \omega) = \mu(\omega) \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, \omega)$, onde $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ podem ser complexos e dependem da frequência dos campos. Os campos em função de $\vec{r}$ e t são reais, de modo que, considerando o complexo conjugado do campo elétrico 21.21a, temos

$$\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, t) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t}} d\omega \\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega\end{aligned}\quad (21.22)$$

onde levamos em conta, no último passo, o fato de que $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ é real. Agora, escrevemos a expressão 21.21a na forma

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \int_{\infty}^{-\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, -\omega) e^{-i(-\omega)t} d(-\omega)$$

que pode ser reescrita como

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = - \int_{\infty}^{-\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, -\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, -\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Comparando com 21.22, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, \omega) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, -\omega)$$

e, de forma similar,

$$\vec{\mathcal{D}}^*(\vec{r}, \omega) = \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, -\omega)$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}^*(\vec{r}, \omega) = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, -\omega) \quad \vec{\mathcal{H}}^*(\vec{r}, \omega) = \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, -\omega)$$

As relações acima fazem com que, na relação

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega)$$

a permissividade elétrica siga a condição $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$, como se vê quando tomamos o complexo conjugado da equação acima,

$$\vec{\mathcal{D}}^*(\vec{r}, \omega) = \epsilon^*(\omega) \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, \omega)$$

Utilizando as relações entre os complexos conjugados dos campos, temos

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, -\omega) = \epsilon^*(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, -\omega)$$

Mas,

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, -\omega) = \epsilon(-\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, -\omega)$$

de modo que

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$$

e, de forma idêntica,

$$\mu^*(\omega) = \mu(-\omega)$$

O fato de ϵ e μ dependerem da frequência de oscilação dos campos, ou seja, a condição de o meio ser dispersivo, faz com que haja modificações no teorema de Poynting. Por exemplo, a relação 21.6,

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}})$$

deixa de ser válida nessa forma simples. Vamos considerar a derivada temporal da expressão 21.21b,

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Tomando o complexo conjugado de 21.21a, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, \omega') e^{i\omega' t} d\omega'$$

e efetuando o produto escalar com a expressão acima para a derivada de $\vec{\mathcal{D}}$, temos

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') e^{i\omega' t} \cdot [-i\omega \epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega d\omega'$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot [-i\omega \epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega - \omega')t} d\omega d\omega' \quad (21.23)$$

Agora, substituimos ω por $-\omega'$, e vice-versa, nas expressões acima, de modo que achamos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, -\omega) e^{i(-\omega)t} d(-\omega)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, -\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} -i(-\omega') \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, -\omega') e^{-i(-\omega')t} d(-\omega')$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} i\omega' \epsilon(-\omega') \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, -\omega') e^{i\omega' t} d\omega'$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^*(-\omega) e^{-i\omega t} \cdot [i\omega' \epsilon(-\omega')] \vec{\mathcal{E}}(-\omega') e^{i\omega' t} d\omega d\omega'$$

ou, utilizando

$$\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}, \omega) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, -\omega) \quad \epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$$

obtemos

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\omega) \cdot [i\omega' \epsilon^*(\omega')] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') e^{-i(\omega - \omega')t} d\omega d\omega'$$

Somando essa equação com a expressão 21.23, achamos

$$2\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot [-i\omega\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\omega) \cdot [i\omega'\epsilon^*(\omega')] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega'$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [-i\omega\epsilon(\omega) + i\omega'\epsilon^*(\omega')] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega'$$

Supondo que as frequências se distribuam num intervalo estreito em torno de ω , podemos expandir em série de Taylor o fator $i\omega'\epsilon^*(\omega')$, ou seja,

$$i\omega'\epsilon^*(\omega') = i\omega\epsilon^*(\omega) + i(\omega' - \omega) \frac{d}{d\omega'} [\omega'\epsilon^*(\omega')] \Big|_{\omega'=\omega} + \dots$$

ou

$$i\omega'\epsilon^*(\omega') = i\omega\epsilon^*(\omega) - i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} [\omega\epsilon^*(\omega)] + \dots$$

de modo que o colchetes fica

$$-i\omega\epsilon(\omega) + i\omega'\epsilon^*(\omega') = -i\omega\epsilon(\omega) + i\omega\epsilon^*(\omega) - i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} [\omega\epsilon^*(\omega)] + \dots$$

ou

$$-i\omega\epsilon(\omega) + i\omega'\epsilon^*(\omega') = -i\omega[\epsilon(\omega) - \epsilon^*(\omega)] - i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} [\omega\epsilon^*(\omega)] + \dots$$

ou ainda, como $\epsilon(\omega) - \epsilon^*(\omega) = 2i\Im[\epsilon(\omega)]$,

$$-i\omega\epsilon(\omega) + i\omega'\epsilon^*(\omega') = 2\omega\Im[\epsilon(\omega)] - i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} [\omega\epsilon^*(\omega)] + \dots$$

e assim, achamos, em primeira ordem,

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\omega\Im[\epsilon(\omega)] - i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} [\omega\epsilon^*(\omega)] \right\} \\ \times \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega'$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon^*(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega'\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon^*(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega'\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon^*(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \right\} \quad (21.24)\end{aligned}$$

De forma idêntica, é possível obter uma expressão para o campo magnético como sendo (veja o exercício 21.2)

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \Im[\mu(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [\omega \mu^*(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \right\} \quad (21.25)\end{aligned}$$

e assim, achamos

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon^*(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \right\} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \Im[\mu(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [\omega \mu^*(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \right\}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \left\{ \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) \right. \\ & \left. + \Im[\mu(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) \right\} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon^*(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d}{d\omega} [\omega \mu^*(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) \right\} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \right\} \end{aligned}$$

Note que, quando ϵ e μ são reais e independem da frequência, ou seja, quando o meio é não-dispersivo, a primeira integral do lado direito acima se anula e a segunda reduz-se à expressão 21.9 para a densidade de energia eletromagnética. Assim, essa integral representa uma densidade efetiva de energia, ao passo que a primeira está relacionada com a dissipação de energia por calor ou alguma outra forma de radiação. A densidade efetiva de energia eletromagnética fica

$$\begin{aligned} u_{\text{el, ef}} = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon^*(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) \right. \\ & \left. + \frac{d}{d\omega} [\omega \mu^*(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) \right\} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \end{aligned} \quad (21.26)$$

e a expressão 21.5 fica

$$\begin{aligned} \vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} = & -\nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} - \frac{\partial u_{\text{el, ef}}}{\partial t} - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \left\{ \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) \right. \\ & \left. + \Im[\mu(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) \right\} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{el, ef}}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} + \vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}} = & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \left\{ \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) \right. \\ & \left. + \Im[\mu(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) \right\} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \end{aligned}$$

O termo $\vec{J} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ é a taxa de variação da densidade de energia mecânica, de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{el, ef}}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} + \frac{\partial u_{\text{mec}}}{\partial t} = \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \left\{ \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) \right. \\ \left. + \Im[\mu(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) \right\} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \end{aligned}$$

ou, utilizando 21.16,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \left\{ \Im[\epsilon(\omega)] \vec{\mathcal{E}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{E}}(\omega) \right. \\ \left. + \Im[\mu(\omega)] \vec{\mathcal{B}}^*(\omega') \cdot \vec{\mathcal{B}}(\omega) \right\} e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \quad (21.27) \end{aligned}$$

que expressa o teorema de Poynting para meios dispersivos com perdas não-ôhmicas. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 21.1. *O cabo coaxial muito longo da figura 21.1 transporta uma corrente i quando submetido a uma diferença de potencial V . Determine a potência transmitida pelo cabo.*

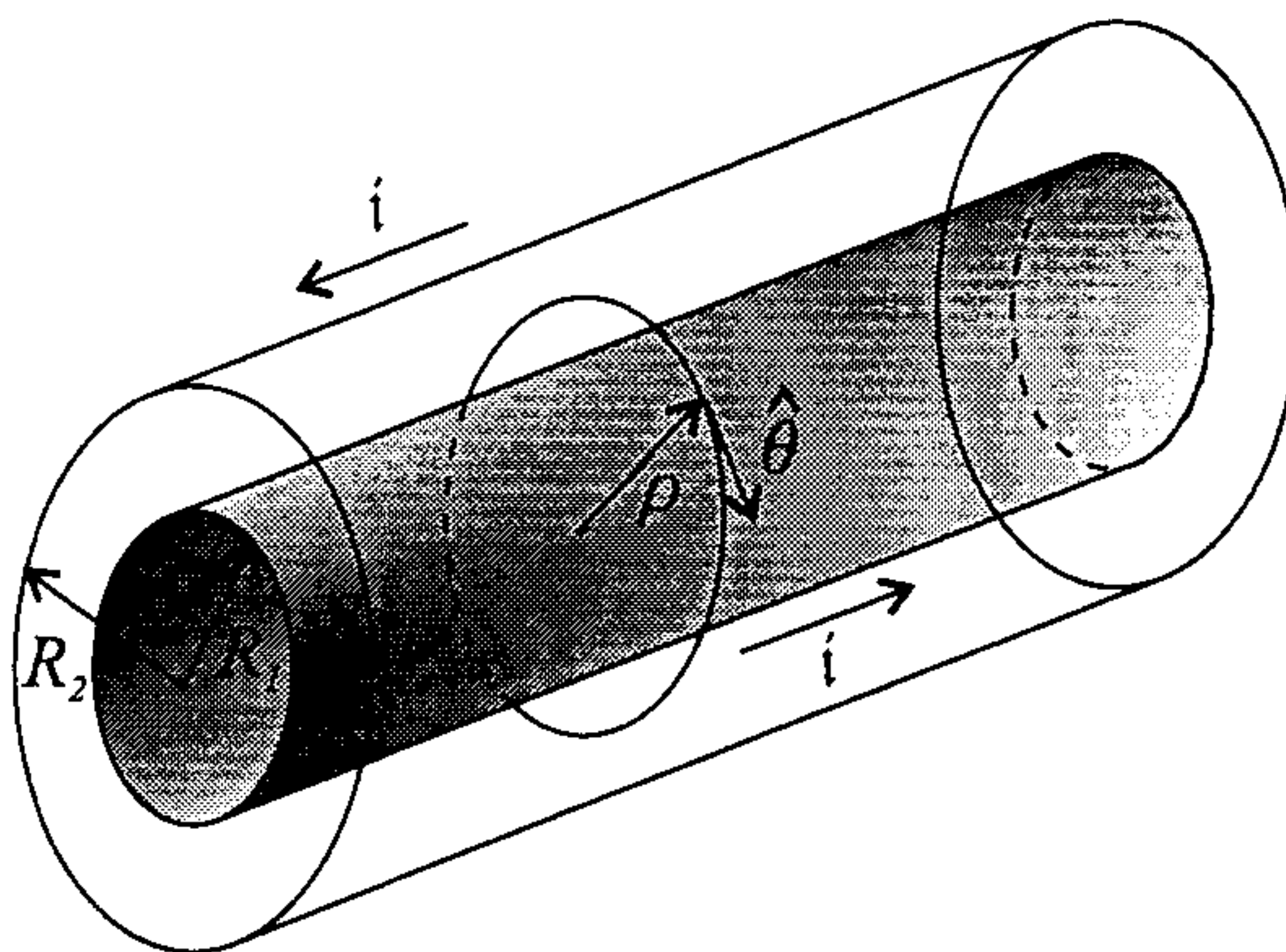


Figura 21.1: Um cabo coaxial para o cálculo da potência transmitida por ele.

Para calcular a potência transmitida pelo cabo, precisamos inicialmente determinar o vetor de Poynting 21.10,

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

que é o fluxo de energia por unidade de área e tempo. O campo elétrico entre os condutores é determinado por meio de 11.6 (veja o exemplo 11.3),

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

ou, em termos da diferença de potencial V , dada por 11.7,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

temos

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{V}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}} \hat{\rho}$$

O campo magnético dentro do cabo coaxial é dado pela expressão 14.25,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

de modo que o campo $\vec{\mathcal{H}}$ vale

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

e o vetor de Poynting torna-se

$$\vec{S} = \frac{V}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}} \hat{\rho} \times \frac{i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

ou

$$\vec{S} = \frac{Vi}{2\pi\rho^2 \ln \frac{R_2}{R_1}} \hat{k}$$

A potência que passa através de uma seção reta do cabo é dada por

$$\mathbb{P} = \int_{\text{seção}} \vec{S}_1 \cdot \hat{n}_{\text{seção}} dA$$

onde $\hat{n}_{\text{seção}} = \hat{\mathbf{k}}$. Temos, portanto,

$$\mathbb{P} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{Vi}{2\pi\rho^2 \ln \frac{R_2}{R_1}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \rho d\rho d\theta$$

ou

$$\mathbb{P} = \frac{Vi}{2\pi \ln \frac{R_2}{R_1}} (2\pi) \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho}$$

ou ainda,

$$\mathbb{P} = \frac{Vi}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R_2}{R_1} = Vi$$

o que significa que uma potência $\mathbb{P} = Vi$ é transportada pelo cabo coaxial, fato esse já esperado. Essa potência é transportada pelo cabo até os outros elementos de circuito aos quais ele está ligado.

21.3 Lei de Conservação do Momento Linear

Continuando com a obtenção das leis de conservação relacionadas com os campos eletromagnéticos, vamos voltar a discutir um problema interessante já visto na seção 20.7 (página 133) que trata da força de Lorentz entre duas cargas elétricas em movimento, dada pela expressão 20.137,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{F}}_q(t) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right. \\ \left. + \vec{\beta}_q \times \left[\frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{(\vec{\beta} \times \vec{R})(\vec{R} \cdot \frac{\vec{a}}{c})}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\frac{\vec{a}}{c} \times \vec{R}}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

lembrando que a carga Q está localizada na posição $\vec{r}_Q(t)$ e que ela tem uma velocidade $\vec{v} = c\vec{\beta}$ e uma aceleração $\vec{a} = c\vec{\alpha}$, enquanto a carga q , que sofre a força dada acima, está localizada em $\vec{r}_q(t)$ e tem velocidade $\vec{v}_q = c\vec{\beta}_q$. A distância entre as cargas é dada por $R(t_r) = |\vec{R}(t_r)| = |\vec{r}_Q(t_r) - \vec{r}_q(t_r)|$. De acordo com a expressão acima, a força produzida por Q sobre q nem sempre é igual e oposta à força produzida por q sobre Q , numa clara violação

da terceira lei de Newton! Um exemplo simples consiste em considerar duas cargas, Q_1 e Q_2 , estando ambas em movimento retilíneo uniforme com velocidades ortogonais entre si. Vamos supor que Q_1 está em movimento na direção x positiva, enquanto Q_2 move-se na direção y positiva. As cargas produzem campos elétricos que se orientam como na figura 20.4, isto é, eles são radiais a partir da posição atual das cargas. A força elétrica produzida por Q_1 sobre Q_2 está na direção da linha que une as cargas e tem mesmo módulo mas sentido oposto ao da força produzida por Q_2 sobre Q_1 , em acordo, portanto, com a terceira lei de Newton. As cargas produzem também campos magnéticos, como mostra a figura 20.5, e esses campos circulam em planos perpendiculares à direção de movimento das cargas. O campo magnético gerado por Q_1 sobre Q_2 produz uma força magnética orientada na direção x , ao passo que o campo magnético de Q_2 produz uma força magnética sobre Q_1 orientada na direção y (os sentidos dependem dos sinais das cargas). Conseqüentemente, as forças magnéticas que agem sobre elas não são iguais, contrariando a terceira lei de Newton.

Cabe aqui perguntar qual é a real importância da terceira lei de Newton, que estabelece que uma força agindo num corpo A produzida por B tem como reação uma força agindo em B produzida por A. Essa reação tem a mesma intensidade que a força inicial, mesma direção mas sentido oposto, e ela age ao mesmo tempo que a força de ação. É essa lei de grande importância na Física? A resposta é simples: a terceira lei de Newton estabelece a conservação do momento linear num dado sistema. Este é um dos princípios básicos fundamentais de toda a Física, estando ligado à questão da invariância das leis físicas quando os sistemas sofrem translações entre dois pontos. As leis físicas são as mesmas em locais diferentes do universo, ou seja, há uma única Física que descreve os fenômenos naturais. Se não fosse desse modo, cada galáxia, cada planeta, cada país teria seus próprios fenômenos, suas próprias leis, e o desenvolvimento científico tornar-se-ia impossível. Cientistas de lugares diferentes não teriam como discutir seus experimentos, pois as leis físicas que os descreveriam não seriam as mesmas, e não haveria confiabilidade nos resultados obtidos por eles. Em última análise, cada cientista teria que desenvolver a sua própria Física, e isso é irreal. Portanto, algo está sendo esquecido na questão referente às forças eletromagnéticas entre cargas e a conservação do momento linear.

O que está faltando na discussão da conservação de momento linear relacionado com fenômenos eletromagnéticos é a verificação de que, do mesmo modo como os campos armazenam energia, eles também transportam

momento linear (e angular). Isso inclusive já foi dito quando discutimos, no capítulo 3, o modo pelo qual a força elétrica age entre duas cargas pontuais. Lá introduzimos o conceito dos fótons, que são responsáveis pela troca de momento linear (e energia) entre as partículas, e dissemos que, quando a interação é entendida em termos desses fótons, a terceira lei de Newton volta a ser válida. Assim, o que se observa é que os campos eletromagnéticos têm momento linear associado a eles, e esse momento pode ser transferido para as cargas quando ocorrem interações entre elas e os campos. Há, pois, uma lei de conservação para o momento, e nosso objetivo agora é obter essa lei de conservação. Para tanto, partimos da força de Lorentz 15.25,

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$$

que é a força que age sobre uma partícula de carga Q . Se tivermos um volume V em que as cargas definam uma densidade de cargas ρ , a força total sobre essas cargas será

$$\vec{F} = \int_V (\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}) dV$$

ou

$$\vec{F} = \int_V (\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV$$

onde nos valem os fatos de que $\vec{J} = \rho\vec{v}$. Utilizamos agora as equações de Maxwell 21.1a,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

e 21.1d,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

para eliminar ρ e $\vec{J}$ da expressão acima para a força total, ou seja,

$$\vec{F} = \int_V \left[(\nabla \cdot \vec{D})\vec{E} + \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \right] dV$$

ou

$$\vec{F} = \int_V \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \times \vec{\mathcal{B}} \right] dV$$

Agora, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}) = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \times \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{D}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

de onde extraímos

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \times \vec{\mathcal{B}} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{D}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

Com o uso da equação de Maxwell 21.1c,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

obtemos

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \times \vec{\mathcal{B}} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}) + \vec{\mathcal{D}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}})$$

e assim, a força fica

$$\vec{F} = \int_V \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{D}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right] dV$$

ou

$$\vec{F} = \int_V \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) - \vec{\mathcal{D}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \right] dV - \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}) dV$$

Considerando que as cargas estão no vácuo, podemos escrever $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}$. Temos, então,

$$\begin{aligned} \vec{F} = \int_V \left[\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) \right] dV \\ - \int_V \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) dV \end{aligned}$$

Vamos somar o termo

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

na primeira integral, para torná-la mais simétrica. Note que o termo acima é nulo por causa da equação de Maxwell 21.1b,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Além disso, utilizamos também a expressão 21.10 para o vetor de Poynting,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

de modo que achamos

$$\begin{aligned} \vec{F} = & - \int_V \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} dV \\ & + \int_V \left\{ \epsilon_0 [\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] \right\} dV \end{aligned} \quad (21.28)$$

A força total que age sobre as cargas está relacionada ao momento mecânico total, através de

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} dV = \\ \int_V \left\{ \epsilon_0 [\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] \right\} dV \end{aligned}$$

Todos os termos na equação acima têm unidade de força, de modo que podemos identificar a integral do lado esquerdo com o momento linear eletromagnético transportado pelos campos, ou seja,

$$\vec{P}_{\text{el}} = \int_V \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} dV \quad (21.29)$$

sendo que o integrando é a densidade volumétrica de momento linear eletromagnético, isto é,

$$\vec{P}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad (21.30)$$

onde fizemos uso do fato de que $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Com as definições acima, temos

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} + \frac{d\vec{P}_{\text{el}}}{dt} = \int_V \left\{ \epsilon_0 [\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}})] \right\} dV$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{\text{mec}} + \vec{P}_{\text{el}}) = \int_V \left\{ \epsilon_0 [\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}})] \right\} dV$$

Definindo agora o momento linear total de um sistema como sendo a soma dos momentos mecânicos e eletromagnéticos, temos

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{mec}} + \vec{P}_{\text{el}} \quad (21.31)$$

e assim,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \int_V \left\{ \epsilon_0 [\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}})] \right\} dV \quad (21.32)$$

Precisamos reescrever agora o lado direito da expressão acima. Para isso, vamos precisar de algumas expressões adicionais. Começamos com

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}$$

e

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

além de

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) &= (\mathcal{E}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{j}} + \mathcal{E}_z \hat{\mathbf{k}}) \\ &\times \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) &= \mathcal{E}_x \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{k}} - \mathcal{E}_x \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{j}} \\ &- \mathcal{E}_y \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}} + \mathcal{E}_y \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &+ \mathcal{E}_z \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} - \mathcal{E}_z \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) &= \left\{ \mathcal{E}_y \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) - \mathcal{E}_z \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) \right\} \hat{\mathbf{i}} \\ &+ \left\{ \mathcal{E}_z \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \right) - \mathcal{E}_x \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) \right\} \hat{\mathbf{j}} \\ &+ \left\{ \mathcal{E}_x \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) - \mathcal{E}_y \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} \right) \right\} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Vamos escrever a componente na direção x do fator $\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}})$, isto é,

$$\begin{aligned} \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right]_x &= \\ \mathcal{E}_x \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) &- \mathcal{E}_y \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right) + \mathcal{E}_z \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right]_x = \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} + \mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}$$

A expressão acima pode ser reescrita através de

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y) = \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_z) = \mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} + \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}$$

Além disso, temos também que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2) = 2\mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + 2\mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} + 2\mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}$$

de modo que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2) = \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} + \mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{E}_x^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2) = \mathcal{E}_x \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} - \mathcal{E}_y \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \mathcal{E}_z \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}$$

Portanto, reunindo as expressões acima, temos

$$\left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right]_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{E}_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_z) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2)$$

ou

$$\left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right]_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{E}_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_z) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}})$$

Os três primeiros fatores do lado direito da equação acima podem ser escritos como

$$\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\mathcal{E}_x \mathcal{E}_{\beta}) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{E}_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{E}_x \mathcal{E}_z)$$

onde usamos a convenção de que $x_1 \leftrightarrow x$, $x_2 \leftrightarrow y$ e $x_3 \leftrightarrow z$. Assim,

$$\left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right]_x = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\mathcal{E}_x \mathcal{E}_{\beta}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}})$$

Por fim, o último fator pode ser incluído na somatória se utilizarmos uma função delta de Kronecker $\delta_{\alpha,\beta}$, definida por 2.13,

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

de modo que temos

$$\left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right]_x = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\mathcal{E}_x \mathcal{E}_{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{x,\beta})$$

e, em geral, a componente na direção α é

$$\left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right]_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\mathcal{E}_{\alpha} \mathcal{E}_{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{\alpha,\beta}) \quad (21.33)$$

O fator $\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}})$ relacionado ao campo magnético tem uma expressão semelhante (veja o exercício 21.4), ou seja,

$$\left[\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) \right]_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\mathcal{B}_{\alpha} \mathcal{B}_{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{\alpha,\beta}) \quad (21.34)$$

Vamos introduzir o *tensor das tensões de Maxwell* através de ²

$$\mathsf{T}_{\alpha,\beta} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_{\alpha} \mathcal{E}_{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{\alpha,\beta} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_{\alpha} \mathcal{B}_{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{\alpha,\beta} \right) \quad (21.35)$$

² Note que o tensor das tensões de Maxwell é um tensor de ordem 2.

Combinando agora as expressões 21.33 e 21.34 (com os coeficientes apropriados), temos

$$\left\{ \epsilon_0 \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) \right] \right\}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\epsilon_0 \left(\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{\alpha,\beta} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_\alpha \mathcal{B}_\beta - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{\alpha,\beta} \right) \right]$$

e utilizando a definição 21.35 para o tensor de Maxwell, obtemos

$$\left\{ \epsilon_0 \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) \right] \right\}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha,\beta}$$

Vamos explicitar o lado direito da expressão acima.

$$\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha,\beta} = \frac{\partial}{\partial x} T_{\alpha,x} + \frac{\partial}{\partial y} T_{\alpha,y} + \frac{\partial}{\partial z} T_{\alpha,z}$$

A expressão acima corresponde à componente α da divergência do tensor de Maxwell $\overleftrightarrow{T}$ ³, ou seja,

$$[\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}]_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} T_{\alpha,x} + \frac{\partial}{\partial y} T_{\alpha,y} + \frac{\partial}{\partial z} T_{\alpha,z} \quad (21.36)$$

e assim, podemos escrever

$$\left\{ \epsilon_0 \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) \right] \right\}_\alpha = [\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}]_\alpha$$

e também

³ Lembrando que a divergência de um tensor de ordem n resulta num tensor de ordem $n - 1$. Assim, a divergência de um tensor de ordem 2, como é o caso do tensor de Maxwell, resulta num tensor de ordem 1, ou seja, num vetor. A divergência de um vetor produz um tensor de ordem zero, ou seja, um escalar.

$$\epsilon_0 \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) \right] = \nabla \cdot \vec{\mathcal{T}} \quad (21.37)$$

Vamos retomar a expressão 21.32,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \int_V \left\{ \epsilon_0 \left[\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{\mathcal{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) \right] \right\} dV$$

Utilizando a equação 21.37, temos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{T}} dV$$

Aplicando agora o teorema do divergente ao lado direito da equação acima, obtemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \oint_S \vec{\mathcal{T}} \cdot \hat{n} dA \quad (21.38)$$

que estabelece uma lei de conservação para o momento linear total do sistema formado pelas cargas e pelos campos eletromagnéticos por elas produzidos. A taxa de variação temporal do momento linear total é dada pelo fluxo de $\vec{\mathcal{T}}$ através da superfície S que delimita o volume V no qual estão as cargas. Como o lado esquerdo da expressão acima tem unidade de força, o tensor das tensões de Maxwell tem unidade de força por unidade de área. Mais precisamente, a componente $T_{\alpha,\beta}$ é a força por unidade de área orientada na direção α agindo num elemento de superfície cujo versor normal está orientado na direção β . Assim, os componentes “diagonais” de $\vec{\mathcal{T}}$ (T_{xx} , T_{yy} e T_{zz}) são pressões, ao passo que os outros componentes (T_{xy} , T_{xz} , etc.) representam cisalhamentos.

Vamos definir agora uma densidade volumétrica de momento linear mecânico $\vec{p}_{\text{mec}}$, de modo que o momento linear total mecânico seja obtido mediante

$$\vec{P}_{\text{mec}} = \int_V \vec{p}_{\text{mec}} dV \quad (21.39)$$

Utilizando a equação 21.30,

$$\vec{p}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

a densidade volumétrica total de momento linear (eletromagnético + mecânico) é dada por

$$\vec{p} = \vec{p}_{\text{mec}} + \vec{p}_{\text{el}} = \vec{p}_{\text{mec}} + \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} \quad (21.40)$$

de modo que o momento linear total é obtido por meio de

$$\vec{P} = \int_V \vec{p} dV \quad (21.41)$$

Substituindo esta expressão em 21.38 e utilizando novamente o teorema do divergente, ficamos com

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{p} dV = \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} dV$$

ou

$$\int_V \left[\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} \right] dV = 0$$

Como o volume V é qualquer, o integrando deve ser sempre nulo, ou seja,

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = 0 \quad (21.42)$$

Comparando esta expressão com a equação de continuidade 12.21,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

vemos que $-\overleftrightarrow{T}$ faz o papel da densidade de corrente $\vec{J}$, isto é, $-\overleftrightarrow{T}$ é um fluxo de momento através da superfície S que delimita o volume V . Mais especificamente, por causa da natureza tensorial de $\overleftrightarrow{T}$, a componente $-\overleftrightarrow{T}_{\alpha,\beta}$ representa o fluxo de momento orientado na direção α cruzando um elemento de superfície orientado na direção β .

Exemplo 21.2. Um cabo coaxial de comprimento L como o do exemplo 21.1 transporta uma corrente i quando submetido a uma diferença de potencial V . Além disso, o condutor de raio R_1 tem uma densidade linear de carga positiva λ , ao passo que o condutor de raio R_2 tem uma densidade linear $-\lambda$. Determine o momento linear armazenado nos campos.

O cabo coaxial do exemplo 21.1 é reproduzido na figura 21.2.

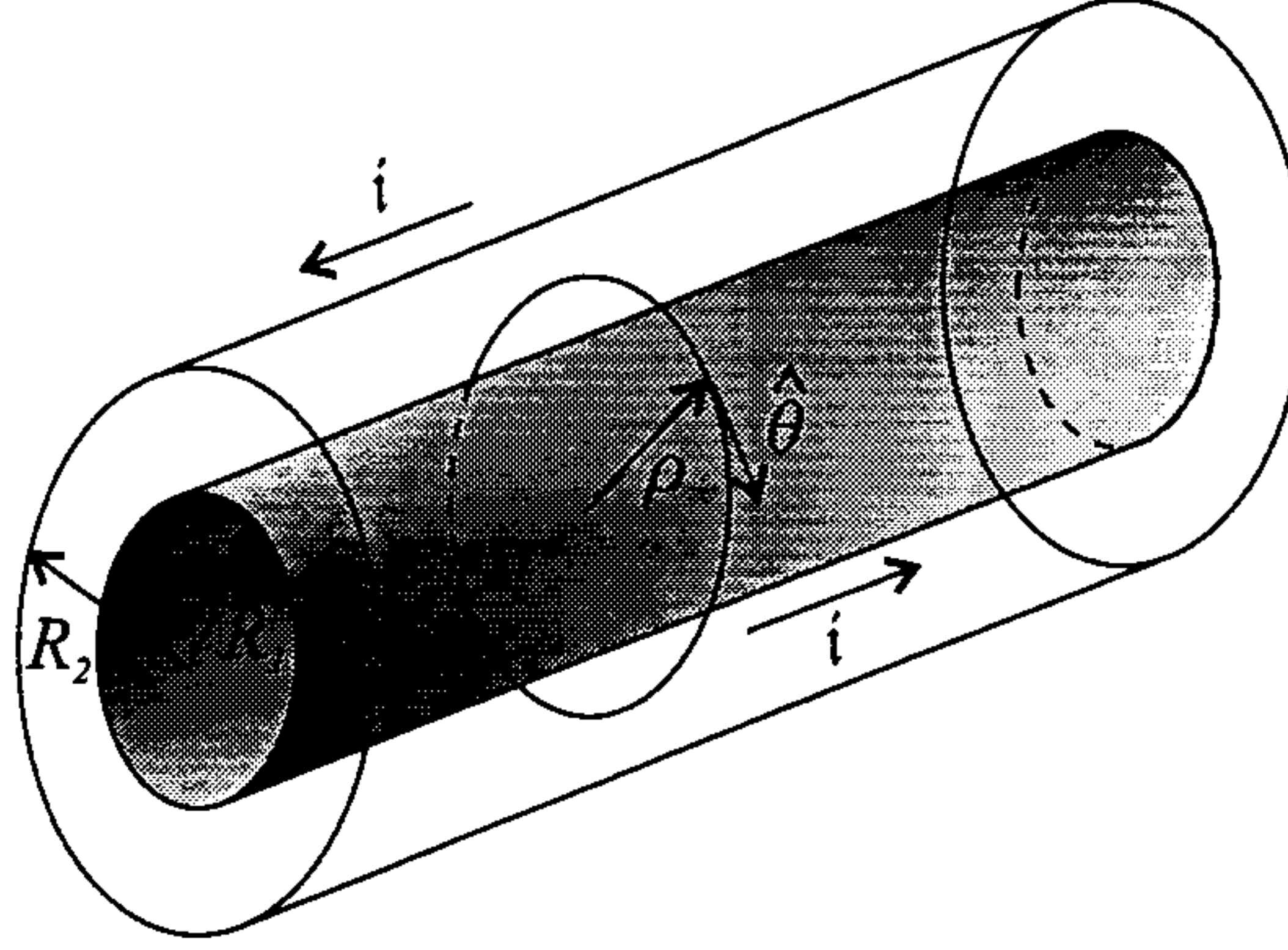


Figura 21.2: Reprodução do cabo coaxial da figura 21.1.

Os campos na configuração acima são obtidos diretamente das leis de Gauss e Ampère usuais, e eles ficam

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$

e

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

de modo que o campo $\vec{\mathcal{H}}$ vale

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

e o vetor de Poynting torna-se

$$\vec{S} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho} \times \frac{i}{2\pi\rho} \hat{\theta}$$

ou

$$\vec{S} = \frac{\lambda i}{4\pi^2 \epsilon_0 \rho^2} \hat{\mathbf{k}}$$

A densidade volumétrica de momento linear eletromagnético é dada pela equação 21.30,

$$\vec{p}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

de modo que

$$\vec{p}_{\text{el}} = \frac{\mu_0 \lambda i}{4\pi^2 \rho^2} \hat{\mathbf{k}}$$

O momento linear eletromagnético é obtido por meio da expressão 21.29,

$$\vec{P}_{\text{el}} = \int_V \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} dV$$

ou

$$\vec{P}_{\text{el}} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\mu_0 \lambda i}{4\pi^2 \rho^2} \hat{\mathbf{k}} \rho d\rho d\theta dz$$

ou ainda,

$$\vec{P}_{\text{el}} = \frac{\mu_0 \lambda i}{4\pi^2} 2\pi L \hat{\mathbf{k}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho}$$

ou então,

$$\vec{P}_{\text{el}} = \frac{\mu_0 \lambda i}{4\pi^2} 2\pi L \hat{\mathbf{k}} [\ln \rho]_{R_1}^{R_2}$$

ou

$$\vec{P}_{\text{el}} = \frac{\mu_0 \lambda i L}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \hat{\mathbf{k}}$$

Assim, os campos eletromagnéticos associados ao cabo coaxial da figura 21.2 têm um momento linear associado, cujo valor é dado pela expressão acima. Note que o cabo como um todo não está se movendo. Em particular, seu centro

de massa não está se movendo, de modo que seu momento linear total deveria ser nulo. Isso indica que deve haver um momento linear mecânico no sistema que compense exatamente o momento linear eletromagnético acima, fazendo com que o momento linear total seja nulo. Esse momento linear mecânico “escondido” de fato existe, e ele tem origem relativística. No próximo exemplo vamos tratar desse momento linear.

Exemplo 21.3. *Para entender o surgimento do momento linear mecânico que compensa o momento linear eletromagnético no exemplo acima, vamos considerar um circuito retangular simples como o mostrado na figura 21.3.*

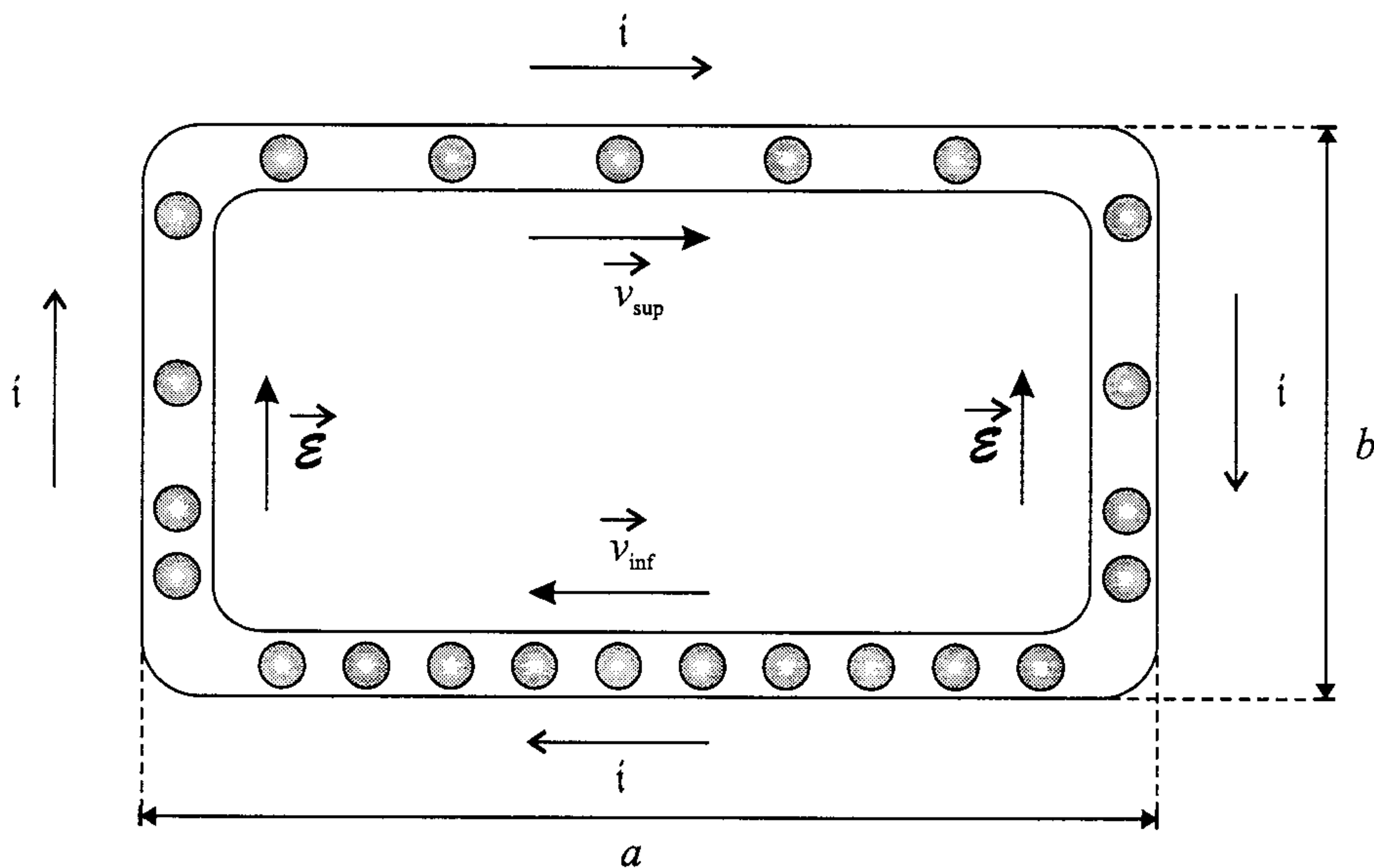


Figura 21.3: Circuito retangular para demonstração do momento linear mecânico “escondido”.

O circuito apresentado na figura 21.3 é um modelo para um dipolo magnético. Por todos os quatro segmentos do fio circula uma corrente elétrica i constante. Quando um campo elétrico $\vec{E}$ uniforme é aplicado ao fio conforme indicado na figura, as cargas positivas (supostas não-interagentes entre si) aceleram no ramo esquerdo do circuito e desaceleram no ramo direito. Nosso objetivo agora é determinar o momento linear das cargas no circuito.

O modelo acima é bastante simples e certamente não é realista. Apesar disso, os resultados que são obtidos por meio dele são os mesmos que os extraídos de outros modelos mais complicados. Para o cálculo dos momentos, precisamos nos preocupar apenas com os segmentos superior e inferior do fio, já que o momento das cargas no lado esquerdo é cancelado pelo momento das cargas no lado direito. Vamos considerar que N_{sup} cargas estejam localizadas no ramo superior, movendo-se com velocidade constante $\vec{v}_{\text{sup}}$ para a direita, enquanto N_{inf} cargas estão se movendo para a esquerda com velocidade $\vec{v}_{\text{inf}}$ no ramo inferior do circuito. A corrente i por todo o circuito é a mesma, de modo que

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\ell} \frac{d\ell}{dt} = \lambda \vec{v}$$

onde λ é a densidade linear de cargas positivas. Considerando que o valor de uma das cargas seja q , podemos escrever

$$\lambda = \begin{cases} \frac{qN_{\text{sup}}}{a} & \text{segmento superior} \\ \frac{qN_{\text{inf}}}{a} & \text{segmento inferior} \end{cases}$$

para a densidade linear de cargas nos segmentos horizontais do fio. Assim,

$$i = \frac{qN_{\text{sup}}}{a} v_{\text{sup}} = \frac{qN_{\text{inf}}}{a} v_{\text{inf}}$$

ou

$$N_x v_x = \frac{ai}{q}$$

onde x indica tanto o ramo inferior quanto o superior. Classicamente, o momento linear de uma partícula de massa m é dado por $\vec{p} = m\vec{v}$. Portanto, o momento linear das N_{sup} partículas do ramo superior é dado em módulo por

$$p_{\text{sup,classico}} = mN_{\text{sup}} v_{\text{sup}} = \frac{mai}{q}$$

ao passo que o momento linear (em módulo) das N_{inf} partículas do ramo inferior vale

$$p_{\text{inf,classico}} = mN_{\text{inf}} v_{\text{inf}} = \frac{mai}{q}$$

de modo que o momento linear total, que é a subtração dos dois momentos lineares acima, por causa das suas orientações, é nulo, ou seja,

$$p_{\text{classico}} = p_{\text{sup,classico}} - p_{\text{inf,classico}} = \frac{mai}{q} - \frac{mai}{q} = 0$$

que é um resultado clássico esperado, já que o circuito não se move e o seu momento linear total deveria ser mesmo nulo. Por outro lado, se tratarmos o sistema de um ponto de vista relativístico, temos que o momento linear é dado pela expressão F.60,

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

que em módulo fica

$$p = \gamma m_0 v$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula (o nosso m) e γ é dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De acordo com a expressão relativística acima, o módulo do momento linear no ramo superior vale

$$p_{\text{sup,rel.}} = m\gamma_{\text{sup}} N_{\text{sup}} v_{\text{sup}} = \frac{\gamma_{\text{sup}} mai}{q}$$

ao passo que o momento linear (em módulo) no ramo inferior vale

$$p_{\text{inf,rel.}} = m\gamma_{\text{inf}} N_{\text{inf}} v_{\text{inf}} = \frac{\gamma_{\text{inf}} mai}{q}$$

o que resulta num momento linear total

$$\begin{aligned}
p_{\text{rel.}} &= p_{\text{sup,rel.}} - p_{\text{inf,rel.}} \\
&= \frac{\gamma_{\text{sup}} m_{\text{ai}}}{q} - \frac{\gamma_{\text{inf}} m_{\text{ai}}}{q} \\
p_{\text{rel.}} &= (\gamma_{\text{sup}} - \gamma_{\text{inf}}) \frac{m_{\text{ai}}}{q}
\end{aligned} \tag{21.43}$$

que é não-nulo, já que as cargas no segmento superior do fio se movem com velocidade maior do que aquelas no segmento inferior.

O trabalho realizado pela força elétrica nos segmentos verticais pode ser relacionado com a energia das partículas nos ramos horizontais. Para isso, precisamos da relação F.68,

$$K = W = mc^2 - m_0c^2$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula (o nosso m). O trabalho realizado pela força elétrica ao transferir uma carga q no segmento esquerdo do fio por uma distância b é dado por

$$W = Fb = q\mathcal{E}b$$

A energia cinética de uma carga no ramo inferior vale

$$\begin{aligned}
K_{\text{inf,rel.}} &= m_{\text{inf}} c^2 - mc^2 \\
&= \gamma_{\text{inf}} mc^2 - mc^2 \\
K_{\text{inf,rel.}} &= (\gamma_{\text{inf}} - 1)mc^2
\end{aligned}$$

ao passo que, no ramo superior, temos

$$\begin{aligned}
K_{\text{sup,rel.}} &= m_{\text{sup}} c^2 - mc^2 \\
&= \gamma_{\text{sup}} mc^2 - mc^2 \\
K_{\text{sup,rel.}} &= (\gamma_{\text{sup}} - 1)mc^2
\end{aligned}$$

de modo que a diferença de energia é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta K_{\text{rel.}} &= K_{\text{sup,rel.}} - K_{\text{inf,rel.}} \\
&= (\gamma_{\text{sup}} - 1)mc^2 - (\gamma_{\text{inf}} - 1)mc^2 \\
\Delta K_{\text{rel.}} &= (\gamma_{\text{sup}} - \gamma_{\text{inf}})mc^2
\end{aligned}$$

Essa diferença de energia é justamente o trabalho realizado pela força elétrica, ou seja,

$$W = \Delta K$$

ou

$$q\mathcal{E}b = (\gamma_{\text{sup}} - \gamma_{\text{inf}})mc^2$$

e assim, obtemos

$$\gamma_{\text{sup}} - \gamma_{\text{inf}} = \frac{q\mathcal{E}b}{mc^2}$$

Retornando agora à equação 21.43, ficamos com

$$p_{\text{rel.}} = \frac{q\mathcal{E}b}{mc^2} \frac{mai}{q}$$

ou

$$p_{\text{rel.}} = \frac{\mathcal{E}abi}{c^2}$$

Note que ab é a área do retângulo, de modo que

$$p_{\text{rel.}} = \frac{\mathcal{E}Ai}{c^2}$$

O produto Ai é o módulo do momento de dipolo magnético do circuito, que está orientado perpendicularmente ao plano da página, entrando nela. Além disso, o momento linear está orientado na direção horizontal para a direita, enquanto o campo elétrico está na direção vertical para cima. Reunindo essas observações, podemos escrever, vetorialmente,

$$\vec{p} = \frac{\vec{m} \times \vec{\mathcal{E}}}{c^2} \quad (21.44)$$

Conseqüentemente, um dipolo magnético num campo elétrico externo adquire um momento linear mecânico, mesmo que seu centro de massa esteja em repouso. Esse momento “escondido” tem origem relativística e compensa o momento linear eletromagnético contido nos campos eletromagnéticos do sistema.

É interessante demonstrar que o momento linear mecânico “escondido” é contrabalançado por um momento linear eletromagnético contido nos campos. Para ver isso, vamos considerar que o campo elétrico da figura 21.3 seja um campo eletrostático gerado por uma distribuição localizada de cargas elétricas (não mostradas na figura) e que, portanto, esteja relacionado a um potencial elétrico através de

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathbb{V}$$

Além disso, a corrente percorrendo o momento magnético tem associada a ela uma densidade de corrente $\vec{J}$, e ela produz um campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$. O momento linear armazenado no campo eletromagnético é obtido através de 21.29,

$$\vec{P}_{\text{el}} = \int_V \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{S}} dV$$

ou

$$\vec{P}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} dV$$

ou ainda,

$$\vec{P}_{\text{el}} = -\epsilon_0 \mu_0 \int_V \nabla\mathbb{V} \times \vec{\mathcal{H}} dV$$

Agora, utilizamos a identidade 1.58f,

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = (\nabla\Phi) \times \vec{A} + \Phi(\nabla \times \vec{A})$$

para escrever

$$\nabla \times (\mathbb{V} \vec{\mathcal{H}}) = (\nabla\mathbb{V}) \times \vec{\mathcal{H}} + \mathbb{V}(\nabla \times \vec{\mathcal{H}})$$

ou

$$(\nabla\mathbb{V}) \times \vec{\mathcal{H}} = \nabla \times (\mathbb{V} \vec{\mathcal{H}}) - \mathbb{V}(\nabla \times \vec{\mathcal{H}})$$

de modo que o momento linear eletromagnético torna-se

$$\vec{P}_{\text{el}} = -\epsilon_0 \mu_0 \int_V \nabla \times (\mathbb{V} \vec{\mathcal{H}}) dV + \epsilon_0 \mu_0 \int_V \mathbb{V}(\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) dV$$

A identidade 1.64c diz que

$$\int_V \nabla \times \vec{B} dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{B} dA$$

Além disso, a lei de Ampère-Maxwell 21.1d,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

pode ser utilizada para substituir o campo magnético pela densidade de corrente. Note que na situação eletrostática o deslocamento elétrico $\vec{\mathcal{D}}$ independe do tempo, de modo que temos a lei de Ampère usual,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}$$

e o momento linear eletromagnético fica

$$\vec{P}_{cl} = -\epsilon_0 \mu_0 \oint_S \hat{n} \times (\nabla \vec{\mathcal{H}}) dA + \epsilon_0 \mu_0 \int_V \nabla \vec{J} dV$$

As integrais são feitas sobre todo o espaço, de modo que a superfície S se encontra no infinito. Como o elemento de área dA cresce de uma forma proporcional a r^2 , se o produto $\nabla \vec{\mathcal{H}}$ for proporcional a r^{-n} , sendo $n > 2$, a integral de superfície se anula. Como o campo elétrico é gerado por uma distribuição localizada de cargas, o potencial elétrico é, no mínimo, dominado pelo termo de monopólo, que varia com r^{-1} . O campo magnético do dipolo magnético, por sua vez, é dominado pelo termo de dipolo, que varia com r^{-3} , o que indica que o produto $\nabla \vec{\mathcal{H}}$ tem uma dependência com a distância na forma r^{-4} , fazendo com que a integral de superfície se anule no infinito. Resta, portanto,

$$\vec{P}_{cl} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \nabla \vec{J} dV$$

Agora, podemos supor que as dimensões do dipolo sejam tais que o potencial elétrico varie suavemente na posição do dipolo, de modo que podemos expandir o potencial numa série de Taylor em torno da posição do dipolo, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}) \simeq \mathbb{V}(0) + [\nabla \mathbb{V}]_0 \cdot \vec{r}$$

sendo que o dipolo, por hipótese, encontra-se em $\vec{r} = 0$, e consideramos os dois primeiros termos da série de Taylor 2.9 para expandir o potencial elétrico. Utilizando essa expansão, o momento linear eletromagnético torna-se

$$\vec{P}_{cl} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V [\mathbb{V}(0) - \vec{\mathcal{E}}(0) \cdot \vec{r}] \vec{J} dV$$

ou

$$\vec{P}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbb{V}(0) \int_V \vec{J} dV - \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{E}}(0) \cdot \int_V \vec{r} \vec{J} dV$$

A equação 15.59 diz que

$$\int_V \vec{J} dV = 0$$

Além disso, a expressão 15.63, válida para um vetor $\vec{A}$ qualquer, estabelece que

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} J_i dV = [\vec{m} \times \vec{A}]_i$$

de modo que

$$\vec{A} \cdot \int_V \vec{r} \vec{J} dV = \vec{m} \times \vec{A}$$

e então,

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \int_V \vec{r} \vec{J} dV = \vec{m} \times \vec{\mathcal{E}}$$

o que faz com que o momento linear eletromagnético fique

$$\vec{P}_{\text{el}} = -\epsilon_0 \mu_0 \vec{m} \times \vec{\mathcal{E}}(0)$$

ou

$$\vec{P}_{\text{el}} = -\frac{\vec{m} \times \vec{\mathcal{E}}(0)}{c^2}$$

Lembrando que o momento linear mecânico escondido é dado pela expressão 21.44,

$$\vec{p} = \frac{\vec{m} \times \vec{\mathcal{E}}}{c^2}$$

notamos que eles são iguais a menos de sinal, de modo que o momento linear total torna-se

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{el}} + \vec{P}_{\text{mec}} = -\frac{\vec{m} \times \vec{\mathcal{E}}(0)}{c^2} + \frac{\vec{m} \times \vec{\mathcal{E}}}{c^2} = 0$$

Assim, o momento linear total se anula, conforme esperado.

Exemplo 21.4. Considere duas cargas de valor Q localizadas no eixo z em $z = \pm d$. Determine a força entre as cargas por meio do tensor das tensões de Maxwell, considerando como superfície de integração o plano xy .

Para calcular a força entre as cargas, vamos precisar da expressão 21.38,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \oint_S \vec{T} \cdot \hat{n} dA$$

lembrando que, por 21.31,

$$\vec{P} = \vec{P}_{\text{mec}} + \vec{P}_{\text{el}}$$

e que, de acordo com 21.29,

$$\vec{P}_{\text{el}} = \int_V \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} dV$$

Como (lembrando a expressão 21.10)

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

e as cargas estão paradas, não há campo magnético, nem vetor de Poynting, de modo que o momento linear eletromagnético é nulo e o momento linear total é dado apenas pelo momento mecânico. Assim, a expressão 21.38 reduz-se a

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} = \vec{F} = \oint_S \vec{T} \cdot \hat{n} dA$$

As cargas estão localizadas em $\vec{r}_Q = \pm d \hat{\mathbf{k}}$. O campo elétrico gerado por uma carga pontual é dado por

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

de modo que o campo elétrico gerado pelas cargas vale

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r} + d \hat{\mathbf{k}}}{|\vec{r} + d \hat{\mathbf{k}}|^3} + \frac{\vec{r} - d \hat{\mathbf{k}}}{|\vec{r} - d \hat{\mathbf{k}}|^3} \right]$$

ou, considerando que $\vec{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (z+d)\hat{\mathbf{k}}}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + (z-d)\hat{\mathbf{k}}}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

e, no plano xy , temos $z = 0$, de forma que

$$\vec{\mathcal{E}}_{xy} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + d\hat{\mathbf{k}}}{[x^2 + y^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} - d\hat{\mathbf{k}}}{[x^2 + y^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{xy} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{[x^2 + y^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (21.45)$$

A força orienta-se na direção z , e precisamos calcular

$$[\vec{\mathbf{T}} \cdot \hat{n} dA]_z = T_{zx} dA_x + T_{zy} dA_y + T_{zz} dA_z$$

Como a área é dada por

$$\hat{n} dA = dydx \hat{\mathbf{k}}$$

Precisamos nos preocupar apenas com a componente T_{zz} , ou seja, utilizando 21.35,

$$T_{zz} = \epsilon_0 \left[\mathcal{E}_z \mathcal{E}_z - \frac{1}{2} (\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 + \mathcal{E}_z^2) \right]$$

ou

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} [\mathcal{E}_z^2 - \mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2]$$

Assim,

$$[\vec{\mathbf{T}} \cdot \hat{n} dA]_z = \frac{\epsilon_0}{2} [\mathcal{E}_z^2 - \mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2] dydx$$

Como o campo elétrico 21.45 não tem componente z , ficamos com

$$[\vec{\mathbf{T}} \cdot \hat{n} dA]_z = -\frac{\epsilon_0}{2} [\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2] dydx$$

ou

$$[\vec{T} \cdot \hat{n} dA]_z = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\frac{Q^2}{4\pi^2\epsilon_0^2} \frac{x^2}{[x^2 + y^2 + d^2]^3} + \frac{Q^2}{4\pi^2\epsilon_0^2} \frac{y^2}{[x^2 + y^2 + d^2]^3} \right] dydx$$

ou ainda,

$$[\vec{T} \cdot \hat{n} dA]_z = -\frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0} \left[\frac{x^2 + y^2}{[x^2 + y^2 + d^2]^3} \right] dydx$$

Assim, a força entre as cargas fica

$$F_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0} \left[\frac{x^2 + y^2}{[x^2 + y^2 + d^2]^3} \right] dydx$$

ou

$$F_z = -\frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x^2 + y^2}{[x^2 + y^2 + d^2]^3} \right] dydx$$

A integração acima pode ser feita em coordenadas polares, de modo que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \qquad dA = \rho d\rho d\theta$$

e então,

$$F_z = -\frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{[\rho^2 + d^2]^3} \right] \rho d\rho d\theta$$

A integral em θ é imediata, e temos

$$F_z = -\frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0} (2\pi) \int_0^{\infty} \frac{\rho^3 d\rho}{[\rho^2 + d^2]^3}$$

Agora, fazemos a substituição

$$\begin{aligned} \rho &= d \operatorname{tg} \phi & d\rho &= d \sec^2 \phi d\phi \\ \rho_1 = 0 &\rightarrow \phi_1 = 0 & \rho_2 = \infty &\rightarrow \phi_2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

de modo que

$$F_z = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^3 \operatorname{tg}^3 \phi \, d \sec^2 \phi \, d\phi}{[d^2 \operatorname{tg}^2 \phi + d^2]^3}$$

ou

$$F_z = -\frac{Q^2 d^4}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^3 \phi \sec^2 \phi \, d\phi}{d^6 \sec^6 \phi}$$

ou ainda,

$$F_z = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3 \phi \cos^4 \phi \, d\phi$$

ou então,

$$F_z = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 \phi \cos \phi \, d\phi$$

que é resolvida mediante

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}^4 \phi \\ du &= 4 \operatorname{sen}^3 \phi \cos \phi \, d\phi \\ \frac{du}{4} &= \operatorname{sen}^3 \phi \cos \phi \, d\phi \end{aligned}$$

e então,

$$F_z = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{4}$$

ou

$$F_z = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left[\frac{u}{4} \right]_{u_1}^{u_2}$$

ou ainda,

$$F_z = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \left[\operatorname{sen}^4 \phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ou, finalmente,

$$F_z = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$$

que é a força que age sobre a carga Q situada em $z = -d\hat{\mathbf{k}}$. Esse é um resultado esperado, já que a força entre as duas cargas é dada em módulo por

$$F_z = Q\mathcal{E} = Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2d)^2}$$

ou seja,

$$F_z = Q\mathcal{E} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$$

e como elas têm mesmo sinal; a força é repulsiva, e sobre a carga em $z = -d\hat{\mathbf{k}}$ a força orienta-se na direção negativa do eixo z .

21.4 Lei de Conservação do Momento Angular

Já vimos que os campos eletromagnéticos transportam energia e momento linear. Essas grandezas têm leis de conservação associadas, e num sistema eletromecânico podem ocorrer transformações entre as formas mecânicas e eletromagnéticas dessas grandezas. Assim, não deve ser surpresa o fato de os campos também transportarem momento angular, o que já foi inclusive comentado no exemplo 18.3 estudado no volume II. Nosso objetivo agora é, portanto, determinar a lei de conservação do momento angular num sistema formado por partículas e campos eletromagnéticos. Para determinar essa lei, partimos da definição usual para o torque produzido por uma força aplicada num dado ponto, ou seja,

$$\vec{\mathbb{T}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

No nosso caso, a força em questão é obtida da expressão 21.28,

$$\vec{F} = - \int_V \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} dV + \int_V \left\{ \epsilon_0 [\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] \right\} dV$$

considerando que precisamos da densidade volumétrica de força, ou seja,

$$\vec{f} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \epsilon_0 [\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})]$$

Assim, para a densidade de torque, temos

$$\vec{t} = \vec{r} \times \vec{f}$$

ou

$$\vec{t} = \vec{r} \times \left\{ -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \epsilon_0 [\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] \right\}$$

Com o uso de 21.30,

$$\vec{p}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

e 21.37,

$$\epsilon_0 [\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0} [\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] = \nabla \cdot \vec{T}$$

achamos

$$\vec{t} = -\vec{r} \times \frac{\partial \vec{p}_{\text{el}}}{\partial t} + \vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T} \quad (21.46)$$

O torque total no sistema é dado pela integral da expressão acima, ou seja,

$$\vec{\mathbb{T}} = \int_V \vec{\mathfrak{t}} dV$$

e ele está relacionado à variação temporal do momento angular (mecânico) total do sistema mediante

$$\vec{\mathbb{T}} = \frac{d\vec{\mathbb{L}}_{\text{mec}}}{dt}$$

Podemos definir uma densidade volumétrica de momento angular mecânico por meio de

$$\vec{\mathbb{L}}_{\text{mec}} = \int_V \vec{\mathfrak{l}}_{\text{mec}} dV \quad (21.47)$$

Assim, reunindo as expressões acima, temos

$$\int_V \vec{\mathfrak{t}} dV = \frac{d}{dt} \int_V \vec{\mathfrak{l}}_{\text{mec}} dV$$

ou

$$\int_V \vec{\mathfrak{t}} dV - \int_V \frac{\partial \vec{\mathfrak{l}}_{\text{mec}}}{\partial t} dV = 0$$

ou ainda,

$$\int_V \left[\vec{\mathfrak{t}} - \frac{\partial \vec{\mathfrak{l}}_{\text{mec}}}{\partial t} \right] dV = 0$$

de modo que obtemos

$$\vec{\mathfrak{t}} = \frac{\partial \vec{\mathfrak{l}}_{\text{mec}}}{\partial t}$$

Retornando à equação 21.46, obtemos

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{l}}_{\text{mec}}}{\partial t} + \vec{r} \times \frac{\partial \vec{\mathfrak{p}}_{\text{el}}}{\partial t} = \vec{r} \times \nabla \cdot \vec{\mathbb{T}}$$

Podemos escrever agora

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \times \vec{p}_{\text{el}}) = \vec{r} \times \frac{\partial \vec{p}_{\text{el}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \vec{p}_{\text{el}}$$

O termo

$$\vec{l}_{\text{el}} = \vec{r} \times \vec{p}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times \vec{S} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (21.48)$$

é a densidade volumétrica de momento angular eletromagnético. Note que as posições $\vec{r}$ não dependem de t , de modo que a derivada temporal é nula. Assim, ficamos com

$$\frac{\partial \vec{l}_{\text{el}}}{\partial t} = \vec{r} \times \frac{\partial \vec{p}_{\text{el}}}{\partial t}$$

e achamos

$$\frac{\partial \vec{l}_{\text{mec}}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{l}_{\text{el}}}{\partial t} = \vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{l}_{\text{mec}} + \vec{l}_{\text{el}}) = \vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T}$$

Definindo a densidade volumétrica total de momento angular como sendo a soma das densidades mecânica e eletromagnética, temos

$$\vec{l} = \vec{l}_{\text{mec}} + \vec{l}_{\text{el}} \quad (21.49)$$

de forma que

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = \vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T} \quad (21.50)$$

Precisamos agora reescrever o lado direito da expressão acima para obter uma forma mais compacta e semelhante às outras leis de conservação obtidas anteriormente. É interessante introduzir uma notação em termos de índices para efetuar as operações envolvendo tensores e vetores. Um vetor qualquer $\vec{v}$ pode ser escrito em coordenadas retangulares como

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

ou também,

$$\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z$$

onde $\hat{e}_\alpha$ indica o versor da direção α . Podemos ainda escrever

$$\vec{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3$$

sendo que agora estabelecemos que $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 2$ e $z \rightarrow 3$. A expressão acima pode ser condensada em

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i = \sum_i v_i \hat{e}_i \quad (21.51)$$

onde, na última forma, está implícito o fato de a somatória em i varrer todos os valores possíveis desse índice ⁴. A notação acima é extremamente conveniente, pois, se o número de dimensões do espaço for alterada, a forma funcional acima permanece, e apenas a faixa de variação do índice i muda. De fato, Einstein propôs mais uma simplificação para a expressão acima, considerando que, quando o mesmo índice aparece repetido, isso significa que deve-se efetuar uma soma sobre esse índice. Assim, de acordo com a notação de Einstein, a expressão para um vetor fica, simplesmente,

$$\vec{v} = v_i \hat{e}_i$$

e o fato de o índice i aparecer repetido na expressão acima indica que uma soma sobre todos os valores possíveis para ele deve ser feita. Eventualmente iremos utilizar a notação de Einstein, mas, no momento, vamos preferir a forma dada em 21.51. Vetores são tensores de primeira ordem, e o tensor das tensões de Maxwell é um tensor de segunda ordem. Nesse caso, um tensor $\vec{T}$ qualquer de segunda ordem pode ser escrito formalmente como

$$\begin{aligned} \vec{T} = & T_{xx} \hat{i}\hat{i} + T_{xy} \hat{i}\hat{j} + T_{xz} \hat{i}\hat{k} \\ & + T_{yx} \hat{j}\hat{i} + T_{yy} \hat{j}\hat{j} + T_{yz} \hat{j}\hat{k} + T_{zx} \hat{k}\hat{i} + T_{zy} \hat{k}\hat{j} + T_{zz} \hat{k}\hat{k} \end{aligned}$$

ou

⁴ Ou seja, $i = 1, 2$ e 3 , em seqüência, em três dimensões.

$$\begin{aligned}\vec{T} = & T_{xx}\hat{e}_x\hat{e}_x + T_{xy}\hat{e}_x\hat{e}_y + T_{xz}\hat{e}_x\hat{e}_z + T_{yx}\hat{e}_y\hat{e}_x \\ & + T_{yy}\hat{e}_y\hat{e}_y + T_{yz}\hat{e}_y\hat{e}_z + T_{zx}\hat{e}_z\hat{e}_x + T_{zy}\hat{e}_z\hat{e}_y + T_{zz}\hat{e}_z\hat{e}_z\end{aligned}$$

ou ainda, em termos de somas,

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \sum_{i,j} T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$$

onde novamente está implícito, na última expressão, o fato de as somas se estenderem por todos os valores possíveis de i e j . É fácil perceber que um tensor de ordem n tem n índices livres. Por exemplo, um tensor de terceira ordem em três dimensões é expresso por

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 T_{ijk}\hat{e}_i\hat{e}_j\hat{e}_k = \sum_{i,j,k} T_{ijk}\hat{e}_i\hat{e}_j\hat{e}_k$$

Os tensores de segunda ordem podem ser escritos também em termos de matrizes quadradas, na forma

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Note que um tensor de segunda ordem tem, em geral, 9 componentes, e um tensor de terceira ordem tem 27 componentes. O tensor das tensões de Maxwell, por exemplo, é um tensor simétrico, de modo que, das suas 9 componentes, apenas 6 são independentes. Para ver isso, partimos da definição 21.35, ou seja,

$$T_{\alpha,\beta} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{\alpha,\beta} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_\alpha \mathcal{B}_\beta - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{\alpha,\beta} \right)$$

Quando substituirmos α por β e vice-versa na expressão acima, achamos

$$T_{\beta,\alpha} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\alpha - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{\beta,\alpha} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_\beta \mathcal{B}_\alpha - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{\beta,\alpha} \right)$$

As expressões acima são iguais, de modo que

$$T_{\alpha,\beta} = T_{\beta,\alpha} \quad (21.52)$$

o que caracteriza o tensor das tensões de Maxwell como sendo simétrico. Retornando ao nosso problema inicial, que é reescrever a expressão 21.50,

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T}$$

observamos que vamos precisar também do operador ∇ escrito em termos de somas. Ele é dado em coordenadas retangulares por

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

ou

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ou ainda,

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Podemos agora iniciar o desenvolvimento de que necessitamos. Vamos escrever nossas grandezas relevantes como sendo

$$\vec{r} = \sum_i x_i \hat{e}_i \quad \vec{T} = \sum_{j,k} T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k \quad \nabla = \sum_\ell \hat{e}_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

Vamos calcular primeiramente o fator

$$\nabla \cdot \vec{T} = \left[\sum_\ell \hat{e}_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right] \cdot \left[\sum_{j,k} T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k \right]$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{T} = \sum_{j,k,\ell} \hat{e}_\ell \cdot \hat{e}_j \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\ell} \hat{e}_k$$

O termo $\hat{e}_\ell \cdot \hat{e}_j$ é não-nulo apenas quando $\ell = j$, e, nesse caso, ele vale 1. Podemos escrever, portanto,

$$\hat{e}_\ell \cdot \hat{e}_j = \delta_{\ell,j}$$

onde $\delta_{\ell,j}$ é a delta de Kronecker. Assim, ficamos com

$$\nabla \cdot \vec{T} = \sum_{j,k,\ell} \delta_{\ell,j} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\ell} \hat{e}_k$$

e, ao efetuar a soma sobre o índice ℓ , resta

$$\nabla \cdot \vec{T} = \sum_{j,k} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \hat{e}_k$$

Agora, precisamos calcular

$$\vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T} = \left[\sum_i x_i \hat{e}_i \right] \times \left[\sum_{j,k} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \hat{e}_k \right]$$

ou

$$\vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T} = \sum_{i,j,k} x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \hat{e}_i \times \hat{e}_k$$

Aqui, precisamos da expressão 15.53 para o produto vetorial de dois vetores, isto é,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{e}_k$$

em que o tensor de Levi-Civita $\vec{\varepsilon}$ é dado por 15.51,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \text{ ou } i = j = k \\ +1, & i = 1, j = 2, k = 3 \text{ ou qualquer permutação par} \\ -1, & \text{qualquer outro caso} \end{cases}$$

Portanto, temos, lembrando que $\hat{e}_i$ tem componente apenas numa única direção,

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_k = \varepsilon_{ikm} \hat{e}_m$$

de modo que

$$\vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T} = \sum_{i,j,k} x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \varepsilon_{ikm} \hat{e}_m \quad (21.53)$$

Vamos calcular agora a grandeza

$$\vec{T} \times \vec{r} = \left[\sum_{j,k} T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k \right] \times \left[\sum_i x_i \hat{e}_i \right]$$

ou

$$\vec{T} \times \vec{r} = \sum_{i,j,k} x_i T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k \times \hat{e}_i$$

ou ainda,

$$\vec{T} \times \vec{r} = \sum_{i,j,k} x_i T_{jk} \varepsilon_{kim} \hat{e}_j \hat{e}_m$$

Agora, vamos calcular

$$\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) = \left[\sum_{\ell} \hat{e}_{\ell} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} \right] \cdot \left[\sum_{i,j,k} x_i T_{jk} \varepsilon_{kim} \hat{e}_j \hat{e}_m \right]$$

ou

$$\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) = \sum_{i,j,k,\ell} \overbrace{\hat{e}_{\ell} \cdot \hat{e}_j}^{\delta_{\ell,j}} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} (x_i T_{jk}) \varepsilon_{kim} \hat{e}_m$$

ou ainda, efetuando a soma sobre ℓ , de modo que resta apenas o termo em que $\ell = j$,

$$\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) = \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i T_{jk}) \varepsilon_{kim} \hat{e}_m$$

A grandeza acima pode ser reescrita como

$$\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) = \sum_{i,j,k} x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \varepsilon_{kim} \hat{e}_m + \sum_{i,j,k} T_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \varepsilon_{kim} \hat{e}_m$$

Como as coordenadas retangulares são independentes entre si, a derivada parcial de uma com relação à outra é nula quando elas são diferentes, caso contrário, ela tem valor unitário, isto é,

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j}$$

Além disso, como é fácil verificar da definição do tensor de Levi-Civita, ele é um tensor anti-simétrico pela permutação de dois índices, ou seja,

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$$

Obtemos, portanto,

$$\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) = - \sum_{i,j,k} x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \varepsilon_{ikm} \hat{e}_m + \sum_{i,j,k} T_{jk} \delta_{i,j} \varepsilon_{kim} \hat{e}_m$$

ou, efetuando a soma em j ,

$$\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) = - \sum_{i,j,k} x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \varepsilon_{ikm} \hat{e}_m + \sum_{i,k} T_{ik} \varepsilon_{kim} \hat{e}_m$$

A segunda somatória é, na realidade, nula. Quando $i = k$ ou $i = m$ ou $k = m$, o tensor de Levi-Civita é nulo. Restam apenas os termos em que todos os três índices são diferentes. Por exemplo, se $m = 3$, temos os termos

$$T_{12} \varepsilon_{123} + T_{21} \varepsilon_{213} = T_{12} - T_{21}$$

O termo acima é nulo, pois o tensor das tensões de Maxwell é simétrico, ou seja,

$$T_{12} = T_{21}$$

e essa anulação ocorre para todas as outras componentes da segunda somatória acima. Resta, portanto,

$$\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) = - \sum_{i,j,k} x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \varepsilon_{ikm} \hat{e}_m$$

Comparando agora com a expressão 21.53,

$$\vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T} = \sum_{i,j,k} x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \varepsilon_{ikm} \hat{e}_m$$

vemos que

$$\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}) = -\vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T}$$

ou, definido o tensor

$$\vec{M} = \vec{T} \times \vec{r} \quad (21.54)$$

temos

$$\vec{r} \times \nabla \cdot \vec{T} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

o que faz com que a expressão 21.50 se torne

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{M}$$

ou

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{M} = 0 \quad (21.55)$$

que é a lei de conservação do momento angular para um sistema eletromecânico escrita na forma diferencial. Ela pode ser comparada com a lei de conservação do momento linear 21.42,

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{T} = 0$$

com a equação de continuidade 12.21,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

e com a lei de conservação da energia 21.18,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

Para obter a forma integral da lei de conservação do momento angular, vamos relacionar o momento angular total do sistema eletromecânico com a densidade volumétrica de momento angular, ou seja,

$$\vec{L} = \int_V \vec{l} dV \quad (21.56)$$

e vamos integrar a expressão 21.55 num volume V , isto é ⁵,

$$\int_V \left[\frac{\partial \vec{l}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{M} \right] dV = 0$$

ou

$$\int_V \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{M} dV$$

ou então,

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{l} dV = - \oint_S \vec{M} \cdot \hat{n} dA$$

e agora, utilizando 21.56, achamos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = - \oint_S \vec{M} \cdot \hat{n} dA \quad (21.58)$$

que é a lei de conservação do momento angular total para um sistema eletromecânico escrita na forma integral. Vejamos agora uma aplicação interessante da lei de conservação do momento angular.

Exemplo 21.5. *Um problema interessante envolvendo a conservação do momento angular é uma variação do paradoxo do disco de Feynman. Ele consiste em considerar um solenóide muito longo, de raio R e n espiras por unidade de comprimento, que é percorrido por uma corrente i . Duas cascas cilíndricas também muito longas são dispostas de forma coaxial com o solenóide. Uma delas tem raio R_a menor do que o do solenóide, e fica, portando, dentro dele. A outra tem um raio R_b maior do que R , de modo que essa casca se situa*

⁵ Por completeza, o momento angular total eletromagnético é dado por

$$\vec{L}_{el} = \int_V \vec{l}_{el} dV \quad (21.57)$$

por fora do solenóide. A casca menor tem uma carga Q distribuída de forma homogênea sobre sua superfície, ao passo que a casca externa tem uma carga $-Q$. A figura 21.4 ilustra o problema acima.

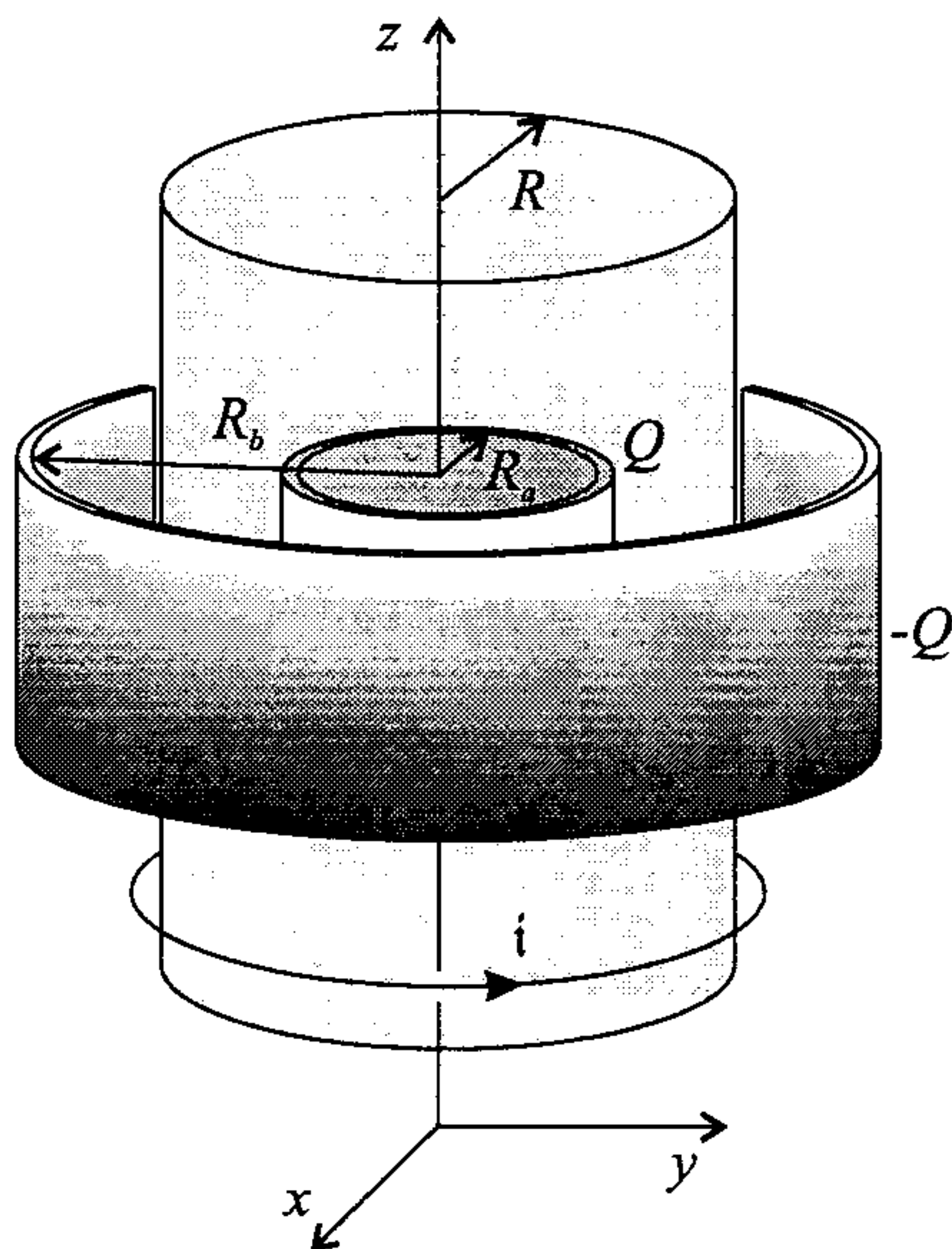


Figura 21.4: Solenóide e duas cascas esféricas, para demonstração da conservação do momento angular.

À medida que a corrente que percorre o solenóide diminui, as cascas cilíndricas começam a girar, adquirindo momento angular. A questão que se apresenta consiste em explicar de onde veio esse momento angular.

Para explicar o motivo do giro das cascas cilíndricas na experiência acima, precisamos necessariamente considerar o momento angular armazenado inicialmente nos campos. Há uma densidade de carga na superfície da casca cilíndrica menor, dada por

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_a L}$$

onde L é o comprimento das cascas e do solenóide. Utilizando a lei de Gauss, é possível determinar o campo elétrico na região entre as cascas como sendo (veja o exercício 21.6)

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L\rho} \hat{\rho}, \quad R_a \leq \rho \leq R_b$$

Note que dentro da casca menor e fora da casca maior o campo elétrico é nulo. O solenóide produz, no seu interior, um campo magnético dado por 14.8,

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{N\mu_0 i \hat{\mathbf{k}}}{L} = \mu_0 n i \hat{\mathbf{k}}, \quad \rho \leq R$$

que corresponde ao campo $\vec{\mathcal{H}}$

$$\vec{\mathcal{H}} = n i \hat{\mathbf{k}}, \quad \rho \leq R$$

Assim, a densidade volumétrica de momento linear, dada por 21.30,

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{S}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

ou seja,

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \left[\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L\rho} \hat{\rho} \right] \times \left[n i \hat{\mathbf{k}} \right]$$

ou

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{el}} = -\frac{\mu_0 Q n i}{2\pi L\rho} \hat{\theta}, \quad R_a \leq \rho \leq R$$

A densidade de momento angular eletromagnético é dada por 21.48,

$$\vec{\mathbf{l}}_{\text{el}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}_{\text{el}}$$

ou seja,

$$\vec{\mathbf{l}}_{\text{el}} = \rho \hat{\rho} \times \left[-\frac{\mu_0 Q n i}{2\pi L\rho} \hat{\theta} \right]$$

ou

$$\vec{\mathbf{l}}_{\text{el}} = -\frac{\mu_0 Q n i}{2\pi L} \hat{\mathbf{k}}, \quad R_a \leq \rho \leq R$$

de modo que o momento angular eletromagnético armazenado nos campos é dado pela expressão 21.57,

$$\vec{L}_{\text{el}} = \int_V \vec{l}_{\text{el}} dV$$

ou

$$\vec{L}_{\text{el}} = \int_{R_a}^R \int_0^{2\pi} \int_0^L -\frac{\mu_0 Q n i}{2\pi L} \hat{\mathbf{k}} \rho d\rho d\theta dz$$

ou seja,

$$\vec{L}_{\text{el}} = -\frac{\mu_0 Q n i}{2\pi L} \hat{\mathbf{k}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{R_a}^R 2\pi L$$

e então,

$$\vec{L}_{\text{el}} = -\frac{\mu_0 Q n i (R^2 - R_a^2)}{2} \hat{\mathbf{k}} \quad (21.59)$$

que é o momento angular total do sistema antes de a corrente ser alterada. Quando a corrente diminui, ocorre uma variação do fluxo magnético através da área do solenóide e aparece uma corrente induzida e um campo elétrico induzido, que descreve circunferências em torno do solenóide. Esse campo pode ser obtido por intermédio da lei de Faraday 18.6,

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

lembrando que o campo magnético só existe dentro do solenóide. Quando estamos fora do solenóide, a expressão acima fica, considerando uma circunferência de raio ρ como curva de integração,

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{E}_f \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} = -\frac{d}{dt} \int_S \mu_0 n i \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} dA$$

ou, como $\mathcal{E}_f$ é constante nessa curva de integração,

$$\mathcal{E}_f \rho 2\pi = -\frac{d}{dt} \left[\mu_0 n i \int_S dA \right]$$

ou ainda,

$$\mathcal{E}_f \rho 2\pi = -\frac{d}{dt} [\mu_0 n i \pi R^2]$$

ou então,

$$\mathcal{E}_f = -\frac{\mu_0 n R^2}{2\rho} \frac{di}{dt}$$

e, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}}_f = -\frac{\mu_0 n R^2}{2\rho} \frac{di}{dt} \hat{\theta}, \quad \rho \geq R$$

Note que, como a corrente diminui, $\frac{di}{dt}$ é negativo, o que faz com que o campo elétrico oriente-se no sentido do versor $\hat{\theta}$, como pode ser confirmado mediante a aplicação da lei de Lenz ao sistema. Na região interna ao solenóide, devemos ter cuidado com o fluxo magnético que atravessa a área definida pela circunferência, pois ele é uma fração do fluxo magnético total. Temos, então,

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{E}_d \hat{\theta} \cdot \rho d\theta \hat{\theta} = -\frac{d}{dt} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \mu_0 n i \hat{k} \cdot \hat{k} \rho d\rho d\theta$$

ou

$$\mathcal{E}_d \rho 2\pi = -\frac{d}{dt} \left[2\pi \mu_0 n i \frac{\rho^2}{2} \right]$$

ou ainda,

$$\mathcal{E}_d = -\frac{\mu_0 n \rho}{2} \frac{di}{dt}$$

e, vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{E}}_d = -\frac{\mu_0 n \rho}{2} \frac{di}{dt} \hat{\theta}, \quad \rho \leq R$$

O campo que age na casca cilíndrica menor vale

$$\vec{\mathcal{E}}_d = -\frac{\mu_0 n R_a}{2} \frac{di}{dt} \hat{\theta}$$

e produz uma força elétrica sobre uma carga elementar dQ na casca, dada por

$$d\vec{F}_d = dQ\vec{\mathcal{E}}_d$$

sendo que $dQ = \sigma dA = \sigma R_a d\theta dz$, ou seja,

$$d\vec{F}_d = -\frac{\sigma\mu_0 n R_a^2 d\theta dz}{2} \frac{di}{dt} \hat{\theta}$$

resultando num torque elementar dado por

$$d\vec{\mathbb{T}}_d = \vec{r} \times d\vec{F}_d = (R_a \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{k}}) \times \left[-\frac{\sigma\mu_0 n R_a^2 d\theta dz}{2} \frac{di}{dt} \hat{\theta} \right]$$

ou

$$d\vec{\mathbb{T}}_d = -\frac{\sigma\mu_0 n R_a^2 d\theta dz}{2} \frac{di}{dt} (R_a \hat{\mathbf{k}} - z \hat{\rho})$$

de modo que o torque total é dado por

$$\vec{\mathbb{T}}_d = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma\mu_0 n R_a^2 d\theta dz}{2} \frac{di}{dt} (R_a \hat{\mathbf{k}} - z \hat{\rho})$$

ou

$$\vec{\mathbb{T}}_d = -\frac{\sigma\mu_0 n R_a^2}{2} \frac{di}{dt} (2\pi) \left[R_a z \hat{\mathbf{k}} - \frac{z^2}{2} \hat{\rho} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

o que resulta em

$$\vec{\mathbb{T}}_d = -\sigma\mu_0 n \pi R_a^3 L \frac{di}{dt} \hat{\mathbf{k}}$$

ou, como

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi L R_a}$$

ficamos com

$$\vec{\mathbb{T}}_d = -\frac{Q}{2\pi L R_a} \mu_0 n \pi R_a^3 L \frac{di}{dt} \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{T}_d = -\frac{Q\mu_0 n R_a^2}{2} \frac{di}{dt} \hat{k}$$

O torque está relacionado ao momento angular mediante

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

ou, de outra forma,

$$\vec{L} - \vec{L}_0 = \int_0^t \vec{T} dt$$

Considerando que o momento angular inicial das duas cascas é nulo e que a corrente diminui até se anular, o momento angular final da casca interna é obtido por meio de

$$\vec{L}_d = \int_0^t -\frac{Q\mu_0 n R_a^2}{2} \frac{di}{dt} \hat{k} dt$$

ou

$$\vec{L}_d = -\frac{Q\mu_0 n R_a^2}{2} \hat{k} \int_i^0 di$$

de modo que

$$\vec{L}_d = \frac{Q\mu_0 n R_a^2 i}{2} \hat{k} \quad (21.60)$$

O campo elétrico induzida na casca cilíndrica externa vale

$$\vec{\mathcal{E}}_f = -\frac{\mu_0 n R^2}{2R_b} \frac{di}{dt} \hat{\theta}$$

e a força elétrica correspondente é, lembrando que $dQ' = \sigma' dA = \sigma' R_b d\theta dz$, onde σ' é a densidade superficial na casca externa,

$$d\vec{F}_f = dQ' \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\sigma' \mu_0 n R^2 d\theta dz}{2} \frac{di}{dt} \hat{\theta}$$

resultando num torque elementar dado por

$$d\vec{\mathbb{T}}_f = \vec{r} \times d\vec{F}_f = (R_b \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{k}}) \times \left[-\frac{\sigma' \mu_0 n R^2 d\theta dz}{2} \frac{di}{dt} \hat{\theta} \right]$$

ou

$$d\vec{\mathbb{T}}_f = -\frac{\sigma' \mu_0 n R^2 d\theta dz}{2} \frac{di}{dt} (R_b \hat{\mathbf{k}} - z \hat{\rho})$$

de modo que o torque total é dado por

$$\vec{\mathbb{T}}_f = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma' \mu_0 n R^2 d\theta dz}{2} \frac{di}{dt} (R_b \hat{\mathbf{k}} - z \hat{\rho})$$

ou

$$\vec{\mathbb{T}}_f = -\frac{\sigma' \mu_0 n R^2}{2} \frac{di}{dt} (2\pi) \left[R_b z \hat{\mathbf{k}} - \frac{z^2}{2} \hat{\rho} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

o que resulta em

$$\vec{\mathbb{T}}_f = -\sigma' \mu_0 n \pi R^2 R_b L \frac{di}{dt} \hat{\mathbf{k}}$$

ou, como

$$\sigma' = \frac{-Q}{2\pi L R_b}$$

ficamos com

$$\vec{\mathbb{T}}_f = -\frac{-Q}{2\pi L R_b} \mu_0 n \pi R^2 R_b L \frac{di}{dt} \hat{\mathbf{k}}$$

de modo que o torque torna-se

$$\vec{\mathbb{T}}_f = \frac{Q \mu_0 n R^2}{2} \frac{di}{dt} \hat{\mathbf{k}}$$

o que faz com que o momento angular adquirido pela casca externa seja

$$\vec{\mathbb{L}}_f = \int_0^t \frac{Q \mu_0 n R^2}{2} \frac{di}{dt} \hat{\mathbf{k}} dt$$

ou

$$\vec{L}_f = \frac{Q\mu_0 n R^2}{2} \hat{k} \int_i^0 di$$

e então,

$$\vec{L}_f = -\frac{Q\mu_0 n R^2 i}{2} \hat{k} \quad (21.61)$$

Note que os momentos angulares dados pelas expressões 21.60 e 21.61 são momentos angulares mecânicos. A soma desses dois momentos angulares vale

$$\vec{L}_d + \vec{L}_f = \frac{Q\mu_0 n R_a^2 i}{2} \hat{k} - \frac{Q\mu_0 n R^2 i}{2} \hat{k}$$

ou, como $\vec{L}_{\text{mec}} = \vec{L}_d + \vec{L}_f$ é o momento angular mecânico total do sistema,

$$\vec{L}_{\text{mec}} = \frac{Q\mu_0 n i (R_a^2 - R^2)}{2} \hat{k}$$

que pode também ser escrito como

$$\vec{L}_{\text{mec}} = -\frac{Q\mu_0 n i (R^2 - R_a^2)}{2} \hat{k}$$

que é igual ao momento angular inicialmente armazenado nos campos, dado pela expressão 21.59,

$$\vec{L}_{\text{el}} = -\frac{\mu_0 Q n i (R^2 - R_a^2)}{2} \hat{k}$$

ou seja,

$$\vec{L}_{\text{mec, final}} = \vec{L}_{\text{el, inicial}}$$

Note que inicialmente não há momento angular mecânico porque as duas cascas estão paradas, e que no final não há momento angular eletromagnético porque o campo magnético se anula. Assim, podemos escrever

$$\vec{L}_{\text{mec, final}} + 0 = \vec{L}_{\text{el, inicial}} + 0$$

e como a soma do momento angular mecânico com o eletromagnético resulta no momento angular total do sistema eletromecânico, temos

$$\vec{L}_{\text{final}} = \vec{L}_{\text{inicial}}$$

e o momento angular total do sistema é conservado. No caso do momento angular, não há nenhum momento angular “escondido”, e as cascas cilíndricas efetivamente giram. No caso do momento linear, se um sistema não está se movendo num referencial inercial, seu momento linear total (a soma dos momentos totais mecânicos e eletromagnéticos) deve ser nulo, mas no caso do momento angular não há essa necessidade, e a próxima seção inicia justamente com a discussão de um caso em que nada se move, nem gira, não há correntes e, mesmo assim, existe um momento angular armazenado nos campos.

21.5 Quantização da Carga Elétrica e Monopólos Magnéticos

Uma das grandes questões da Física atual é o motivo da quantização da carga elétrica, que só se apresenta, na forma livre, em múltiplos inteiros da carga elétrica de um elétron, lembrando que dentro dos prótons e nêutrons existem quarks, os quais têm cargas fracionárias de valores (em módulo) $\frac{1}{3}e$ e $\frac{2}{3}e$, mas que não podem ser encontrados fora dos núcleos atômicos. Não há, em princípio, pelo menos com o nosso conhecimento atual, nenhum motivo para que a carga elétrica não possa ser observada em qualquer quantidade, o que faz com que hipóteses para explicar esse fato sejam desenvolvidas. A mais relevante delas foi proposta, de forma teórica, por Paul Dirac, em 1931, e envolve a suposição da existência dos monopólos magnéticos. Assim, se as cargas magnéticas existirem na Natureza, a quantização da carga elétrica (e da carga magnética, como consequência imediata) é automaticamente explicada. A argumentação de Dirac é relativamente complexa, e vamos introduzir aqui o assunto de uma forma um pouco diferente, estudando um problema interessante.

Exemplo 21.6. *Um dipolo de Thomson é um sistema formado por uma carga elétrica Q e um monopólo magnético Q , separados por uma distância d , ambos estáticos. O campo elétrico produzido pela carga elétrica Q é dado por*

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3}$$

enquanto o campo magnético produzido pelo monopólo é, fazendo as devidas equivalências,

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3}$$

Vamos determinar o momento angular armazenado no campo eletromagnético desse sistema.

Para simplificar o problema, vamos colocar a carga elétrica na origem, de modo que $\vec{r}_Q = 0$, e assim o campo elétrico torna-se

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

O monopólo magnético pode ser colocado na posição $\vec{r}_Q$. Assim, temos

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3}$$

ou, definindo

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q$$

temos

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

A densidade volumétrica de momento angular é dada por 21.48,

$$\vec{l}_{\text{el}} = \vec{r} \times \vec{p}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times \vec{\mathcal{S}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}})$$

de modo que, substituindo o campo elétrico, temos

$$\vec{l}_{\text{el}} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{r} \times \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \times \vec{\mathcal{H}} \right]$$

ou

$$\vec{l}_{\text{el}} = \frac{Q\mu_0}{4\pi r} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}] \quad (21.62)$$

Pela expressão 1.19a, temos

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

o que faz com que possamos escrever

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}] = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{H}})\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\vec{\mathcal{H}}$$

ou

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}] = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{H}})\hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathcal{H}} \quad (21.63)$$

Para reescrever a expressão acima de uma forma mais apropriada, precisamos mostrar que

$$(\vec{a} \cdot \nabla)f(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{f(r)}{r}[\vec{a} - (\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] + \frac{\partial f}{\partial r}(\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \quad (21.64)$$

o que é feito em seguida.

Demonstração. Para mostrar a relação 21.64, vamos utilizar coordenadas esféricas. Nesse caso, temos

$$\vec{a} = a_r \hat{\mathbf{r}} + a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

e

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

de modo que temos

$$\vec{a} \cdot \nabla = [a_r \hat{\mathbf{r}} + a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}] \cdot \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ou

$$\vec{a} \cdot \nabla = a_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{a_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Assim, temos

$$(\vec{a} \cdot \nabla) f(r) \hat{\mathbf{r}} = \left[a_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{a_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] f(r) \hat{\mathbf{r}}$$

Note que $f(r)$ depende apenas de r . Além disso, o versor $\hat{\mathbf{r}}$ tem derivadas com relação a θ e ϕ (veja a página 823 do Volume I). Ficamos, portanto, com

$$(\vec{a} \cdot \nabla) f(r) \hat{\mathbf{r}} = a_r \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{a_\theta f(r)}{r} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} + \frac{a_\phi f(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi}$$

ou

$$(\vec{a} \cdot \nabla) f(r) \hat{\mathbf{r}} = a_r \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{a_\theta f(r)}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{a_\phi f(r)}{r \sin \theta} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ou ainda,

$$(\vec{a} \cdot \nabla) f(r) \hat{\mathbf{r}} = a_r \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + f(r) \frac{a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}$$

Agora, temos que

$$(\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} = a_r \hat{\mathbf{r}}$$

e

$$\vec{a} - (\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} = a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + a_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

de modo que

$$(\vec{a} \cdot \nabla) f(r) \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial r} (\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + f(r) \frac{\vec{a} - (\vec{a} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}}{r}$$

que é a relação 21.64, como queríamos demonstrar. □

Utilizando a relação 21.64, e considerando $f(r) = 1$ e $\vec{a} = \vec{\mathcal{H}}$, temos

$$(\vec{\mathcal{H}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r} [\vec{\mathcal{H}} - (\vec{\mathcal{H}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}]$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}} - (\vec{\mathcal{H}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} = (\vec{\mathcal{H}} \cdot \nabla) \vec{r}$$

Retornando para 21.63, achamos

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}] = -(\vec{\mathcal{H}} \cdot \nabla) \vec{r}$$

e, utilizando essa expressão em 21.62, obtemos

$$\vec{l}_{\text{el}} = -\frac{Q\mu_0}{4\pi r} (\vec{\mathcal{H}} \cdot \nabla) \vec{r}$$

ou

$$\vec{l}_{\text{el}} = -\frac{Q}{4\pi} (\vec{\mathcal{B}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}}$$

O momento angular eletromagnético total vale

$$\vec{L}_{\text{el}} = \int_V \vec{l}_{\text{el}} dV$$

ou

$$\vec{L}_{\text{el}} = \int_V -\frac{Q}{4\pi} (\vec{\mathcal{B}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} dV$$

e então,

$$\vec{L}_{\text{el}} = -\frac{Q}{4\pi} \int_V (\vec{\mathcal{B}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} dV$$

Agora, utilizamos a relação 1.64b,

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} (\vec{C} \cdot \hat{n}_S) dA$$

de modo que, fazendo $\vec{B} = \hat{\mathbf{r}}$ e $\vec{C} = \vec{\mathcal{B}}$, temos

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla) \hat{r} dV = \oint_S \hat{r} (\vec{B} \cdot \hat{n}_S) dA$$

ou

$$\int_V (\vec{B} \cdot \nabla) \hat{r} dV = \oint_S \hat{r} (\vec{B} \cdot \hat{n}_S) dA - \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) \hat{r} dV$$

e assim,

$$\vec{L}_{\text{el}} = \frac{Q}{4\pi} \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) \hat{r} dV - \frac{Q}{4\pi} \oint_S \hat{r} (\vec{B} \cdot \hat{n}_S) dA$$

Como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

e, da equação 4.18,

$$\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = 4\pi \delta(\vec{R})$$

temos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi \delta(\vec{R}) \frac{\mu_0 Q}{4\pi} = \mu_0 Q \delta(\vec{R})$$

Além disso, $\hat{n}_S = \hat{r}_S$. Substituindo todas as expressões acima na equação do momento angular, temos

$$\vec{L}_{\text{el}} = \frac{Q}{4\pi} \int_V \mu_0 Q \delta(\vec{R}) \hat{r} dV - \frac{Q}{4\pi} \oint_S \hat{r} \left(\frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot \hat{r}_S \right) dA$$

ou, lembrando que a função $\delta(\vec{R})$ faz com que $\vec{R}$ deva ser avaliado em $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q = 0$, ou seja, em $\vec{r} = \vec{r}_Q$, temos

$$\vec{L}_{\text{el}} = \frac{\mu_0 Q Q}{4\pi} \hat{r}_Q - \frac{\mu_0 Q Q}{16\pi^2} \oint_S \hat{r} \frac{R \cos \theta}{R^3} dA$$

ou, como a definição do ângulo sólido $d\Omega$ é dada por

$$d\Omega = \frac{\cos \theta dA}{R^2}$$

ficamos com

$$\vec{L}_{\text{el}} = \frac{\mu_0 Q Q}{4\pi} \frac{\vec{r}_Q}{r_Q} - \frac{\mu_0 Q Q}{16\pi^2} \oint_S \hat{\mathbf{r}} d\Omega$$

A integral acima é na verdade nula, já que o versor $\hat{\mathbf{r}}$ é orientado na direção radial e tem uma média angular nula (veja o exercício 21.7). Resta, portanto,

$$\vec{L}_{\text{el}} = \frac{\mu_0 Q Q}{4\pi} \frac{\vec{r}_Q}{r_Q}$$

cujo módulo é

$$L_{\text{el}} = \frac{\mu_0 Q Q}{4\pi}$$

Note que o momento angular orienta-se na direção do vetor $\vec{r}_Q$, ou seja, aponta da carga elétrica para o monopólo magnético. Além disso, esse momento independe da distância entre a carga elétrica e o monopólo. Em Mecânica Quântica, o momento angular é encontrado em unidades semi-inteiras de $\hbar$, de modo que temos, portanto,

$$L_{\text{el}} = \frac{\mu_0 Q Q}{4\pi} = n \frac{\hbar}{2}$$

ou

$$\frac{\mu_0 Q Q}{2\pi} = n\hbar \quad (21.65)$$

onde $n = 1, 2, \dots$, o que indica que a carga elétrica, e a magnética, são encontradas apenas em valores discretos. Assim, a existência de monopólos magnéticos (de fato, a existência de um único monopólo no universo) explica o fato de a carga elétrica se apresentar apenas em quantidades múltiplas da carga do elétron.

É interessante ressaltar que a discussão acima é apenas uma das formas de apresentar a quantização da carga elétrica. Um outro modo, também interessante, consiste em considerar o potencial vetor magnético $\vec{A}$. Conforme vimos anteriormente, supondo a existência de um monopólo magnético localizado na origem, o campo magnético gerado por ele é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Lembrando que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, uma possível expressão para o potencial vetor magnético que gera o campo acima é

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 Q(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi} \quad (21.66)$$

conforme podemos demonstrar explicitamente, considerando o operador ∇ em coordenadas esféricas, de modo que temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathcal{A}_\phi) - \frac{\partial \mathcal{A}_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{A}_\phi) \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{A}_\theta) - \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

e, como $\vec{A} = \mathcal{A}_\phi \hat{\phi}$, temos apenas

$$\begin{aligned} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\mu_0 Q(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \right] \right\} \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\mu_0 Q(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \right] \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\mu_0 Q \sin \theta}{4\pi r}$$

ou ainda,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

que é o campo magnético do monopólo magnético. O problema com o potencial vetor 21.66 é que ele é singular em $\theta = \pi$, ou seja, no eixo z negativo. Assim, para a região do eixo z negativo é preciso utilizar uma outra expressão para $\vec{A}$ para obter o campo magnético $\vec{B}$. Partindo da expressão já conhecida, podemos utilizar as seguintes equações:

$$\vec{\mathcal{A}}_I = \frac{\mu_0 \mathcal{Q}(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi}, \quad \theta < \pi - \alpha \quad (21.67a)$$

$$\vec{\mathcal{A}}_{II} = -\frac{\mu_0 \mathcal{Q}(1 + \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi}, \quad \theta > \alpha \quad (21.67b)$$

O potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}_I$ pode ser utilizado em todo o espaço exceto num cone de abertura $\pi - \alpha$ em torno do eixo z negativo, ao passo que $\vec{\mathcal{A}}_{II}$ pode ser empregado para calcular o campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$ em todo o espaço exceto num cone de abertura α em torno do eixo z positivo. Ambos são responsáveis por produzir o mesmo campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$, que é o campo do monopólo magnético.

Na região $\alpha < \theta < \pi - \alpha$, os dois potenciais podem ser utilizados, o que indica que eles devem estar relacionados por uma transformação de calibre do tipo dado pela expressão 20.6,

$$\vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + \nabla \Lambda$$

Para determinar Λ , observamos que

$$\vec{\mathcal{A}}_{II} - \vec{\mathcal{A}}_I = -\frac{\mu_0 \mathcal{Q}(1 + \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi} - \frac{\mu_0 \mathcal{Q}(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi}$$

ou seja,

$$\vec{\mathcal{A}}_{II} = \vec{\mathcal{A}}_I - \frac{\mu_0 \mathcal{Q}}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi}$$

de modo que identificamos

$$\nabla \Lambda = -\frac{\mu_0 \mathcal{Q}}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi}$$

Agora, em coordenadas esféricas, temos

$$\nabla \Lambda = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi}$$

o que indica que

$$\frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} = -\frac{\mu_0 \mathcal{Q}}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi}$$

ou

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} = -\frac{\mu_0 Q}{2\pi}$$

e então, por meio de uma integração elementar,

$$\Lambda = -\frac{\mu_0 Q \phi}{2\pi}$$

Quando uma partícula de carga Q fica sujeita ao campo magnético do monopólo magnético, sua função de onda quântica depende do calibre utilizado. Assim, na região em que qualquer uma das formas 21.67 pode ser utilizada, a partícula é descrita por ψ_I quando utilizamos o potencial vetor $\vec{A}_I$, e por ψ_{II} quando $\vec{A}_{II}$ é considerado. A relação entre elas é dada por 20.212 (consulte a seção 20.8),

$$\psi_{II}(\vec{r}, t) = \exp \left[\frac{iQ\Lambda}{\hbar} \right] \psi_I(\vec{r}, t)$$

e assim,

$$\psi_{II}(\vec{r}, t) = \exp \left[-\frac{i\mu_0 Q Q \phi}{2\pi \hbar} \right] \psi_I(\vec{r}, t)$$

Agora, devemos levar em consideração o fato de que tanto ψ_i quanto ψ_{II} devem ser unívocas em se tratando do ângulo ϕ , o que significa que as funções para $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$ devem ser iguais. Para $\phi = 0$, temos

$$\psi_{II}(\vec{r}, t) = \exp \left[-\frac{i\mu_0 Q Q \cdot 0}{2\pi \hbar} \right] \psi_I(\vec{r}, t) = \psi_I(\vec{r}, t)$$

Para $\phi = 2\pi$, achamos

$$\psi_{II}(\vec{r}, t) = \exp \left[-\frac{i\mu_0 Q Q (2\pi)}{2\pi \hbar} \right] \psi_I(\vec{r}, t)$$

ou

$$\psi_{II}(\vec{r}, t) = \exp \left[-\frac{i\mu_0 Q Q}{\hbar} \right] \psi_I(\vec{r}, t)$$

No entanto, como demos uma volta completa no ângulo ϕ , é preciso que a exponencial tenha valor unitário, ou seja,

$$\exp \left[-\frac{i\mu_0 Q Q}{\hbar} \right] = 1$$

o que só ocorre quando

$$\frac{\mu_0 Q Q}{\hbar} = 2\pi n$$

sendo que n é um número inteiro. A expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{\mu_0 Q Q}{2\pi} = n\hbar$$

que é a expressão 21.65, obtida agora de uma outra forma, devida a T. T. Wu e C. N. Yang. Podemos partir agora, finalmente, para uma discussão simplificada da quantização de Dirac. Para Dirac, um monopólo pode ser entendido como sendo o final de uma linha de dipolos que se estende até o infinito ou o final de um solenóide de raio R bastante pequeno e cujas espiras estão bem justas umas às outras. O solenóide, assim como a linha de dipolos, também se estende até o infinito. As duas interpretações são apresentadas na figura 21.5.

O potencial vetor magnético de um dipolo magnético situado na origem é dado pela expressão 16.23,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

de modo que, em geral, para um dipolo elementar localizado em $\vec{r}'$, temos

$$d\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Agora, na seção 15.10.1 definimos operacionalmente a intensidade de pólo magnético $|\Xi|$ como sendo dada pela expressão 15.71,

$$\vec{m} = |\Xi| \vec{d}_m$$

onde $|\Xi|$ faz o papel da carga magnética, se ela existisse isolada. Como estamos supondo que isso seja possível, então podemos escrever, para o nosso caso,

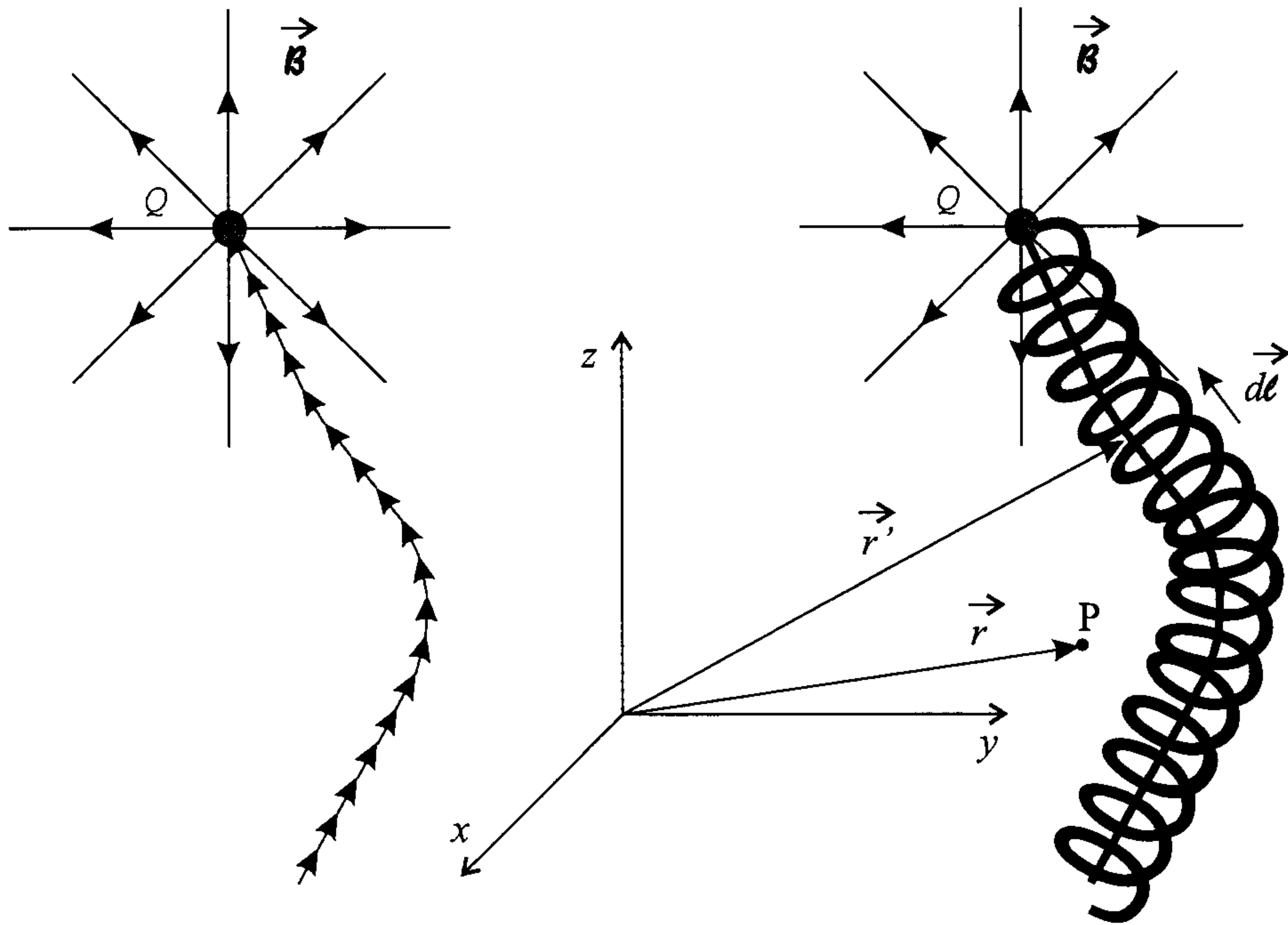


Figura 21.5: Duas representações para o monopólo magnético. À esquerda, o fim de uma linha infinita de dipolos. À direita, o fim de um solenóide infinito.

$$\vec{m} = |Q| \vec{d}_m$$

de modo que um elemento de dipolo magnético pode ser escrito como

$$d\vec{m} = Q d\vec{\ell}$$

sendo Q o valor positivo da carga magnética que forma o dipolo. Assim, o potencial vetor magnético desse dipolo elementar fica

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

O potencial vetor gerado pelo monopólo magnético da figura 21.5 é dado pela integral da expressão acima, considerando a curva C descrita pela linha de

dipolos ou pelo solenóide ligado ao monopólo, ou seja,

$$\vec{\mathcal{A}}_C = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \int_C d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (21.68)$$

Esta expressão fornece o potencial vetor magnético em todos os pontos do espaço, com exceção dos pontos pertencentes à curva C , quando então ele é singular, como vemos em seguida. Vamos supor, para simplificar, que o monopólo esteja localizado na origem e que a curva C se estenda pelo eixo z negativo. Assim, esperamos obter o potencial vetor dado pela expressão 21.66,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0 Q(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi}$$

o qual, como já dissemos, é singular em $\theta = \pi$, isto é, o eixo z negativo. Para realizar a integração, vamos precisar das grandezas

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} &= dz' \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r} &= x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r}' &= z' \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{r} - \vec{r}' &= x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} \\ d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= (dz' \hat{\mathbf{k}}) \times [x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}}] \\ d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= (x \hat{\mathbf{j}} - y \hat{\mathbf{i}}) dz' \end{aligned}$$

Assim, achamos

$$\vec{\mathcal{A}}_C = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{(x \hat{\mathbf{j}} - y \hat{\mathbf{i}}) dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}}_C = \frac{\mu_0 Q(x \hat{\mathbf{j}} - y \hat{\mathbf{i}})}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Fazemos agora uma troca de variáveis, dada por

$$\begin{array}{ll} u = z - z' & du = -dz' \\ z' \rightarrow -\infty \rightarrow u_1 \rightarrow \infty & z' = 0 \rightarrow u_2 = z \end{array}$$

e obtemos

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q(x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}})}{4\pi} \int_{\infty}^z \frac{-du}{[x^2 + y^2 + u^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q(x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}})}{4\pi} \int_z^{\infty} \frac{du}{[x^2 + y^2 + u^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Agora, fazemos mais uma troca de variáveis, definindo

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{tg} \alpha \\ du &= \sqrt{x^2 + y^2} \sec^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Da relação acima, temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

de modo que achamos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{\infty}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \infty \end{aligned}$$

o que indica que $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Voltando à integral, temos

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q(x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}})}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sec^2 \alpha d\alpha}{[(x^2 + y^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q(x\hat{j} - y\hat{i})}{4\pi} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \alpha d\alpha}{\sec^3 \alpha}$$

e então,

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q(x\hat{j} - y\hat{i})}{4\pi(x^2 + y^2)} \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha$$

de modo que

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q(x\hat{j} - y\hat{i})}{4\pi(x^2 + y^2)} [\sin \alpha]_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}}$$

ou

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q(x\hat{j} - y\hat{i})}{4\pi(x^2 + y^2)} [1 - \sin \alpha_1]$$

Como

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

temos

$$\sin \alpha_1 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

e assim,

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q(x\hat{j} - y\hat{i})}{4\pi(x^2 + y^2)} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Agora, lembramos que as coordenadas retangulares estão relacionadas às coordenadas esféricas através de 1.35,

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

além de termos, por 1.36a,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sem esquecer que, por 1.38,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{i}} &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{j}} &= \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{k}} &= \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}$$

Em coordenadas esféricas, o potencial vetor torna-se

$$\begin{aligned}\vec{A}_C &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{1}{r^2 - r^2 \cos^2 \theta} \left[1 - \frac{r \cos \theta}{r} \right] \\ &\quad \left\{ r \sin \theta \cos \phi [\sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}] \right. \\ &\quad \left. - r \sin \theta \sin \phi [\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}] \right\}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{A}_C &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin^2 \theta} \\ &\quad \left\{ \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \cos \theta \cos \phi \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sin \theta \cos^2 \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sin \theta \sin^2 \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q (1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

que é o potencial vetor 21.66, conforme esperávamos. Note que já demonstramos que esse potencial origina corretamente o campo magnético de um monopólo magnético.

Considerando que o potencial vetor 21.68,

$$\vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \int_C d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

produza o campo magnético de um monopólo magnético, surge a questão da arbitrariedade da localização da curva C que descreve a linha de dipolos ou o

solenóide que termina no monopólo. De fato, o campo magnético do monopólo não pode depender da localização dessa curva, o que indica que, utilizando uma curva C' , teríamos

$$\vec{A}_{C'} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \int_{C'} d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

que produz um potencial vetor diferente, mas o mesmo campo magnético. Isso pode ser facilmente entendido se subtrairmos um potencial do outro, ou seja,

$$\vec{A}_{C'} - \vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \int_{C'} d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \int_C d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

ou

$$\vec{A}_{C'} - \vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \oint_{C' - C} d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

onde a integral agora é num percurso fechado definido pelo contorno formado pelas curvas C e C' , conforme se vê na figura 21.6 abaixo.

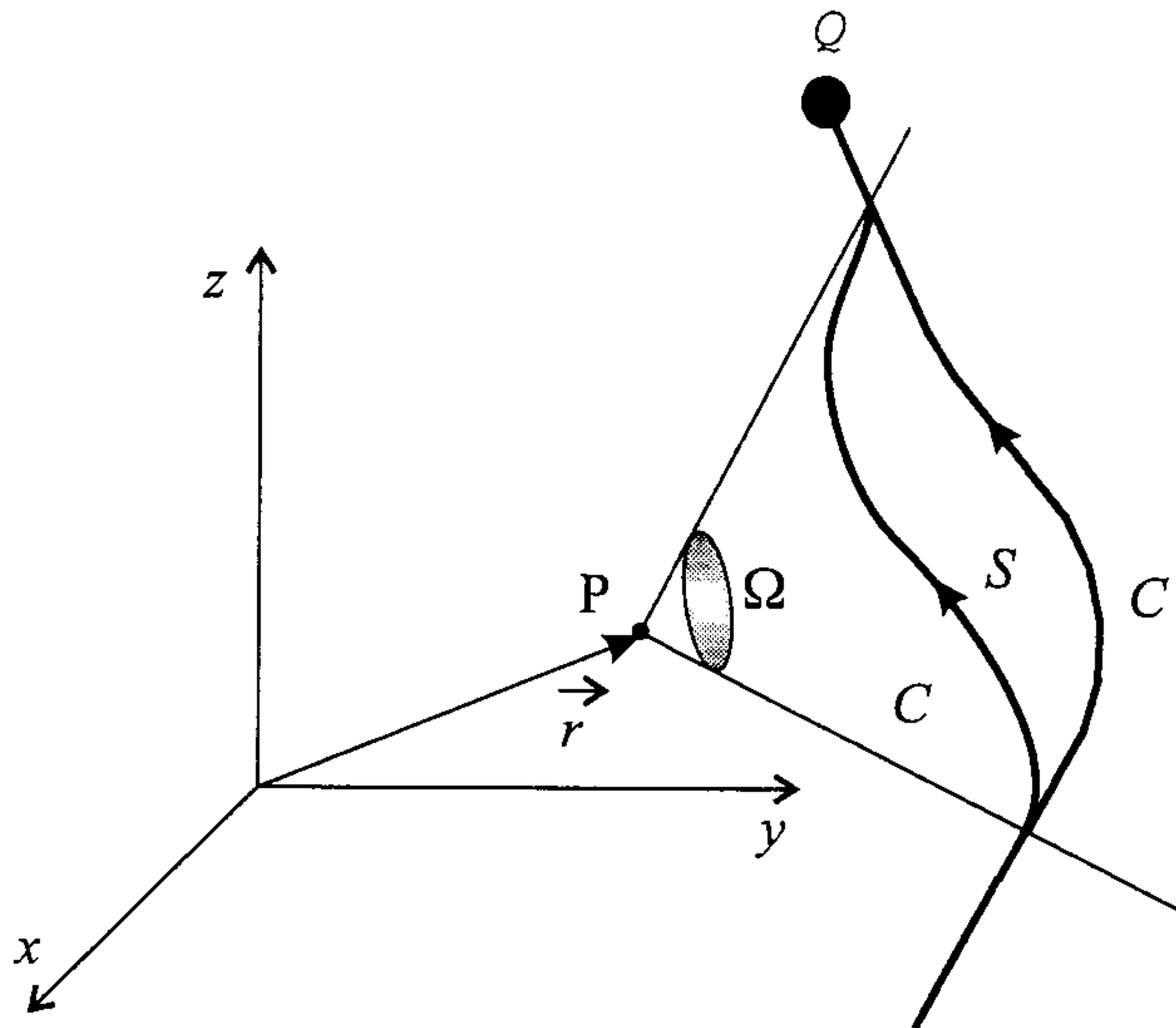


Figura 21.6: Duas curvas C e C' e área definida por elas.

A integral acima já foi efetuada no exemplo 16.10. Partindo da equação 16.37,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C d\vec{\ell} \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

e comparando com o resultado dado pela equação 16.35,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \nabla \Omega$$

onde Ω é o ângulo sólido subentendido pela área S quando vista pelo ponto de observação P (veja as figuras 16.7 e 21.6), vemos que

$$\oint_C d\vec{\ell} \times \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] = \nabla \Omega \quad (21.69)$$

de forma que

$$\vec{A}_{C'} - \vec{A}_C = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \nabla \Omega$$

ou

$$\vec{A}_{C'} = \vec{A}_C + \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \nabla \Omega$$

ou ainda,

$$\vec{A}_{C'} = \vec{A}_C + \nabla \left[\frac{\mu_0 Q \Omega}{4\pi} \right]$$

Comparando essa expressão com a relação 20.198,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

vemos que usar uma curva C particular corresponde apenas a usar um determinado calibre para o potencial vetor magnético, o que mantém os campos inalterados. A transformação de um calibre noutro é dada pela função

$$\Lambda = \frac{\mu_0 Q \Omega}{4\pi}$$

e, de acordo com a seção 20.8, a função de onda quântica de uma partícula sujeita a um campo eletromagnético mantém-se invariante frente a uma transformação de calibre se ocorrer (veja a equação 20.212)

$$\psi_{C'}(\vec{r}, t) = \exp \left[\frac{iQ\Lambda}{\hbar} \right] \psi_C(\vec{r}, t)$$

e assim,

$$\psi_{C'}(\vec{r}, t) = \exp \left[\frac{i\mu_0 Q Q \Omega}{4\pi\hbar} \right] \psi_C(\vec{r}, t)$$

Quando a partícula atravessa a superfície S da figura 21.6, o ângulo sólido varia abruptamente de 4π . Assim, temos que ter

$$\exp \left[\frac{i\mu_0 Q Q (\Omega + 4\pi)}{4\pi\hbar} \right] = \exp \left[\frac{i\mu_0 Q Q \Omega}{4\pi\hbar} \right]$$

para manter a unicidade da função de onda. A expressão acima pode ser reescrita como

$$\exp \left[\frac{i\mu_0 Q Q \Omega}{4\pi\hbar} \right] \exp \left[\frac{i\mu_0 Q Q}{\hbar} \right] = \exp \left[\frac{i\mu_0 Q Q \Omega}{4\pi\hbar} \right]$$

ou

$$\exp \left[\frac{i\mu_0 Q Q}{\hbar} \right] = 1$$

o que leva a

$$\frac{\mu_0 Q Q}{\hbar} = 2\pi n$$

sendo que n é um número inteiro. A expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{\mu_0 Q Q}{2\pi} = n\hbar$$

que é a expressão 21.65, obtida por meio da argumentação de Dirac. Note que ela está baseada na invariância dos campos através de uma transformação de calibre, na independência das grandezas observáveis da posição da curva C descrita pela linha infinita de dipolos ou pelo solenóide infinito que termina no monopólo magnético, e também nas propriedades de transformação e unicidade das funções de onda quânticas.

A discussão acima acerca da quantização da carga elétrica e magnética encerra nosso estudo a respeito das leis de conservação relacionadas aos campos eletromagnéticos. Podemos agora passar ao nosso próximo assunto, as ondas eletromagnéticas.

21.6 Exercícios

21.1 Mostre que a relação 21.7,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}})$$

permanece válida mesmo quando $\vec{\mu}$ é visto como um tensor, e o material é anisotrópico.

21.2 Obtenha a expressão 21.25 seguindo os passos que levam à expressão 21.24.

21.3 Determine a força magnética entre os dois hemisférios de uma casca esférica de raio R carregada com uma densidade superficial homogênea σ e girando com uma velocidade angular ω , utilizando o tensor das tensões de Maxwell.

21.4 Demonstre a expressão 21.34,

$$\left[\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right]_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (\mathcal{B}_{\alpha} \mathcal{B}_{\beta} - \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \delta_{\alpha,\beta})$$

21.5 Obtenha as formas macroscópicas das leis de conservação de energia e momento linear em termos de $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{B}$ e $\vec{\mathcal{H}}$. Em particular, mostre que a densidade de energia é dada por

$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{H}})$$

e que

$$\vec{p}_{\text{el}} = \vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}}$$

21.6 Determine o campo elétrico produzido pelas cascas cilíndricas do exemplo 21.5.

21.7 Mostre que a média angular do versor $\hat{\mathbf{r}}$,

$$\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle_{\Omega} = \oint_S \hat{\mathbf{r}} d\Omega$$

é nula. Sugestão: transforme $\hat{\mathbf{r}}$ para coordenadas retangulares.

Parte VI

RADIAÇÃO

Capítulo 22

Ondas Eletromagnéticas, I: Propagação de Ondas

Uma das principais conseqüências das equações de Maxwell é a previsão da existência de ondas eletromagnéticas relacionadas com as variações, ou ondulações, dos campos eletromagnéticos. Tais ondas têm características especiais que as diferenciam das ondas mecânicas numa corda ou das ondas sonoras, por exemplo, pois não necessitam de um meio de propagação que dê suporte a elas. Por outro lado, alguns aspectos são comuns a todas as ondas, como a possibilidade de transferir energia de um ponto a outro sem transferência de matéria. Assim, iniciaremos nosso estudo apresentando algumas propriedades gerais associadas com ondas. Note que as ondas eletromagnéticas são um assunto de grande relevância tanto do ponto de vista científico como tecnológico, pois grande parte de nossa interação com o ambiente que nos cerca é realizada através de algum tipo de onda eletromagnética. As transmissões de rádio e televisão e o calor que chega até nós (na forma de radiação infravermelha) vindo do Sol são apenas dois exemplos de ondas eletromagnéticas. De fato, nosso principal sentido fisiológico, a visão, é o nosso mais importante meio de obtenção de informações acerca do mundo ao nosso redor, e ele está baseado na interpretação da luz visível que chega até nós, e que é apenas mais uma forma de onda eletromagnética.

22.1 Equação da Onda e Conceitos Iniciais

Para estudar ondas eletromagnéticas, precisamos inicialmente definir alguns termos, que aparecem na figura 22.1.

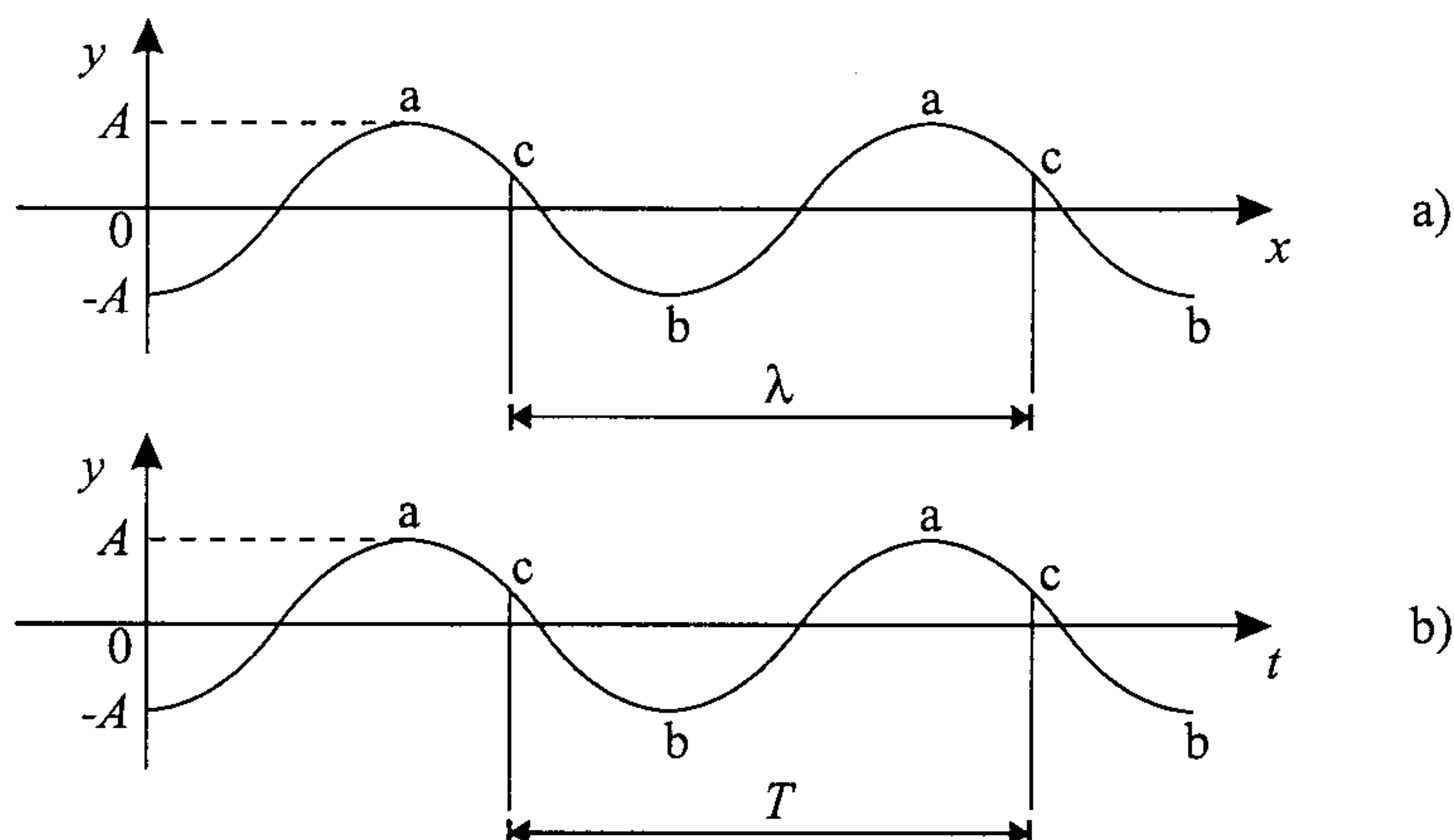


Figura 22.1: Altura y de uma onda numa corda como função:

- a) de x , e definição do comprimento de onda λ ;
- b) de t , e definição do período T .

Definição 22.1. O comprimento de onda λ é a distância espacial que separa dois pontos consecutivos de uma onda que têm a mesma configuração espacial. Isto ocorre com os dois pontos a , que são chamados cristas, os dois pontos b , que são chamados vales, e os pontos c , como mostra a figura 22.1.a. Entre um ponto a e um ponto b , existe uma diferença de meio comprimento de onda, ou $\frac{\lambda}{2}$. Define-se também o número de onda k como sendo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Definição 22.2. O período T é o intervalo de tempo que separa dois pontos consecutivos de uma onda com a mesma configuração temporal. Observando a figura 22.1.b, vemos que os pontos a , os pontos b e os pontos c apresentam a mesma configuração temporal, e o intervalo de tempo entre eles é T . Entre um ponto a e um ponto b , o intervalo de tempo é meio período, ou $\frac{T}{2}$.

Definição 22.3. A frequência ν é o número de vezes que a onda passa por um certo ponto na unidade de tempo. Ela é na verdade o inverso do período, ou seja,

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Define-se também a frequência angular ω por

$$\omega = 2\pi\nu$$

Além disso, a velocidade de propagação da onda é dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

Definição 22.4. O valor máximo, em módulo, que a variável y pode assumir é chamado amplitude A .

As ondas podem ser classificadas em longitudinais, quando a vibração ocorre na mesma direção da propagação, como no caso do som, ou transversais, quando a vibração ocorre numa direção perpendicular à de propagação, como no caso da luz. Além disso, as ondas podem ser mecânicas, quando precisam de um meio material para se propagar, como é o caso de uma onda numa corda, ou eletromagnéticas, quando o meio de propagação é desnecessário, caso de todas as formas de luz e radiação eletromagnética.

Antes de obter uma equação diferencial que descreva as ondas eletromagnéticas, vamos deduzir uma forma mais simples para essa equação, considerando uma onda mecânica numa corda. Partimos de um pequeno segmento dessa corda, como mostra a figura 22.2. Nessa figura, temos uma visão muito ampliada de um pequeno segmento da corda. Essa corda está presa pelas extremidades e é sujeita a uma tensão F grande, de forma que, em repouso, ela fica bem esticada. Isso permite supor que a tensão é constante em todos os pontos da corda. Além disso, vamos considerar que os deslocamentos transversais, ou seja, os valores de y , sejam pequenos, que é o que ocorre na maioria dos instrumentos musicais de corda (na figura, eles estão muito ampliados, para efeito de clareza). Com estas suposições, o tratamento matemático fica bastante facilitado, sem grande perda de generalidade física.

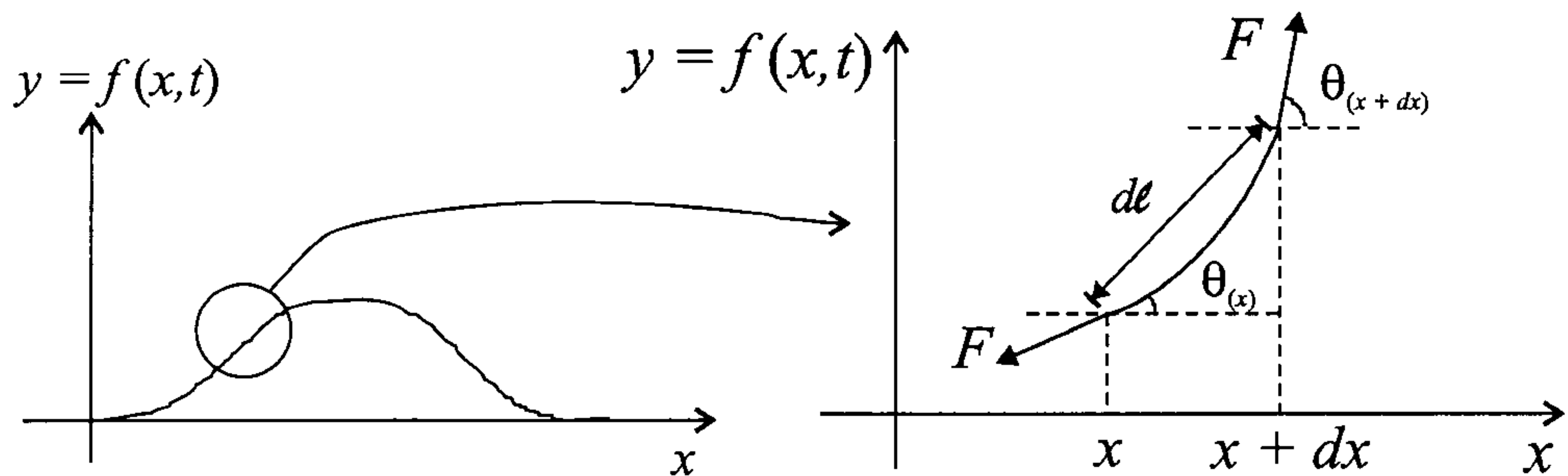


Figura 22.2: Visão ampliada de um elemento de comprimento dl de uma corda pela qual passa uma onda.

Para efetivar o estudo, vamos considerar que o segmento dl da corda esteja sujeito às leis de Newton, já que ele é efetivamente formado por partículas que estão sujeitas a essas leis. Assim, na direção x , a resultante das forças deve ser

$$F \cos \theta_{(x+dx)} - F \cos \theta_{(x)}$$

No entanto, os ângulos θ são muito pequenos (estão exagerados na figura, para clareza), e podemos aproximar os cossenos dos ângulos pelo primeiro termo de sua série de Taylor, que vale $\cos \theta \approx 1$. Isto resulta em

$$F \cos \theta_{(x+dx)} - F \cos \theta_{(x)} \approx F - F = 0$$

e assim, na direção x , a resultante é nula e não há movimento acelerado nesta direção, o que condiz com o fato de que a onda é transversal ¹.

Vejamos agora a direção y . Neste caso, a resultante é

$$F \sin \theta_{(x+dx)} - F \sin \theta_{(x)}$$

¹ O sistema poderia estar se movendo com uma velocidade constante na direção x . Mas, neste caso, poderíamos considerar um referencial inercial que também se move com a mesma velocidade, e daí a corda estaria em repouso, na direção x , neste referencial.

Como os ângulos são pequenos, poderíamos aproximar os senos dos ângulos pelo primeiro termo da série de Taylor do seno, que é $\sin \theta \approx \theta$. No entanto, a tangente também tem como primeiro termo $\tan \theta \approx \theta$. Então, podemos aproximar o seno pela tangente, ou seja, $\sin \theta \approx \tan \theta$. Isto é feito porque a tangente num dado ponto é igual à derivada da função neste ponto, o que torna esta substituição mais interessante. Assim, lembrando que $y = f(x, t)$, usamos

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$$

o que resulta em

$$F \sin \theta_{(x+dx)} - F \sin \theta_{(x)} \approx F \left\{ \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]_{x+dx} - \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]_x \right\}$$

Lembrando que a definição de derivada é

$$\frac{dg(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{g(x + dx) - g(x)}{dx}$$

vemos que, considerando o termo entre chaves como $g(x + dx) - g(x)$, este termo fica ²

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]_{x+dx} - \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right] dx \\ \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]_{x+dx} - \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right]_x &= \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

Portanto, a resultante na direção y é

$$F \sin \theta_{(x+dx)} - F \sin \theta_{(x)} = F \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} dx$$

que é uma aproximação muito boa da força que age sobre o segmento na direção y . Esta força, pela segunda lei de Newton, é igual à massa do segmento vezes a sua aceleração. A massa do segmento, considerando uma densidade

² Multiplicando a definição da derivada por dx , e abstraindo o limite, temos

$$dx \frac{dg(x)}{dx} = dx \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{g(x + dx) - g(x)}{dx} \approx g(x + dx) - g(x)$$

linear de massa μ constante, é $dm = \mu d\ell$, onde $d\ell$ é o comprimento do segmento. Da figura 22.2, podemos escrever $dx = d\ell \cos \theta$. Como $\cos \theta \approx 1$, $dx \approx d\ell$, e assim,

$$dm = \mu dx$$

A aceleração do segmento é a derivada segunda de $y = f(x, t)$, que dá a altura da corda, com relação ao tempo, mantendo-se x fixo, ou seja,

$$a = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}$$

Reunindo todas as expressões, temos a segunda lei de Newton para o segmento da corda,

$$F \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}$$

ou, fazendo as simplificações,

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \quad (22.1)$$

que é a equação da onda na corda, num referencial inercial (para que a 2ª lei de Newton seja válida) e num sistema unidimensional, pois a onda propaga-se apenas na direção x . Esta equação diferencial parcial governa todas as ondas que se propagam numa corda, desde que a tensão F seja grande e os deslocamentos transversais, pequenos. Além disso, apesar de ter sido deduzida para a corda, esta equação é absolutamente geral, valendo para qualquer onda unidimensional em qualquer meio. O que muda são as condições auxiliares, que fazem com que ondas de vários tipos sejam possíveis, e a função $f(x, t)$, que, no caso da corda, é a altura da onda.

É interessante notar que a grandeza $\frac{\mu}{F}$ na equação 22.1 tem as seguintes dimensões:

$$\left[\frac{\mu}{F} \right] = \frac{[\mu]}{[F]} = \frac{ML^{-1}}{MLT^{-2}} = \frac{T^2}{L^2} = \left[\frac{1}{v^2} \right]$$

ou seja, as dimensões são as mesmas do inverso do quadrado da velocidade. De fato, a velocidade de propagação da onda é dada pela expressão ³

$$v = \pm \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

e, portanto, quanto mais esticada ou mais fina for uma corda, maior será a velocidade de propagação da onda. A equação da onda, com esta definição, fica

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \quad (22.2)$$

e, em três dimensões, a equação de onda homogênea torna-se

$$\nabla^2 f(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (22.3)$$

sendo que, em geral, a forma não-homogênea da equação da onda é

$$\nabla^2 f(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = g(\vec{r}, t) \quad (22.4)$$

onde $g(\vec{r}, t)$ é o termo não-homogêneo (o termo de “fonte”). É importante notar que as funções $f(x, t)$ que podem ser soluções de 22.2 têm todas a forma funcional

$$f(x, t) = f(x - vt)$$

conforme podemos mostrar explicitamente, considerando as derivadas dessa função. Vamos definir $y = x - vt$, e iniciamos calculando

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{dy} \frac{\partial}{\partial x} (x - vt) \end{aligned}$$

³ A onda pode se propagar tanto para a direita como para a esquerda. Por isso, os dois sinais são permitidos.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dy}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{df}{dy} \right] \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{d^2 f}{dy^2}\end{aligned}$$

Além disso, temos também

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{df}{dy} \frac{\partial}{\partial t} (x - vt) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -v \frac{df}{dy}\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[-v \frac{df}{dy} \right] \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= v^2 \frac{d^2 f}{dy^2}\end{aligned}$$

Assim, achamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{1}{v^2} \left[v^2 \frac{d^2 f}{dy^2} \right]$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

que é a equação de onda 22.2. Note que, como a velocidade aparece elevada ao quadrado na equação de onda, soluções do tipo

$$f(x, t) = f(x + vt)$$

também são soluções possíveis para a equação de onda, cuja solução geral se torna

$$f(x, t) = f(x - vt) + h(x + vt) \quad (22.5)$$

A expressão $f(x - vt)$ considera o valor positivo de v , ao passo que $h(x + vt)$ refere-se ao valor negativo. Assim, $f(x - vt)$ indica uma onda se propagando no sentido positivo do eixo x com velocidade v , enquanto $h(x + vt)$ está associada com uma onda propagando-se com velocidade v no sentido negativo do eixo. Uma forma bastante importante para a função $f(x - vt)$ consiste em

$$f(x, t) = A \cos[k(x - vt) + \delta] \quad (22.6)$$

em que o argumento do cosseno é chamado de *fase*, δ é a *constante de fase*, k é o número de onda e $v = \lambda\nu$ é a velocidade da onda. Quando $x = vt - \frac{\delta}{k}$, a fase é nula, e esse ponto corresponde ao máximo central. Assim, $\frac{\delta}{k}$ é a “distância” entre o máximo central e a origem da contagem dos tempos, ou seja, o atraso da onda em relação ao início da contagem dos tempos. Lembrando que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

e que

$$\omega = 2\pi\nu$$

temos

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda\nu = v$$

ou seja,

$$\omega = vk \quad (22.7)$$

Assim, a expressão 22.6 pode ser escrita como

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (22.8)$$

A relação de Euler diz que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Portanto, a parte real da exponencial complexa corresponde a

$$\Re[e^{i\theta}] = \cos \theta$$

Assim, comparando essa expressão com a equação 22.8, podemos escrever

$$f(x, t) = \Re[Ae^{i(kx - \omega t + \delta)}]$$

ou

$$f(x, t) = \Re[Ae^{i\delta}e^{i(kx - \omega t)}]$$

Vamos definir agora a função de onda complexa

$$\mathcal{F}(x, t) = \mathfrak{a}e^{i(kx - \omega t)} \quad (22.9)$$

onde $\mathfrak{a} = Ae^{i\delta}$. A função de onda $f(x, t)$ é a parte real de $\mathcal{F}(x, t)$, ou seja,

$$f(x, t) = \Re[\mathcal{F}(x, t)]$$

Note que é mais fácil manipular exponenciais do que senos e cossenos, por isso a forma complexa 22.9 é mais utilizada do que a forma 22.6. Após obter $\mathcal{F}$, é bastante simples considerar sua parte real para extrair $f(x, t)$.

A onda descrita pela expressão 22.9 se propaga na direção do eixo x , e oscila na direção y , conforme mostra a figura 22.2, já que estamos considerando uma onda em duas dimensões, descritas pelos eixos x e y . Nesse caso, podemos escrever a função de onda de forma vetorial, mediante

$$\vec{\mathcal{F}}(x, t) = \mathfrak{a}e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{j}}$$

em que a direção de vibração é indicada pelo versor $\hat{\mathbf{j}}$. Em três dimensões, uma onda transversal que se propaga na direção z , conforme mostra a figura 22.3, pode vibrar em qualquer direção perpendicular à direção z . Como exemplo, na figura 22.3.a vemos a onda vibrando na direção x , de modo que ela é descrita por

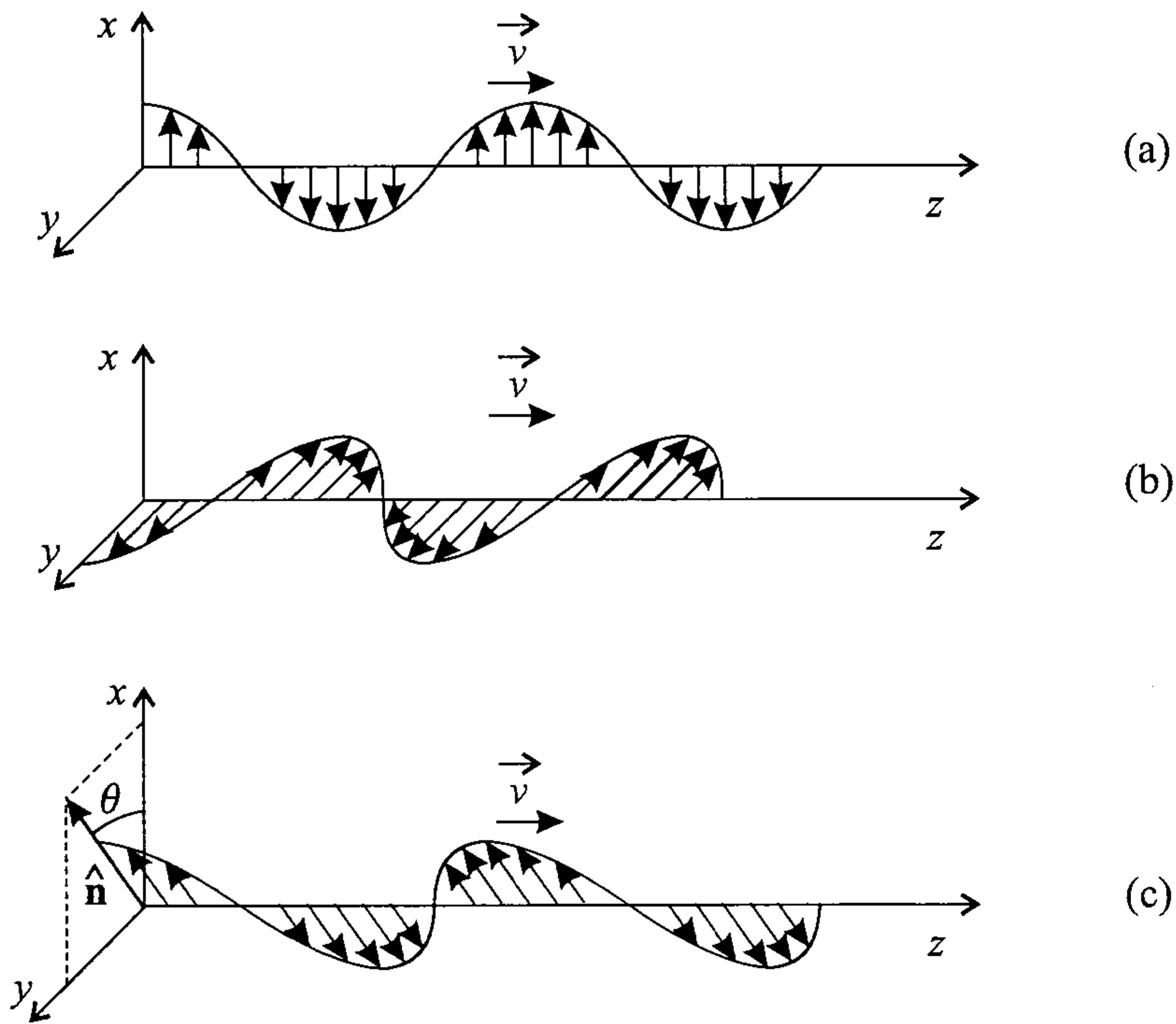


Figura 22.3: Uma onda transversal propagando-se na direção do eixo z vibrando na direção x , em (a); na direção y , em (b); e numa direção qualquer indicada por um versor normal $\hat{n}$, em (c).

$$\vec{\mathcal{F}}_x(z, t) = a e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{i}}$$

ao passo que a onda representada na figura 22.3.b vibra na direção y , sendo representada por

$$\vec{\mathcal{F}}_y(z, t) = b e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{j}}$$

em que b é um coeficiente em geral complexo. Por fim, a onda da figura 22.3.c vibra numa direção indicada pelo versor $\hat{n}$ da figura, que está no plano xy e faz um ângulo θ com a direção x . Note que

$$\hat{n} \cdot \hat{k} = 0$$

e que

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

A onda da figura 22.3.c pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = c e^{i(kz - \omega t)} \hat{n}$$

sendo c um coeficiente possivelmente complexo. A expressão acima pode ser escrita também como

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = c e^{i(kz - \omega t)} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$$

ou

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = (c \cos \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{i} + (c \sin \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{j} \quad (22.10)$$

o que indica que a onda transversal da figura 22.3.c, que se propaga na direção z e vibra na direção definida pelo versor $\hat{n}$, pode ser decomposta em duas outras ondas, uma vibrando na direção x e outra na direção y . Os vetores $\hat{n}$ e $\hat{k}$ definem um plano, e esse plano é o plano de vibração da onda. O versor $\hat{n}$ é chamado de *vetor de polarização* da onda e define a direção em que ela vibra. O ângulo θ é o ângulo de polarização. Assim, qualquer onda propagando-se numa dada direção pode ser considerada como sendo a combinação de duas outras ondas, as quais vibram, ou estão *polarizadas*, nas outras duas dimensões perpendiculares à direção de vibração. A onda da figura 22.3.a está polarizada na direção x , enquanto a onda da figura 22.3.b está polarizada na direção y . Essas ondas são chamadas de ondas *linearmente polarizadas* porque a vibração ocorre sempre numa mesma direção ⁴. Note que a onda dada por 22.10 é formada pela combinação de duas ondas linearmente polarizadas nas direções x e y que têm amplitudes diferentes, mas mesma fase, ou seja, elas estão se superpondo em fase, como pode ser visto se lembrarmos que $c = C e^{i\delta}$, e assim, escrevermos

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = (C e^{i\delta} \cos \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{i} + (C e^{i\delta} \sin \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{j}$$

⁴ A onda da figura 22.3.c está linearmente polarizada na direção $\hat{n}$.

ou

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = \overbrace{(C \cos \theta)}^{C_1} e^{i(kz - \omega t + \delta)} \hat{\mathbf{i}} + \overbrace{(C \sin \theta)}^{C_2} e^{i(kz - \omega t + \delta)} \hat{\mathbf{j}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = C_1 e^{i(kz - \omega t + \delta)} \hat{\mathbf{i}} + C_2 e^{i(kz - \omega t + \delta)} \hat{\mathbf{j}}$$

A fase da onda é dada pelo argumento da exponencial, e ela é igual para as duas ondas, de modo que elas estão em fase. Podemos ainda escrever

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = (C_1 \hat{\mathbf{i}} + C_2 \hat{\mathbf{j}}) e^{i(kz - \omega t + \delta)}$$

como sendo a expressão mais geral para uma onda transversal linearmente polarizada. Quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, $C_1 = C_2$. Quando $\theta = 0$, $C_2 = 0$ e a onda tem apenas a polarização na direção x , ao passo que, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, a onda tem apenas a polarização y .

A combinação de duas ondas linearmente polarizadas com mesma fase (propagando-se na mesma direção) produz uma onda linearmente polarizada, independentemente das amplitudes das ondas que estão sendo superpostas. Podemos estudar agora o caso de duas ondas linearmente polarizadas em direções perpendiculares entre si que têm fases diferentes, mas mesma amplitude. Tais ondas podem ser descritas, por exemplo, mediante

$$\vec{\mathcal{F}}_x(z, t) = A e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \hat{\mathbf{i}}$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_y(z, t) = A e^{i(kz - \omega t + \delta_y)} \hat{\mathbf{j}}$$

que pode ser reescrita, se considerarmos $\delta_y = \delta_x + \alpha$, como

$$\vec{\mathcal{F}}_y(z, t) = A e^{i(kz - \omega t + \delta_x + \alpha)} \hat{\mathbf{j}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{F}}_y(z, t) = A e^{i\alpha} e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \hat{\mathbf{j}}$$

A superposição das duas ondas linearmente polarizadas resulta em

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = \vec{\mathcal{F}}_x(z, t) + \vec{\mathcal{F}}_y(z, t)$$

ou

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = A e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \hat{\mathbf{i}} + A e^{i\alpha} e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \hat{\mathbf{j}}$$

que pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = A(\hat{\mathbf{i}} + e^{i\alpha} \hat{\mathbf{j}}) e^{i(kz - \omega t + \delta_x)}$$

O caso particular mais importante da superposição acima corresponde a termos $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, ou seja, as ondas estão defasadas por um ângulo de 90° . Nesse caso, temos

$$e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \overbrace{\cos \left[\pm \frac{\pi}{2} \right]}^0 + i \overbrace{\sin \left[\pm \frac{\pi}{2} \right]}^{\pm 1} = \pm i$$

e a onda fica

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = A(\hat{\mathbf{i}} \pm i \hat{\mathbf{j}}) e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \quad (22.11)$$

ou

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = A(\hat{\mathbf{i}} \pm i \hat{\mathbf{j}}) [\cos(kz - \omega t + \delta_x) + i \sin(kz - \omega t + \delta_x)]$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{i}} + i A \sin(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{i}} \\ \pm i A \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}} \mp A \sin(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

A onda física é obtida considerando a parte real dessa expressão, ou seja,

$$\vec{f}(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{i}} \mp A \sin(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}}$$

que é formada pela superposição de duas ondas, ou seja,

$$\begin{aligned} f_x(z, t) &= A \cos(kz - \omega t + \delta_x) \\ f_y(z, t) &= \mp A \sin(kz - \omega t + \delta_x) \end{aligned}$$

Note que, considerando um ponto fixo do espaço, o vetor de polarização da onda dada por essas equações descreve um círculo à medida que o tempo passa, e o sentido de giro do vetor depende do sinal da componente f_y . Para ver isso, e apenas para simplificar, vamos considerar uma posição do espaço em que ocorra $kz = -\delta_x$, de modo que ficamos com

$$f_x(z, t) = A \cos \omega t \qquad f_y(z, t) = \pm A \sin \omega t$$

Quando f_y tem sinal positivo, temos a onda

$$\vec{f}(z, t) = A \cos \omega t \hat{\mathbf{i}} + A \sin \omega t \hat{\mathbf{j}}$$

que é representada na figura 22.4.a. O vetor de polarização dessa onda gira num círculo no sentido anti-horário com velocidade angular ω quando a onda é observada no sentido eixo z positivo — origem. Essa onda é dita *circularmente polarizada à esquerda*, seguindo uma nomenclatura utilizada em Óptica, ou uma onda com *helicidade positiva*, já que a projeção do seu momento angular no eixo z é positiva.

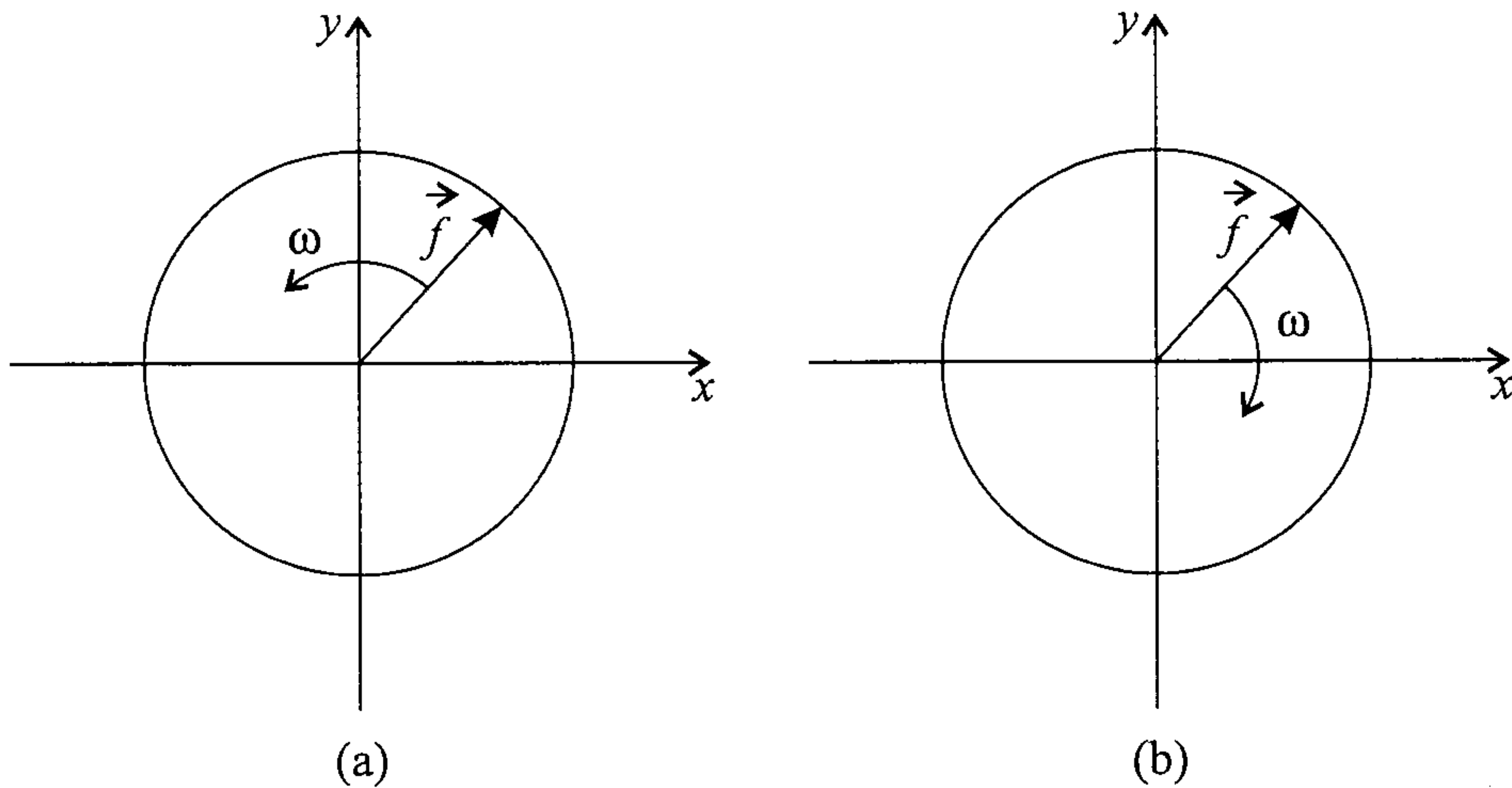


Figura 22.4: Diagramas para ondas circularmente polarizadas. Em (a), a onda é circularmente polarizada à esquerda (tem helicidade positiva). Em (b), ela é circularmente polarizada à direita (helicidade negativa).

Quando f_y tem sinal negativo, temos a onda

$$\vec{f}(z, t) = A \cos \omega t \hat{\mathbf{i}} - A \sin \omega t \hat{\mathbf{j}}$$

que é mostrada na figura 22.4.b. O vetor de polarização dessa onda gira com velocidade angular ω no sentido horário quando a onda é observada no sentido eixo z positivo — origem. Essa onda é dita *circularmente polarizada à direita* (de acordo com a Óptica), ou uma onda com *helicidade negativa*, pois a projeção do seu momento angular no eixo z é negativa. É importante ressaltar que os sentidos de giro do vetor de polarização das ondas descritas acima foram obtidos considerando uma posição fixa no espaço e variando o tempo. Se fixarmos o tempo e variarmos a posição, o giro ocorre no outro sentido, de modo que uma onda que tem um vetor de onda que gira no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio com o passar do tempo, mantendo-se uma posição de observação fixa (onda circularmente polarizada à esquerda), gira no sentido dos ponteiros do relógio ao variarmos a posição de observação e fixando-se um dado instante de tempo (onda com helicidade positiva). A mesma análise vale para o caso da onda circularmente polarizada à direita (helicidade negativa).

Podemos agora analisar o caso geral de superposição de ondas linearmente polarizadas, que envolve duas ondas com amplitudes e fases diferentes, dadas por

$$\vec{\mathcal{F}}_x(z, t) = A e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \hat{\mathbf{i}}$$

e

$$\vec{\mathcal{F}}_y(z, t) = B e^{i(kz - \omega t + \delta_y)} \hat{\mathbf{j}}$$

Como fizemos anteriormente, consideramos $\delta_y = \delta_x + \alpha$, e assim,

$$\vec{\mathcal{F}}_y(z, t) = B e^{i\alpha} e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \hat{\mathbf{j}}$$

A superposição das duas ondas linearmente polarizadas resulta em

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = A e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \hat{\mathbf{i}} + B e^{i\alpha} e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \hat{\mathbf{j}}$$

que pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = (A \hat{\mathbf{i}} + B e^{i\alpha} \hat{\mathbf{j}}) e^{i(kz - \omega t + \delta_x)}$$

ou, explicitando as exponenciais,

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = [A\hat{\mathbf{i}} + B(\cos \alpha + i \sin \alpha)\hat{\mathbf{j}}] [\cos(kz - \omega t + \delta_x) + i \sin(kz - \omega t + \delta_x)]$$

e então,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}(z, t) = & A \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{i}} + B \cos \alpha \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}} \\ & + iB \sin \alpha \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}} + Ai \sin(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{i}} \\ & + Bi \cos \alpha \sin(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}} - B \sin \alpha \sin(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

cuja parte real é

$$\begin{aligned} \vec{f}(z, t) = & A \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{i}} \\ & + B \cos \alpha \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}} - B \sin \alpha \sin(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

que é a superposição de

$$\begin{aligned} f_x(z, t) &= A \cos(kz - \omega t + \delta_x) \\ f_y(z, t) &= B \cos \alpha \cos(kz - \omega t + \delta_x) - B \sin \alpha \sin(kz - \omega t + \delta_x) \end{aligned}$$

Da primeira equação, extraímos

$$\cos(kz - \omega t + \delta_x) = \frac{f_x(z, t)}{A}$$

e, substituindo essa expressão na segunda equação, temos

$$f_y(z, t) = B \cos \alpha \frac{f_x(z, t)}{A} - B \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{f_x^2(z, t)}{A^2}}$$

ou

$$Af_y = B \cos \alpha f_x - B \sin \alpha \sqrt{A^2 - f_x^2}$$

ou ainda,

$$Af_y - B \cos \alpha f_x = -B \sin \alpha \sqrt{A^2 - f_x^2}$$

Elevando essa expressão ao quadrado, temos

$$A^2 f_y^2 - 2AB \cos \alpha f_x f_y + B^2 \cos^2 \alpha f_x^2 = B^2 \sin^2 \alpha (A^2 - f_x^2)$$

ou

$$B^2 \cos^2 \alpha f_x^2 + B^2 \sin^2 \alpha f_x^2 - 2AB \cos \alpha f_x f_y + A^2 f_y^2 = A^2 B^2 \sin^2 \alpha$$

ou ainda,

$$B^2 f_x^2 - 2AB \cos \alpha f_x f_y + A^2 f_y^2 = A^2 B^2 \sin^2 \alpha$$

A equação acima é a equação geral de uma elipse no plano $f_x f_y$ com semi-eixo maior fazendo um ângulo $\frac{\alpha}{2}$ com o eixo f_x . Um caso particular simples de verificar essa afirmação consiste em considerar $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, de modo que temos, dividindo tudo por $A^2 B^2$,

$$\frac{f_x^2}{A^2} + \frac{f_y^2}{B^2} = 1$$

que é uma equação de elipse com semi-eixo maior situada paralelamente ao eixo f_x (considerando $A > B$). Nesse caso, o vetor de polarização da onda num ponto fixo do espaço descreve uma elipse com o passar do tempo, e a onda é dita *elipticamente polarizada*, como mostra a figura 22.5.

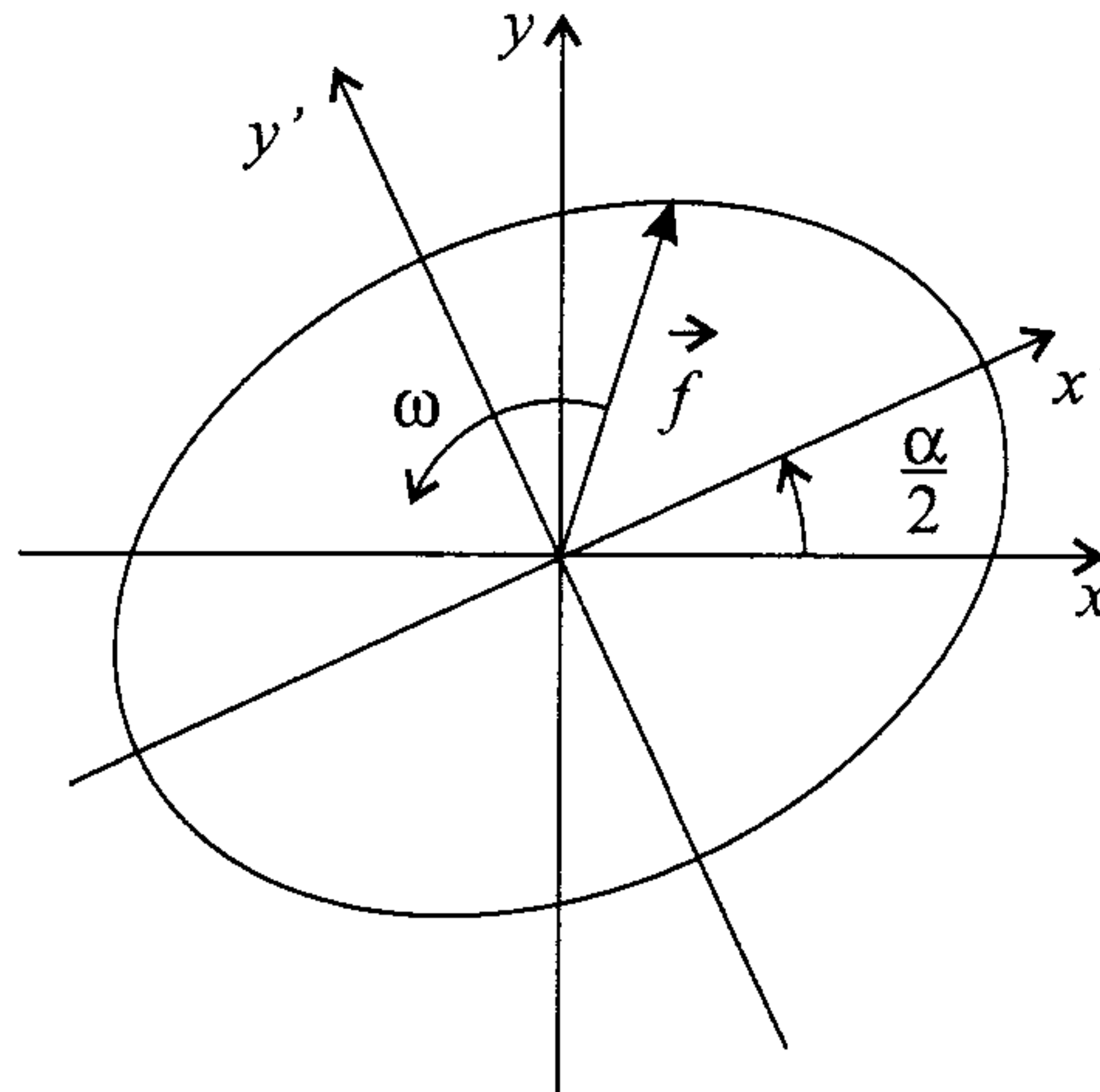


Figura 22.5: Vetor de polarização para uma onda elipticamente polarizada.

ao passo que temos também, considerando $\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}$,

$$\mathcal{F}(\vec{r}, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}] \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} &= Aik_x e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [Aik_x e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}] \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} &= -Ak_x^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}\end{aligned}$$

De modo similar, as outras componentes espaciais tornam-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} &= -Ak_y^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} &= -Ak_z^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}\end{aligned}$$

A derivada temporal de $\mathcal{F}$ fica

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}] \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= -Ai\omega e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}\end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} [-Ai\omega e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}] \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} &= -A\omega^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}\end{aligned}$$

Substituindo as expressões na equação de onda, achamos

$$\begin{aligned}-Ak_x^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)} - Ak_y^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)} \\ - Ak_z^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)} - \frac{1}{v^2} [-A\omega^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)}] = 0\end{aligned}$$

ou

$$-A \left[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} = 0$$

o que resulta em

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

ou

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

ou ainda,

$$v = \pm \frac{\omega}{k}$$

que é a relação 22.7 entre a velocidade da onda, a frequência angular e o número de onda, lembrando que a onda pode se propagar em dois sentidos diferentes, para uma mesma direção, e por isso os dois sinais são permitidos na expressão acima. A onda descrita por 22.12 é uma função de onda, e é importante notar dessa expressão que ela está associada a uma onda com uma frequência angular ω bem definida, sendo chamada de *onda monocromática*. A forma acima para a equação de onda monocromática é particularmente útil, já que uma onda qualquer pode ser escrita em termos de uma combinação linear dessas ondas na forma

$$\mathcal{F}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(k)t + \delta(k))} dk \quad (22.13)$$

onde A , ω e δ podem ser funções de k . Vejamos agora as ondas eletromagnéticas, que são o ponto central de nossa discussão atual.

22.2 Ondas Eletromagnéticas Planas no Vácuo

Nosso objetivo agora é deduzir as equações de onda para as ondas eletromagnéticas. Vamos iniciar considerando ondas no vácuo ou meios como o ar, que têm valores de permissividade e permeabilidade praticamente iguais

aos do vácuo. A situação mais simples envolvendo ondas eletromagnéticas consiste em considerar uma onda propagando-se no vácuo numa região em que não haja cargas nem correntes. Nesse caso, as equações de Maxwell 20.1 tornam-se

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (22.14a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (22.14b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (22.14c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (22.14d)$$

Vamos considerar agora o rotacional da equação 22.14c, isto é,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = -\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \right]$$

Pela propriedade 1.58c, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}}$$

de modo que

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{\mathcal{B}}]$$

onde trocamos a ordem em que as derivadas espaciais e a derivada temporal são feitas porque elas envolvem coordenadas independentes umas das outras. Fazendo uso das relações 22.14a e 22.14d, ficamos com

$$-\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}$$

ou

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (22.15)$$

que pode ser comparada com a equação de onda 22.3,

$$\nabla^2 f(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

onde vemos que a velocidade da onda descrita pelo campo elétrico vale

$$v = \pm \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

cujo valor numérico é aproximadamente $v = 3 \times 10^8$ m/s, que é o mesmo valor medido para a velocidade da luz no vácuo. Assim, escrevemos

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (22.16)$$

Podemos voltar a utilizar as equações de Maxwell 22.14 para determinar a equação diferencial para a componente $\vec{B}$ do campo eletromagnético. Para isso, tomamos o rotacional da equação 22.14d,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

que fica, utilizando a identidade 1.58c,

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{E}]$$

ou, empregando as equações 22.14b e 22.14c,

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (22.17)$$

de modo que a velocidade de propagação do campo magnético também é dada por

$$v = \pm \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

e ambos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ que formam a onda se propagam com a mesma velocidade, e essa velocidade corresponde à velocidade da luz c . Hoje em dia esse

fato não causa surpresa, já que é sabido que a luz é uma forma de onda eletromagnética, mas na época em que Maxwell obteve essas relações não havia essa identificação da luz com ondas eletromagnéticas, até porque outras formas de ondas não tinham ainda sido produzidas. O valor obtido por Maxwell para a velocidade da onda eletromagnética foi calculado em 1861, ao passo que a primeira experiência em que se produziram ondas eletromagnéticas diferentes da luz ocorreu em 1887. Ela foi realizada por Heinrich Hertz, que produziu ondas conhecidas atualmente como ondas de rádio, as quais têm baixas frequências e grandes comprimentos de onda, o que faz com que os modos de detecção dessas ondas sejam diferentes dos usados para a luz. Os equipamentos de Hertz consistiam num transmissor simples formado por um circuito contendo um resistor de resistência $\mathcal{R}$, um capacitor de capacitância $\mathcal{C}$ que era descarregado na resistência e fios ligando esses dois elementos. Considerando a indutância $\mathcal{L}$ dos fios, o circuito acima é um circuito RLC (veja o apêndice G) oscilante amortecido, que emitia ondas eletromagnéticas na faixa de 10^8 Hz, com comprimento de onda de cerca de 1 m. Essas ondas de rádio eram recebidas num receptor formado por uma espira com uma fenda estreita na sua circunferência, de modo que a recepção da onda induzia campos elétricos sobre a espira e, quando a tensão era suficientemente alta, uma descarga elétrica aparecia na região da fenda. Hertz conseguiu ainda verificar fenômenos de reflexão, refração e superposição das ondas de rádio produzidas por ele, reforçando a evidência de que elas e a luz tinham comportamento semelhante.

No sistema internacional de unidades (SI), a velocidade da luz, no vácuo, é representada por c , e é definida como sendo $c = 299792458$ m/s exatamente. Em geral, pode-se aproximar este valor por $c = 3 \times 10^8$ m/s. O *metro* (m) é definido, então, como sendo a distância que a luz percorre no vácuo num intervalo de tempo de $1/299792458$ segundos. Além disso, no SI a permeabilidade magnética no vácuo tem valor $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T.m/A exatamente, e a partir dos valores de μ_0 e c a permissividade elétrica ϵ_0 é obtida, valendo

$$\epsilon_0 = 8,854187818 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N.m}^2$$

conforme já dissemos no Volume I.

Retornando à questão das ondas eletromagnéticas no vácuo, temos que tais ondas são soluções das equações 22.15,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0$$

e 22.17,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{B}}}{\partial t^2} = 0$$

As ondas monocromáticas são descritas por uma frequência angular ω e por um vetor de onda $\vec{k}$ que indica a direção e sentido de propagação da onda, sendo que eles estão relacionados pela expressão 22.7,

$$\omega = vk$$

que fica, para o vácuo,

$$\omega = ck$$

Em coordenadas retangulares, as possíveis soluções das equações diferenciais são dadas pela expressão 22.12, e eles ficam, para o campo elétrico,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (22.18)$$

onde $\vec{\mathcal{E}}_0$ é a amplitude do campo elétrico (um vetor real constante), $\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{\mathcal{E}} e^{i\delta}$ é a extensão complexa de $\vec{\mathcal{E}}_0$, incorporando a constante de fase δ da onda, e $\vec{\mathcal{E}}$ é o campo elétrico complexo, cuja parte real resulta no campo elétrico real, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \Re[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)]$$

O campo magnético tem uma solução semelhante, isto é,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)} = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (22.19)$$

onde $\vec{\mathcal{B}}_0$ é a amplitude (real) do campo magnético, $\vec{\mathcal{B}}_0 = \vec{\mathcal{B}} e^{i\alpha}$ é a extensão complexa de $\vec{\mathcal{B}}_0$, incorporando a constante de fase α da onda, e $\vec{\mathcal{B}}$ é o campo magnético complexo, cuja parte real resulta no campo magnético real, ou seja,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \Re[\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)]$$

As equações de Maxwell impõem restrições auxiliares às soluções 22.18 e 22.19. Note que as equações na forma 22.14 são válidas para a parte real dos campos complexos. Como a parte imaginária deles difere da parte real pela substituição de um cosseno por um seno, elas também valem para a parte imaginária, e para a combinação das duas, ou seja, valem igualmente para os campos complexos. Assim, por 22.14a, temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

Considerando coordenadas retangulares, obtemos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \{ \varepsilon_{0,x} \hat{\mathbf{i}} + \varepsilon_{0,y} \hat{\mathbf{j}} + \varepsilon_{0,z} \hat{\mathbf{k}} \} e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \left[\varepsilon_{0,x} \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon_{0,y} \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_{0,z} \frac{\partial}{\partial z} \right] e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = i[k_x \varepsilon_{0,x} + k_y \varepsilon_{0,y} + k_z \varepsilon_{0,z}] e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

que pode ser escrito como

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

que se reduz a

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

ou

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (22.20)$$

ou seja, $\vec{k} \perp \vec{\mathcal{E}}$, isto é, o campo elétrico (complexo) oscila num plano perpendicular à direção de propagação da onda, de modo que o campo real também exhibe esse comportamento. Podemos fazer agora a mesma análise para o campo magnético, partindo da equação de Maxwell 22.14b,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

que conduz facilmente, seguindo os passos feitos acima, à expressão

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (22.21)$$

de modo que $\vec{k} \perp \vec{\mathcal{B}}$, e o campo magnético também oscila num plano perpendicular à direção de propagação. Isso está de acordo com o fato de que as ondas são transversais. Note que, se considerarmos planos perpendiculares à direção de propagação, veremos que, como a projeção $\vec{k} \cdot \vec{r}$ de $\vec{r}$ sobre $\vec{k}$ é constante para qualquer ponto descrito pelo vetor $\vec{r}$ que pertença a este plano, as ondas acima definem planos em que $\vec{\mathcal{E}}$ é homogêneo, e essas ondas são chamadas de ondas planas. Existem outros tipos de ondas, como as ondas esféricas. Entretanto, numa pequena região do espaço qualquer onda pode ser aproximada por uma onda plana, bastando para isso que o comprimento de onda das ondas seja muito menor do que o seu raio de curvatura.

As outras equações de Maxwell fornecem relações adicionais às obtidas acima. Para a lei de Faraday 22.14c, que se torna

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

precisamos calcular o rotacional de $\vec{\mathcal{E}}$ e a derivada temporal de $\vec{\mathcal{B}}$. A derivada temporal é imediata, já que

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}]$$

que fica

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = -i\omega \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

ou

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = -i\omega \vec{\mathcal{B}} \quad (22.22)$$

Para o rotacional de $\vec{\mathcal{E}}$, temos, em coordenadas retangulares,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times \{ \varepsilon_{0,x} \hat{i} + \varepsilon_{0,y} \hat{j} + \varepsilon_{0,z} \hat{k} \} e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \left[\hat{\mathbf{k}} \varepsilon_{0,y} \frac{\partial}{\partial x} - \hat{\mathbf{j}} \varepsilon_{0,z} \frac{\partial}{\partial x} - \hat{\mathbf{k}} \varepsilon_{0,x} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{i}} \varepsilon_{0,z} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{j}} \varepsilon_{0,x} \frac{\partial}{\partial z} - \hat{\mathbf{i}} \varepsilon_{0,y} \frac{\partial}{\partial z} \right] e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \left[\left(\varepsilon_{0,z} \frac{\partial}{\partial y} - \varepsilon_{0,y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\varepsilon_{0,x} \frac{\partial}{\partial z} - \varepsilon_{0,z} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\varepsilon_{0,y} \frac{\partial}{\partial x} - \varepsilon_{0,x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \right] e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

ou então,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \left[(ik_y \varepsilon_{0,z} - ik_z \varepsilon_{0,y}) \hat{\mathbf{i}} + (ik_z \varepsilon_{0,x} - ik_x \varepsilon_{0,z}) \hat{\mathbf{j}} + (ik_x \varepsilon_{0,y} - ik_y \varepsilon_{0,x}) \hat{\mathbf{k}} \right] e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

Agora, vamos calcular

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = (k_x \hat{\mathbf{i}} + k_y \hat{\mathbf{j}} + k_z \hat{\mathbf{k}}) \times \{ \varepsilon_{0,x} \hat{\mathbf{i}} + \varepsilon_{0,y} \hat{\mathbf{j}} + \varepsilon_{0,z} \hat{\mathbf{k}} \} e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

que fica

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \left[(k_y \varepsilon_{0,z} - k_z \varepsilon_{0,y}) \hat{\mathbf{i}} + (k_z \varepsilon_{0,x} - k_x \varepsilon_{0,z}) \hat{\mathbf{j}} + (k_x \varepsilon_{0,y} - k_y \varepsilon_{0,x}) \hat{\mathbf{k}} \right] e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]}$$

Portanto, temos

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (22.23)$$

Assim, reunindo as expressões 22.22 e 22.23 na lei de Faraday, temos

$$i \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = i \omega \vec{\mathcal{B}}$$

ou

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \omega \vec{\mathcal{B}}$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k}{\omega} \hat{k} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (22.24)$$

ou, como a fração acima é a velocidade da onda eletromagnética, ou seja, c , temos

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (22.25)$$

Assim, da relação acima temos $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{B}}$, e os campos oscilam perpendicularmente entre si e também com relação à direção de propagação. Os campos e o vetor $\vec{k}$ definem direções mutuamente perpendiculares, e eles estão orientados seguindo uma convenção dextrógira na ordem $\vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{B}} \rightarrow \vec{k}$, ou uma permutação par dessa ordem. É importante notar também que eles oscilam em fase, já que, considerando que $\vec{\mathcal{E}}$ é dado por 22.18,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)}$$

e indicando a direção de polarização do campo elétrico por $\hat{n}$, temos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \hat{n}$$

de modo que o campo magnético fica

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{E}_0}{c} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \hat{k} \times \hat{n}$$

Comparando com a solução 22.19,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)} = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

temos $\delta = \alpha$, indicando que as ondas estão em fase, e

$$\vec{B}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c} \hat{k} \times \hat{n}$$

Em módulo, a relação 22.25 acima indica que

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

e, considerando as partes reais,

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{c} \quad (22.26)$$

Dado o valor numérico de c no SI, a expressão acima indica que o campo magnético é muito menos intenso do que o campo elétrico numa onda eletromagnética propagando-se pelo espaço. A quarta equação de Maxwell, dada por 22.14d,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

não fornece nenhuma restrição adicional, já que, seguindo os passos apresentados acima, obtemos

$$\nabla \times \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{B}$$

e

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E} \quad (22.27)$$

e assim,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E}$$

ou

$$\hat{k} \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \overbrace{\frac{\omega}{k}}^c \vec{E}$$

ou ainda,

$$\hat{k} \times \vec{\mathcal{B}} = -\frac{1}{c} \vec{\mathcal{E}}$$

ou seja, $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{B}}$, e, em termo do módulo, já considerando as partes reais,

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

Os campos elétrico e magnético para uma onda eletromagnética monocromática de frequência angular ω bem definida são dados pelas partes reais dos campos complexos, de modo que

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) = \frac{\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0}{c} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

Esses campos definem a onda eletromagnética, que é caracterizada pela frequência angular $\omega = 2\pi\nu$ e por um comprimento de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Algumas das faixas de frequências e comprimentos de onda podem ser vistas na tabela 22.1, e na tabela 22.2 aparecem as faixas para a luz visível. As ondas descritas pelos campos acima têm uma densidade de energia eletromagnética associada dada por 21.9,

$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}})$$

ou, considerando que $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}$ para o vácuo,

$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}^2 \right)$$

Como existe a relação

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

temos

$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{\mathcal{E}^2}{\mu_0 c^2} \right)$$

ν (Hz)	radiação	λ (m)
$10^{18}\text{--}10^{22}$	raios γ	$10^{-9}\text{--}10^{-13}$
$10^{16}\text{--}10^{18}$	raios-x	$10^{-7}\text{--}10^{-9}$
$10^{15}\text{--}10^{16}$	ultravioleta	$10^{-6}\text{--}10^{-7}$
$10^{14}\text{--}10^{15}$	luz visível	$10^{-5}\text{--}10^{-6}$
$10^{12}\text{--}10^{14}$	infravermelho	$10^{-3}\text{--}10^{-5}$
$10^{11}\text{--}10^{12}$	microondas em EHF ⁵	$10^{-2}\text{--}10^{-3}$
$10^9\text{--}10^{11}$	radar	$1\text{--}10^{-2}$
$10^7\text{--}10^9$	TV em UHF ⁶ e VHF ⁷ , rádio FM ⁸ , faixa do cidadão	$10^2\text{--}1$
$10^5\text{--}10^7$	rádio AM ⁹ , OC ¹⁰	$10^4\text{--}10^2$
$10^2\text{--}10^5$	rádio em VLF ¹¹	$10^7\text{--}10^4$
$10\text{--}10^2$	corrente alternada (c. a.)	$10^8\text{--}10^7$

Tabela 22.1: Espectro eletromagnético. Note que alguns intervalos são aproximados.

ou,

$$u_{\text{el}} = \frac{\mathcal{E}^2}{2} \left(\epsilon_0 + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_0} \right)$$

de modo que

$$u_{\text{el}} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2$$

⁵ EHF = *Extremely High Frequency* (frequência extremamente alta).
⁶ UHF = *Ultra High Frequency* (frequência ultra-alta).
⁷ VHF = *Very High Frequency* (frequência muito alta).
⁸ FM = *Frequency Modulation* (frequência modulada).
⁹ AM = *Amplitude Modulation* (amplitude modulada).
¹⁰ OC = ondas curtas.
¹¹ VLF = *Very Low Frequency* (frequência muito baixa).

ν ($\times 10^{14}$ Hz)	Cor	λ ($\times 10^{-7}$ m)
10,0	ultravioleta próximo	3,0
7,5	azul visível mais curto	4,0
6,5	azul	4,6
5,6	verde	5,4
5,1	amarelo	5,9
4,9	laranja	6,1
3,9	vermelho visível mais longo	7,6
3,0	infravermelho próximo	10,0

Tabela 22.2: Espectro eletromagnético da luz visível.

Note que, apesar de a intensidade do campo magnético ser menor, sua contribuição para a energia eletromagnética armazenada na onda é igual à do campo elétrico. Explicitamente, temos

$$u_{el} = \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \tag{22.28}$$

Essa densidade de energia é transportada pela onda, e o fluxo de energia por unidade de área e tempo é dado pelo vetor de Poynting 21.10,

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

que fica, para o nosso caso,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{B}$$

ou

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \times \frac{\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0}{c} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

ou ainda,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{\mathcal{E}}_0 \times (\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

De

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

extraímos

$$\frac{1}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2$$

Além disso, pela relação 1.19a,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

temos

$$\vec{\mathcal{E}}_0 \times (\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0) = (\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}_0)\hat{k} - (\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \hat{k})\vec{\mathcal{E}}_0$$

Como $\vec{\mathcal{E}}_0 \perp \hat{k}$, ficamos com

$$\vec{\mathcal{E}}_0 \times (\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0) = \mathcal{E}_0^2 \hat{k}$$

Portanto, o vetor de Poynting fica

$$\vec{S} = \frac{1}{c} \epsilon_0 c^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \mathcal{E}_0^2 \hat{k}$$

ou

$$\vec{S} = c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \hat{k}$$

ou ainda, utilizando a densidade de energia dada por 22.28,

$$\vec{S} = c u_{\text{el}} \hat{k}$$

O resultado acima pode ser entendido facilmente se considerarmos que a onda eletromagnética propaga-se com velocidade c na direção e sentido definidos pelo versor $\hat{k}$. Vamos considerar uma superfície S na qual é definida uma área dA orientada de forma perpendicular ao versor $\hat{k}$, conforme mostra a figura 22.7.

Pela área dA passa um certo fluxo de energia num intervalo de tempo dt . Nesse tempo, a onda percorre uma distância $d\ell = c dt$, de modo que o

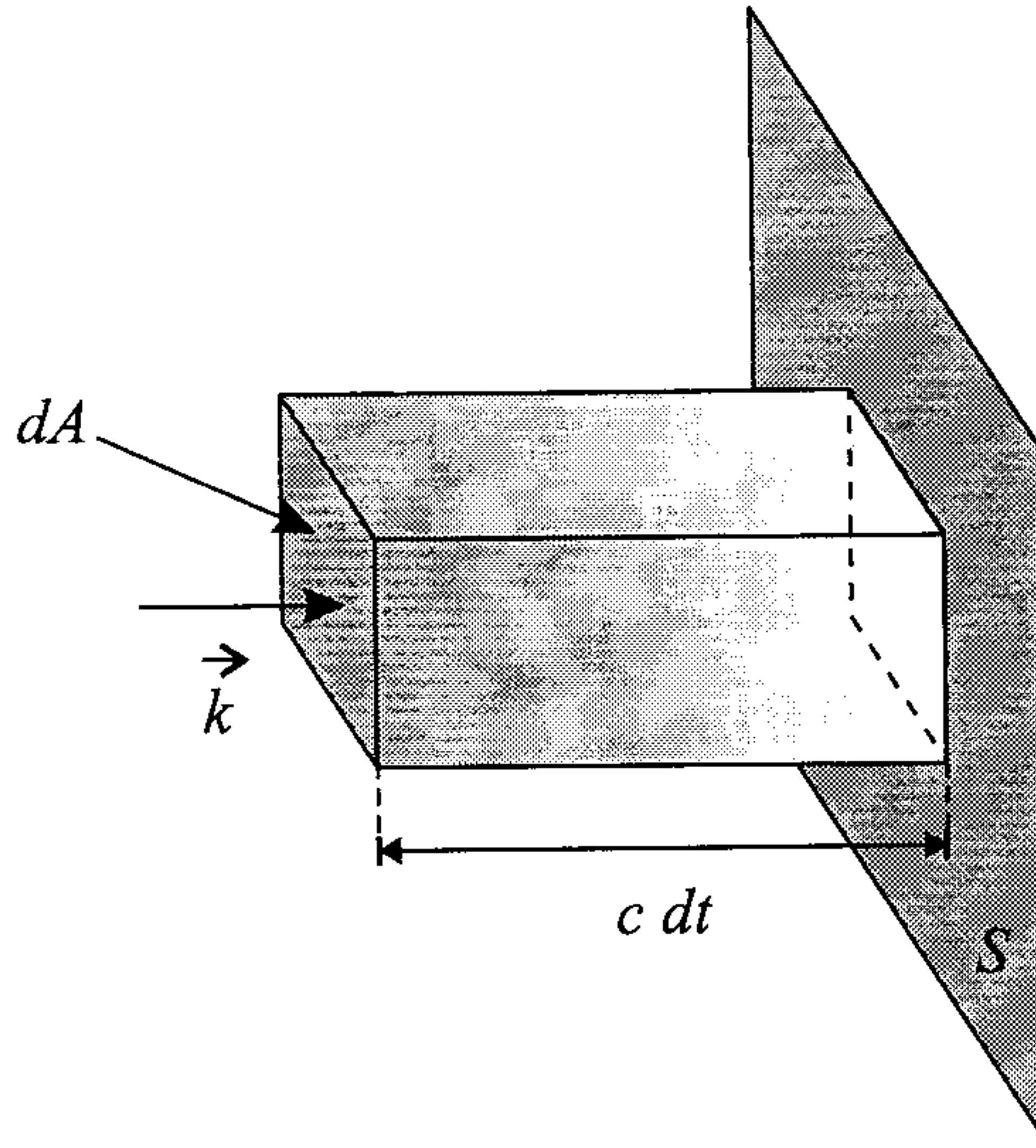


Figura 22.7: Representação do fluxo de energia transportado pela onda através de uma superfície de área A .

volume do paralelepípedo da figura vale $dV = c dt dA$. A energia contida nesse volume fica, então,

$$dU_{\text{el}} = u_{\text{el}} dV = u_{\text{el}} c dt dA$$

O fluxo de energia por unidade de área e tempo fica, portanto,

$$\mathcal{S} = \frac{dU_{\text{el}}}{dA dt} = cu_{\text{el}}$$

e esse fluxo propaga-se na direção e sentido do versor $\hat{k}$, de modo que o vetor de Poynting fica sendo

$$\vec{\mathcal{S}} = cu_{\text{el}} \hat{k}$$

que é o resultado obtido anteriormente. Além de transportar energia eletromagnética, a onda também tem um momento linear associado, dado por 21.30,

$$\vec{p}_{\text{el}} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{S}} = \frac{\vec{\mathcal{S}}}{c^2}$$

ou seja,

$$\vec{p}_{\text{el}} = \frac{u_{\text{el}} \hat{k}}{c}$$

ou, explicitamente, utilizando 22.28,

$$\vec{p}_{\text{el}} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)}{c} \hat{k} \quad (22.29)$$

As densidades de energia e momento linear dadas em 22.28 e 22.29 são funções instantâneas do tempo que oscilam em torno de um valor médio ou efetivo. Esse valor médio é importante, pois, se o comprimento de onda e o período da onda eletromagnética forem pequenos, como ocorre com a luz, por exemplo, são esses valores que são obtidos em medidas macroscópicas. Assim, é interessante considerar seus valores médios sobre um ciclo de oscilação da onda. O valor médio de uma grandeza x durante um ciclo é dado por

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x dt$$

de modo que, lembrando que $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt$$

ou

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt$$

Vamos definir

$$\begin{aligned} y &= \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta & dy &= -\omega dt \\ t = 0 &\Rightarrow y_1 = \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta & t = \frac{2\pi}{\omega} &\Rightarrow y_2 = \vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi + \delta = y_1 - 2\pi \end{aligned}$$

e assim, a integral torna-se

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = -\frac{1}{\omega} \int_{y_1}^{y_2} \cos^2 y dy$$

Como

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

temos

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = -\frac{1}{\omega} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1 + \cos 2y}{2} dy$$

ou

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = -\frac{1}{2\omega} \left[y + \frac{\sin 2y}{2} \right]_{y_1}^{y_2}$$

ou ainda,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = -\frac{1}{2\omega} \left[y_2 - y_1 + \frac{\sin 2y_2 - \sin 2y_1}{2} \right]$$

ou então,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = -\frac{1}{2\omega} \left[y_1 - 2\pi - y_1 + \frac{\sin 2(y_1 - 2\pi) - \sin 2y_1}{2} \right]$$

de modo que

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = -\frac{1}{2\omega} \left[-2\pi + \frac{\sin(2y_1 - 4\pi) - \sin 2y_1}{2} \right]$$

Mas

$$\sin(2y_1 - 4\pi) = \sin 2y_1 \overbrace{\cos 4\pi}^1 - \overbrace{\sin 4\pi}^0 \cos 2y_1 = \sin 2y_1$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = \frac{\pi}{\omega}$$

e

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\pi}{\omega}$$

ou

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = \frac{1}{2} \quad (22.30)$$

o que faz com que a densidade média de energia torne-se

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2}$$

enquanto o vetor de Poynting médio fica sendo

$$\langle \vec{S} \rangle = c \langle u_{\text{el}} \rangle \hat{k}$$

ou

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2} \hat{k}$$

ao passo que a densidade média de momento linear fica

$$\langle \vec{p}_{\text{el}} \rangle = \frac{\langle u_{\text{el}} \rangle \hat{k}}{c}$$

ou

$$\langle \vec{p}_{\text{el}} \rangle = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2c} \hat{k}$$

A potência média por unidade de área transportada pela onda é chamada de *intensidade* $\mathcal{I}$, ou seja,

$$\mathcal{I} \equiv \langle S \rangle = \frac{c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2} \quad (22.31)$$

Quando a onda incide numa superfície que a absorve completamente, o momento eletromagnético que ela transporta é transferido para o material. Utilizando a figura 22.7, podemos determinar a quantidade de momento transferida por unidade de tempo. A densidade média de momento linear é

$$\langle \vec{p}_{\text{el}} \rangle = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2c} \hat{k}$$

e o volume do paralelepípedo da figura é $dV = c \, dt dA$, de modo que ele contém uma quantidade

$$\langle \vec{P}_{\text{el}} \rangle = \langle \vec{p}_{\text{el}} \rangle dV = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2c} \hat{k} c \, dt dA = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2} dt dA \hat{k}$$

de momento linear eletromagnético. Esse momento é transferido completamente para o material já que ele é um absorvedor perfeito, de modo que a força média que age nele é dada por

$$\langle \vec{\mathcal{F}} \rangle = \frac{d\langle \vec{P}_{\text{el}} \rangle}{dt} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2} dA \hat{k}$$

e a pressão exercida por essa radiação, chamada de *pressão de radiação*, é dada pela força média (em módulo) por unidade de área, ou seja,

$$P_{\text{rad}} = \frac{\langle \mathcal{F} \rangle}{dA} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2}{2} = \frac{\mathcal{I}}{c} \quad (22.32)$$

Quando o material no qual a onda incide é um refletor perfeito, ela retorna e o seu momento linear eletromagnético mantém o módulo, mas troca de sentido e de sinal. Por causa disso, o momento linear adquirido pelo material é o dobro do valor calculado acima, e a pressão de radiação também dobra.

As transferências de energia e momento linear que ocorrem entre a onda eletromagnética e um material que absorve essas grandezas podem ser entendidas de um modo qualitativo simples. Vamos considerar um campo elétrico orientado na direção x , um campo magnético na direção y e uma onda propagando-se na direção z positiva. Quando essa onda atinge um dado material, os elétrons dele ficam sujeitos a uma força de Lorentz produzida pelos campos. A força elétrica age na mesma direção que o campo elétrico e faz com que os elétrons se movam na direção x . O campo magnético, por sua vez, produz uma força perpendicular tanto à velocidade quanto ao campo, de modo que ela fica na direção z . Considerando a situação mais simples, em que os elétrons estejam em ressonância com os campos externos, a força elétrica e a sua velocidade na direção x estão em fase e orientam-se no mesmo sentido. Desse modo, a força elétrica produz um trabalho sobre os elétrons mesmo quando é feita a média temporal durante um ciclo de oscilação do campo. Esse trabalho vem da energia transportada pela onda, que é transferida por meio da força elétrica. Por outro lado, a transferência média de momento linear realizada por essa força durante um ciclo de

oscilação do campo elétrico é nula, já que a força durante meio ciclo aponta num sentido do eixo e no meio ciclo seguinte o sentido se inverte. O momento transferido num semi-ciclo é extraído no semi-ciclo seguinte, e a média é nula.

No que diz respeito à força magnética, ela não realiza trabalho, pois é sempre perpendicular ao deslocamento da carga. Assim, ela não participa da transferência de energia entre a onda e os elétrons do material. Entretanto, como a velocidade dos elétrons está em fase com os campos, quando há a inversão do sentido da velocidade, o campo magnético também se inverte, de modo que a força magnética produzida sobre a carga mantém o mesmo sentido durante todo o ciclo de oscilação do campo magnético. Além disso, esse sentido é o mesmo de propagação da onda, de modo que a força é exercida no material. Essa força agindo durante um certo intervalo de tempo produz a transferência de momento linear entre a onda e os elétrons do material, e ela é o mecanismo responsável pelo aparecimento da pressão de radiação, já que a força age sobre uma certa área do objeto.

É importante estabelecer de um modo mais formal a pressão de radiação em termos de grandezas já conhecidas. Lembrando a discussão feita logo após a apresentação da equação 21.38, notamos que o tensor das tensões de Maxwell $\vec{T}$ tem unidade de força por unidade de área, sendo que suas componentes diagonais representam pressões, e as outras componentes, fora das diagonais, representam cisalhamentos. Assim, para selecionar a força exercida pelo campo eletromagnético por unidade de área orientada na direção normal à uma superfície, devemos considerar a expressão

$$P_{rad} = -\hat{n} \cdot \vec{T} \cdot \hat{n} \quad (22.33)$$

Vejamos agora algumas aplicações.

Exemplo 22.1. *Para ter uma idéia da ordem de grandeza das densidades de energia, momento linear e pressão de radiação exercidas pelas ondas eletromagnéticas, vamos considerar que a intensidade média recebida na superfície terrestre seja de $\mathcal{I} = 1300 \text{ W/m}^2$ e vamos determinar $\langle u_{el} \rangle$, $\langle p_{el} \rangle$ e P .*

A densidade média de energia pode ser obtida da intensidade $\mathcal{I}$, que é o módulo do vetor de Poynting, através de

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{\mathcal{I}}{c} = \frac{\langle S \rangle}{c}$$

e ela fica

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{1300}{3 \times 10^8} = 4,33 \times 10^{-6} \text{ J/m}^3$$

que é também o valor da pressão de radiação dada por 22.32,

$$P_{rad} = 4,33 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

A pressão atmosférica no nível do mar vale

$$P_{atm} = 1,015 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

de modo que a razão entre elas fica

$$\frac{P_{atm}}{P_{rad}} = \frac{1,015 \times 10^5}{4,33 \times 10^{-6}} = 2,34 \times 10^{10}$$

ou seja, a pressão exercida pela radiação é praticamente desprezível quando comparada com a produzida pela atmosfera (no nível do mar), tornando muito difícil verificar seus efeitos. Apesar disso, em 1900, P. N. Lebedev detectou pela primeira vez a existência dessa pressão. Ela entra como um dos fatores responsáveis pela forma da cauda dos cometas quando eles estão próximos ao Sol, e também produz efeitos indesejáveis sobre os satélites que orbitam a Terra, provocando pequenas alterações nas órbitas deles, as quais precisam ser devidamente corrigidas, principalmente quando os satélites envolvidos são responsáveis por sistemas de posicionamento global (GPS), pois esses sistemas são extremamente precisos e mínimas alterações nas órbitas dos satélites podem produzir erros de posicionamento bastante grandes para uma dada aplicação em questão.

A pressão de radiação também foi importante nos primeiros estágios de formação do universo, logo após o *big bang*, em que havia uma grande densidade de energia e momento eletromagnético concentrados num universo relativamente pequeno. Aplicações atuais incluem a fusão nuclear, em que *lasers* potentes bombardeiam partículas de pequenas dimensões visando aumentar bastante as suas temperaturas e induzir o processo de fusão. Uma outra aplicação, talvez mais futurista, consiste em utilizar grandes painéis como “velas” para aproveitar o “vento” solar numa viagem espacial. Como as forças são pequenas, apenas se a viagem for suficientemente longa as velocidades adquiridas podem ser apreciáveis.

A densidade média de momento linear é obtida por meio de

$$\langle p_{\text{el}} \rangle = \frac{\langle u_{\text{el}} \rangle}{c}$$

e ela vale

$$\langle p_{\text{el}} \rangle = \frac{4,33 \times 10^{-6}}{3 \times 10^8} = 1,44 \times 10^{-14} \text{ N.s/m}^3$$

Exemplo 22.2. Considere uma onda eletromagnética plana monocromática propagando-se no sentido positivo do eixo z . O campo elétrico oscila na direção x , e o magnético, na direção y .

a) Determine o tensor das tensões de Maxwell.

O tensor das tensões de Maxwell é dado pela equação 21.35,

$$T_{\alpha,\beta} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{\alpha,\beta} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_\alpha \mathcal{B}_\beta - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{\alpha,\beta} \right)$$

A onda é definida pelos campos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_x(\vec{r}, t) \hat{\mathbf{i}} = \mathcal{E}_{x_0} \cos(kz - \omega t - \delta) \hat{\mathbf{i}}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \mathcal{B}_y(\vec{r}, t) \hat{\mathbf{j}} = \mathcal{E}_{y_0} \cos(kz - \omega t - \delta) \hat{\mathbf{j}}$$

Para a componente T_{xx} , temos

$$T_{xx} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_x - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{xx} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_x \mathcal{B}_x - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{xx} \right)$$

ou

$$T_{xx} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} - \frac{\mathcal{B}_y^2}{2\mu_0}$$

Lembrando a equação 22.26, que relaciona os módulos dos campos elétrico e magnético,

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

temos

$$T_{xx} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} - \frac{\mathcal{E}_x^2}{2c^2 \mu_0}$$

Como

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

temos

$$T_{xx} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} - \frac{\mathcal{E}_x^2}{2\mu_0 \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

ou

$$T_{xx} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} - \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} = 0$$

A componente T_{xy} vale

$$T_{xy} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{xy} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_x \mathcal{B}_y - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{xy} \right)$$

ou

$$T_{xy} = 0$$

e, como o tensor das tensões de Maxwell é simétrico (veja a expressão 21.52), temos

$$T_{yx} = 0$$

A próxima componente é T_{yy} , que fica

$$T_{yy} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_y \mathcal{E}_y - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{yy} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_y \mathcal{B}_y - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{yy} \right)$$

ou

$$T_{yy} = -\frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} + \frac{\mathcal{B}_y^2}{2\mu_0}$$

Utilizando a relação 22.26, a equação acima torna-se

$$T_{yy} = 0$$

Vamos calcular agora a componente T_{xz} , ou seja,

$$T_{xz} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_x \mathcal{E}_z - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{xz} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_x \mathcal{B}_z - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{xz} \right) = 0$$

que se anula, assim como a componente T_{xz} . A próxima componente é T_{yz} , que vale

$$T_{yz} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_y \mathcal{E}_z - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{yz} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_y \mathcal{B}_z - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{yz} \right) = 0$$

e ela também se anula, de modo que $T_{zy} = 0$. A última componente é T_{zz} , ou seja,

$$T_{zz} = \epsilon_0 \left(\mathcal{E}_z \mathcal{E}_z - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \delta_{zz} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{B}_z \mathcal{B}_z - \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \delta_{zz} \right)$$

ou

$$T_{zz} = -\frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} - \frac{\mathcal{B}_y^2}{2\mu_0}$$

ou ainda, empregando novamente a relação 22.26, achamos

$$T_{zz} = -\frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} - \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2}{2} = \epsilon_0 \mathcal{E}_x^2$$

Assim, o tensor das tensões de Maxwell fica sendo

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_0 \mathcal{E}_x^2 \end{bmatrix}$$

b) Determine a pressão de radiação exercida pela onda numa superfície perpendicular à direção z de propagação da onda.

A pressão de radiação é dada pela equação 22.33,

$$P_{rad} = -\hat{n} \cdot \overleftrightarrow{T} \cdot \hat{n}$$

e como a normal à superfície está na direção z , e $\vec{T}$ só tem componente T_{zz} , temos

$$P_{rad} = -\hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{T} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \epsilon_0 \mathcal{E}_x^2$$

que é o valor instantâneo da pressão de radiação. É importante também calcular o valor médio temporal, obtido durante um ciclo de oscilação da onda, dado por

$$\langle P_{rad} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P_{rad} dt = \langle \epsilon_0 \mathcal{E}_x^2 \rangle = \epsilon_0 \langle \mathcal{E}_x^2 \rangle$$

Para calcular essa média, vamos antecipar a relação 22.49, que será demonstrada na próxima seção, isto é, dadas duas funções reais f e g , de amplitudes complexas $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{G}_0$, o valor médio do produto fg é dado por

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F}_0 \mathcal{G}_0^*] = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F}_0^* \mathcal{G}_0]$$

Como nossos campos são reais e têm amplitudes reais $\mathcal{E}_{x_0}$ e $\mathcal{B}_{y_0}$, achamos

$$\langle P_{rad} \rangle = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}_{x_0}^2}{2}$$

que concorda com o valor determinado anteriormente na equação 22.32.

22.3 Ondas Eletromagnéticas Planas em Meios Dielétricos

Na seção anterior estudamos o comportamento das ondas eletromagnéticas no vácuo na ausência de fontes (cargas e correntes). O próximo passo consiste em verificar o que ocorre quando as ondas eletromagnéticas planas se propagam em meios dielétricos lineares, caracterizados por uma permissividade ϵ e uma permeabilidade μ , supostos inicialmente reais, de modo que não há dissipação no meio. Nesse caso, as equações de Maxwell 19.20 tornam-se

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} &= 0 \\
\nabla \times \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{\mathcal{H}} &= \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Como $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$, essas equações ficam

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (22.34a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (22.34b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (22.34c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (22.34d)$$

Note que a única diferença entre as equações acima e as expressões 22.14 é a substituição de $\mu_0 \epsilon_0$ por $\mu \epsilon$ na equação 22.14d, resultando na expressão 22.34d. A primeira consequência desse fato é que a velocidade das ondas, que vale, de acordo com a expressão 22.16,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

torna-se

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} \quad (22.35)$$

que pode ser relacionada à velocidade da onda no vácuo através de

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}} \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

ou ainda,

$$v = c \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}} \quad (22.36)$$

O fator

$$n = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (22.37)$$

é chamado de *índice de refração* do material, sendo em geral um número real maior ou igual a 1, o que indica que a onda eletromagnética é mais lenta num meio isolante do que no vácuo.

Cabe perguntar, se a onda eletromagnética é mais lenta no meio isolante, você acha que isso significa que os fótons ficam mais lentos nesse meio?

A velocidade da onda no meio pode ser escrita como

$$v = \frac{c}{n} \quad (22.38)$$

Todos os resultados obtidos anteriormente para o vácuo podem ser transportados para o caso em que o meio é isolante através da modificação de ϵ_0 por ϵ , μ_0 por μ e c por v . Assim, os campos tornam-se

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \quad (22.39)$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) = \frac{\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0}{v} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \quad (22.40)$$

com k sendo dado pela relação 22.7,

$$\omega = vk$$

ou

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = n \frac{\omega}{c} \quad (22.41)$$

onde fizemos uso das expressões 22.35 e 22.38. A densidade de energia eletromagnética fica

$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon \mathcal{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathcal{B}^2 \right)$$

Como existe a relação

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{v} = \sqrt{\mu\epsilon} \mathcal{E}$$

temos

$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon \mathcal{E}^2 + \frac{\mu\epsilon \mathcal{E}^2}{\mu} \right)$$

ou

$$u_{\text{el}} = \epsilon \mathcal{E}^2$$

cujo valor médio é

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{\epsilon \mathcal{E}_0^2}{2}$$

O vetor de Poynting 21.10,

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

fica, para o nosso caso,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}$$

enquanto o vetor de Poynting médio fica sendo

$$\langle \vec{S} \rangle = v \langle u_{\text{el}} \rangle \hat{k}$$

ou

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{v\epsilon \mathcal{E}_0^2}{2} \hat{k}$$

A onda transporta um momento linear dado por 21.30,

$$\vec{p}_{\text{el}} = \epsilon\mu\vec{S} = \frac{\vec{S}}{v^2}$$

ou seja,

$$\vec{p}_{\text{el}} = \frac{u_{\text{el}} \hat{k}}{v}$$

e a densidade média de momento linear fica

$$\langle \vec{p}_{\text{el}} \rangle = \frac{\langle u_{\text{el}} \rangle \hat{k}}{v}$$

ou

$$\langle \vec{p}_{\text{el}} \rangle = \frac{\epsilon\mathcal{E}_0^2}{2v} \hat{k}$$

A intensidade da onda é dada por 22.31,

$$\mathcal{I} = \langle S \rangle = \frac{v\epsilon\mathcal{E}_0^2}{2}$$

e a pressão de radiação, que pode ser obtida da equação 22.32, torna-se

$$P = \frac{\epsilon\mathcal{E}_0^2}{2} = \frac{\mathcal{I}}{v}$$

Lembrando que $\mathcal{B} = \frac{\mathcal{E}}{v}$, vemos que a razão entre os módulos dos campos vale

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{\mathcal{E}}{v}} = v$$

Utilizando a expressão 22.35, a expressão anterior pode ser reescrita, recordando que $\mathcal{B} = \mu\mathcal{H}$, como

$$\frac{\mathcal{E}}{\mu\mathcal{H}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}$$

ou

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

A grandeza

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (22.42)$$

é chamada de *impedância do meio*¹². No vácuo, o valor da impedância é

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}_{\text{vácuo}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377 \, \Omega \quad (22.43)$$

É importante notar que as soluções 22.39,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

e 22.40,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) = \frac{\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}_0}{v} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

para os campos eletromagnéticos que produzem uma onda plana foram obtidas considerando que o vetor de onda $\vec{k}$ nas expressões 22.18,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

e 22.19,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

é um vetor real, de modo que essas ondas são ondas planas homogêneas, ou seja, os planos de amplitude constante, ou fase constante, são paralelos entre si. As ondas podem ser planas mas não-homogêneas, e nesse caso devemos considerar a possibilidade de o versor $\hat{k}$ ser complexo, podendo ser escrito como

$$\hat{k} = \hat{k}_{\Re} + i\hat{k}_{\Im}$$

onde $\hat{k}_{\Re}$ é a parte real de $\hat{k}$ e $\hat{k}_{\Im}$ é a imaginária. Assim, a função exponencial nas expressões acima se torna

¹² A impedância tem unidade de resistência elétrica. Ela se comporta como uma resistência elétrica efetiva, mas pode ser uma grandeza complexa. Para maiores informações, consulte o apêndice G.

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{i[k(\hat{k}_{\mathcal{R}} + i\hat{k}_{\mathcal{I}}) \cdot \vec{r} - \omega t]}$$

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{-k\hat{k}_{\mathcal{I}} \cdot \vec{r}} e^{i(k\hat{k}_{\mathcal{R}} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

ou seja, existe um termo oscilante associado à parte real de $\hat{k}$, mas agora aparece um fator exponencial real, que pode ser crescente ou decrescente (amortecido), associado à parte imaginária de $\hat{k}$. Nesse caso, a onda resultante deixa de ser homogênea. Além disso, devemos satisfazer a relação

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

o que implica que

$$(\hat{k}_{\mathcal{R}} + i\hat{k}_{\mathcal{I}}) \cdot (\hat{k}_{\mathcal{R}} + i\hat{k}_{\mathcal{I}}) = 1$$

ou

$$\hat{k}_{\mathcal{R}}^2 - \hat{k}_{\mathcal{I}}^2 + 2i\hat{k}_{\mathcal{R}} \cdot \hat{k}_{\mathcal{I}} = 1$$

de modo que

$$\hat{k}_{\mathcal{R}}^2 - \hat{k}_{\mathcal{I}}^2 = 1$$

e

$$\hat{k}_{\mathcal{R}} \cdot \hat{k}_{\mathcal{I}} = 0$$

Essa última expressão indica que $\hat{k}_{\mathcal{R}}$ e $\hat{k}_{\mathcal{I}}$ são ortogonais, de forma que um deles, por exemplo $\hat{k}_{\mathcal{R}}$, pode ser colocado no eixo z , e o outro ($\hat{k}_{\mathcal{I}}$), orientado no eixo x . A penúltima equação é satisfeita, em geral, quando utilizamos funções hiperbólicas, lembrando que

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

Portanto, escrevendo para $\hat{k}$

$$\hat{k} = \overbrace{\cosh \theta}^{\hat{k}_{\mathcal{R}}} \hat{\mathbf{k}} + i \overbrace{\sinh \theta}^{\hat{k}_{\mathcal{I}}} \hat{\mathbf{i}}$$

vemos que as duas condições acima são satisfeitas e que o caso geral de uma onda plana homogênea propagando-se no eixo z ocorre quando $\theta = 0$. Devemos respeitar também a condição 22.20, que, em termos de $\hat{k}$, fica

$$\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

ou, utilizando a expressão para $\hat{k}$,

$$(\cosh \theta \hat{\mathbf{k}} + i \sinh \theta \hat{\mathbf{i}}) \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

Podemos escrever $\vec{\mathcal{E}}$ como sendo

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0(a \hat{\mathbf{i}} + b \hat{\mathbf{j}} + c \hat{\mathbf{k}})$$

onde a , b e c são constantes complexas, e então,

$$(\cosh \theta \hat{\mathbf{k}} + i \sinh \theta \hat{\mathbf{i}}) \cdot \mathcal{E}_0(a \hat{\mathbf{i}} + b \hat{\mathbf{j}} + c \hat{\mathbf{k}}) = 0$$

ou

$$\mathcal{E}_0 c \cosh \theta + i \mathcal{E}_0 a \sinh \theta = 0$$

ou ainda,

$$c \cosh \theta + i a \sinh \theta = 0$$

A expressão acima é resolvida se

$$\begin{aligned} a &= \cosh \theta \\ c &= -i \sinh \theta \end{aligned}$$

de forma que $\vec{\mathcal{E}}$ fica

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0(\cosh \theta \hat{\mathbf{i}} + b \hat{\mathbf{j}} - i \sinh \theta \hat{\mathbf{k}})$$

que condiz com o caso $\theta = 0$, em que a onda se propaga na direção z e o campo elétrico (e também o magnético) oscila no plano xy . Note que, quando $\theta \neq 0$ e a onda é não-homogênea, $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ têm componentes na direção do versor $\hat{k}$, o que não acontece quando ela é homogênea. Ondas não-homogêneas ocorrem quando os meios são condutores, assunto que veremos na seção 22.4.

Antes, porém, devemos estabelecer um modo simples de obter médias temporais envolvendo grandezas complexas. Para isso, vamos considerar as funções complexas

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\vec{r}, t) &= \mathcal{F}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \mathcal{G}(\vec{r}, t) &= \mathcal{G}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

cujas partes reais são, lembrando que $\mathcal{F}_0 = f_0 e^{i\delta_f}$ e $\mathcal{G}_0 = g_0 e^{i\delta_g}$,

$$\begin{aligned}f(\vec{r}, t) &= f_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_f) \\ g(\vec{r}, t) &= g_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_g)\end{aligned}$$

Nosso objetivo é calcular a média temporal do produto $f(\vec{r}, t)g(\vec{r}, t)$, ou seja, determinar

$$\langle fg \rangle = \langle f_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_f) g_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_g) \rangle \quad (22.44)$$

Aqui é útil relembrar a relação 22.30,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = \frac{1}{2}$$

que estabelece que

$$\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) dt = \frac{1}{2}$$

ou, de forma geral,

$$\langle \cos^2 \theta(t) \rangle = \frac{1}{2} \quad (22.45)$$

Portanto, como

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

temos

$$\langle \cos^2 \theta \rangle + \langle \sin^2 \theta \rangle = \langle 1 \rangle$$

ou

$$\langle \sin^2 \theta(t) \rangle = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (22.46)$$

Além disso, vamos precisar também de

$$\langle \cos \theta(t) \sin \theta(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \theta(t) \sin \theta(t) dt$$

sendo que $\theta(t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta$. Agora, definimos

$$u = \sin^2 \theta$$

$$du = 2 \sin \theta \cos \theta \overbrace{\frac{d\theta}{dt}}^{\omega} dt$$

$$\sin \theta \cos \theta dt = \frac{du}{2\omega}$$

Retornando à integral, ficamos com

$$\langle \cos \theta(t) \sin \theta(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{2\omega}$$

ou

$$\langle \cos \theta(t) \sin \theta(t) \rangle = \frac{1}{T} \left[\frac{u}{2\omega} \right]_{u_1}^{u_2}$$

ou ainda,

$$\langle \cos \theta(t) \sin \theta(t) \rangle = \frac{1}{2\omega T} [\sin^2 \theta(T) - \sin^2 \theta(0)]$$

Como a função seno é periódica de período T , temos

$$\sin^2 \theta(T) = \sin^2 \theta(0)$$

ou

$$\langle \cos \theta(t) \sin \theta(t) \rangle = 0 \quad (22.47)$$

Agora, podemos retornar ao problema inicial, que consiste em calcular a média dada pela expressão 22.44. Podemos reescrevê-la como

$$\langle fg \rangle = f_0 g_0 \left\langle [\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \cos \delta_f - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \sin \delta_f] \right. \\ \left. \times [\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \cos \delta_g - \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \sin \delta_g] \right\rangle$$

ou

$$\langle fg \rangle = f_0 g_0 [\cos \delta_f \cos \delta_g \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle \\ - \cos \delta_f \sin \delta_g \langle \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle \\ - \sin \delta_f \cos \delta_g \langle \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle \\ + \sin \delta_f \sin \delta_g \langle \sin^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle]$$

Utilizando agora as equações 22.45, 22.46 e 22.47, ficamos com

$$\langle fg \rangle = \frac{f_0 g_0}{2} [\cos \delta_f \cos \delta_g + \sin \delta_f \sin \delta_g]$$

ou

$$\langle fg \rangle = \frac{f_0 g_0}{2} \cos(\delta_f - \delta_g) \quad (22.48)$$

Agora, lembramos que

$$\mathcal{F}_0 = f_0 e^{i\delta_f} \\ \mathcal{G}_0 = g_0 e^{i\delta_g}$$

de modo que o produto $\mathcal{F}_0 \mathcal{G}_0^*$, onde $\mathcal{G}_0^*$ denota o complexo conjugado de $\mathcal{G}_0$, fica

$$\mathcal{F}_0 \mathcal{G}_0 = f_0 e^{i\delta_f} g_0 e^{-i\delta_g}$$

ou

$$\mathcal{F}_0 \mathcal{G}_0^* = f_0 g_0 e^{i(\delta_f - \delta_g)}$$

cuja parte real é

$$\Re[\mathcal{F}_0 \mathcal{G}_0^*] = f_0 g_0 \cos(\delta_f - \delta_g)$$

Assim, voltando à equação 22.48, obtemos

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F}_0 \mathcal{G}_0^*]$$

que estabelece a média temporal de um produto de funções reais em termos das amplitudes complexas dessas funções. É interessante notar que a parte espacial das funções, isto é, o fator $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, não aparece no resultado final. Além disso, o resultado anterior se mantém se conjugarmos o primeiro fator ao invés do segundo, ou seja, de uma forma geral,

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F}_0 \mathcal{G}_0^*] = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F}_0^* \mathcal{G}_0] \quad (22.49)$$

e a demonstração da segunda parte da igualdade fica como exercício para o leitor (veja o exercício 22.1). É possível mostrar também que

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F} \mathcal{G}^*] = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F}^* \mathcal{G}] \quad (22.50)$$

ou seja, a média do produto das funções reais é dada pela parte real do produto das funções complexas, tomando o complexo conjugado de uma delas. A demonstração também fica como exercício (veja o exercício 22.2). Com o uso da expressão 22.49, a média temporal da densidade de energia dada por 21.9

$$u_{\text{el}} = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}})$$

torna-se

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}} \rangle$$

ou

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{1}{2} [\langle \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} \rangle + \langle \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}} \rangle]$$

ou ainda,

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{1}{4} \Re[\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{\mathcal{D}}_0^* + \vec{\mathcal{B}}_0 \cdot \vec{\mathcal{H}}_0^*]$$

que pode ser reescrita, mediante a expressão 22.50, como

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{1}{4} \Re[\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* + \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}^*] \quad (22.51)$$

ou ainda, como ¹³

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{1}{4} \Re \left[\epsilon^* \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\mu^*} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* \right]$$

Outra grandeza importante é a média do vetor de Poynting 21.10,

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

que se torna

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \rangle$$

ou

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re [\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re [\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}] \quad (22.52)$$

ou ainda, em termos das amplitudes complexas dos campos, temos

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re [\vec{\mathcal{E}}_0 \times \vec{\mathcal{H}}_0^*] = \frac{1}{2} \Re [\vec{\mathcal{E}}_0^* \times \vec{\mathcal{H}}_0] \quad (22.53)$$

22.4 Ondas Eletromagnéticas Planas em Meios Condutores

Após o estudo da propagação de ondas em meios dielétricos, o próximo passo consiste em verificar o que ocorre com as ondas eletromagnéticas em meios condutores lineares e isotrópicos, dotados de uma condutividade $\mathfrak{s}$, permissividade ϵ e permeabilidade μ . Nesse caso, a incidência dos campos eletromagnéticos oscilantes da onda sobre o material condutor vai produzir correntes elétricas reais por causa da atuação do campo elétrico oscilante. Além disso, eventualmente pode existir uma densidade de carga livre real ρ no material condutor, no início da aplicação da onda. A densidade de corrente $\vec{J}$ pode ser relacionada ao campo elétrico através da equação 12.11,

³ Note que, em geral, $\vec{a} \cdot \vec{a} \neq \vec{a} \cdot \vec{a}^*$, quando $\vec{a}$ é complexo. Além disso, pode ocorrer $\epsilon^* \neq \epsilon$ e $\mu^* \neq \mu$.

$$\vec{J} = \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}}$$

Nesse caso, as equações de Maxwell 20.1 tornam-se

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (22.54a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (22.54b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (22.54c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (22.54d)$$

Se utilizarmos a equação de continuidade 12.21,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (22.55)$$

juntamente com a relação 12.11, temos

$$\mathfrak{s} \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Agora, utilizamos a lei de Gauss 22.54a, ou seja,

$$\mathfrak{s} \frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

que é a equação diferencial 12.22 obtida no capítulo 12 (volume II) para a densidade de carga num material condutor. Sua solução é dada pela expressão 12.24,

$$\rho(\vec{r}, t) = \varrho(\vec{r}, 0) e^{-\frac{t}{\tau_r}}$$

em que o tempo de relaxação τ é dado pela expressão 12.23,

$$\tau_r = \frac{\epsilon}{\mathfrak{s}}$$

Assim, a carga livre no interior do condutor vai dissipar para a superfície do mesmo com um tempo característico τ . Num condutor perfeito, $\mathfrak{s} \rightarrow \infty$, de modo que $\tau_r = 0$. Num bom condutor, τ_r é muito pequeno, menor do que os tempos característicos dos fenômenos relacionados ao condutor, como o

período das ondas eletromagnéticas que nele incidem, por exemplo ¹⁴. Por fim, num mau condutor, o tempo τ_r é maior que os tempos característicos do problema, como o período da onda eletromagnética. Entretanto, independente do caso específico, o fato é que a carga livre move-se do interior do condutor para a sua superfície, fazendo com que a densidade volumétrica de carga se anule. O tempo necessário para isso pode ser curto ou longo, mas isso não importa para nós porque não estamos interessados nesse efeito transiente. Queremos analisar o que ocorre com a onda eletromagnética quando a carga já passou para a superfície do condutor, de modo que $\rho = 0$ no interior do mesmo. Com essa consideração, a lei de Gauss 22.54a torna-se

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (22.56)$$

e as outras equações 22.54 permanecem inalteradas. Note que a diferença em relação às equações de Maxwell para uma onda num dielétrico ocorre na expressão 22.54d, em que aparece um termo proporcional a $\vec{\mathcal{E}}$. Vamos tomar o rotacional da lei de Faraday 22.54c,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = -\nabla \times \left[\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \right]$$

Pela propriedade 1.58c, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}}$$

de modo que

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{\mathcal{B}}] \quad (22.57)$$

onde trocamos a ordem em que as derivadas espaciais e a derivada temporal são feitas, porque elas são coordenadas independentes. Fazendo uso das relações 22.56 e 22.54d, ficamos com

¹⁴ Para o cobre, τ_r é da ordem de 10^{-19} s, ao passo que o tempo médio entre colisões τ é da ordem de 10^{-14} s. De fato, a carga se dissipa com um tempo característico τ , e não τ_r , porque a equação $\vec{J} = \sigma \vec{\mathcal{E}}$ deixa de ser válida para esses tempos muito curtos. Consulte também N. Ashby, *Am. J. Phys.*, **43**, 553 (1975) e H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.*, **51**, 1020 (1983).

$$-\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = -\mu\mathfrak{s} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}$$

ou

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \mu\mathfrak{s} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = 0 \quad (22.58)$$

que difere da equação da onda usual 22.15 pelo termo que envolve a derivada temporal do campo elétrico, além, é claro, da substituição de (ϵ_0, μ_0) por (ϵ, μ) . A equação para o campo magnético é obtida considerando-se o rotacional da equação 22.54d

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) = \mu\mathfrak{s} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu\epsilon \nabla \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

Novamente utilizamos a relação 1.58c, ou seja,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{B}}$$

de modo que

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{B}} = \mu\mathfrak{s} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \vec{\mathcal{E}}]$$

Empregando agora as equações de Maxwell 22.54b e 22.54c, obtemos

$$-\nabla^2 \vec{\mathcal{B}} = -\mu\mathfrak{s} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \right]$$

ou

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{B}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{B}}}{\partial t^2} - \mu\mathfrak{s} \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0 \quad (22.59)$$

que também difere da equação de onda 22.17 pelo termo envolvendo a derivada temporal do campo magnético. As equações 22.58 e 22.59 têm como soluções funções de onda plana (complexa) do tipo

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

como ocorreu nos casos anteriores, lembrando que devemos tomar a parte real dessas soluções. Entretanto, $\vec{k}$ não é mais real, e sim complexo, conforme pode ser visto quando as soluções acima são substituídas nas equações diferenciais. Para facilitar a demonstração, vamos considerar uma onda se propagando na direção z , descrita por

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (22.60a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}(z, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (22.60b)$$

A equação de onda 22.58, considerando apenas a direção z , fica

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \mu\mathfrak{s} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = 0$$

Vamos calcular primeiramente

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial z} = ik \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

e assim,

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)} = -k^2 \vec{\mathcal{E}}$$

Agora, calculamos

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = -i\omega \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)} = -i\omega \vec{\mathcal{E}}$$

e também

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)} = -\omega^2 \vec{\mathcal{E}}$$

Retornando à equação diferencial, ficamos com

$$-k^2 \vec{\mathcal{E}} + \mu\epsilon\omega^2 \vec{\mathcal{E}} + i\mu\mathfrak{s}\omega \vec{\mathcal{E}} = 0$$

ou

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\mathfrak{s}\omega \quad (22.61)$$

o que indica que o vetor de onda $\vec{k}$ é complexo. Assim, podemos escrever o módulo de $\vec{k}$ em termos de sua parte real k e imaginária κ como sendo

$$k = k + i\kappa \quad (22.62)$$

Como consequência imediata, a onda descrita pelos campos dados pelas expressões 22.60 tornam-se

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i[(k+i\kappa)z - \omega t]}$$

$$\vec{\mathcal{B}}(z, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i[(k+i\kappa)z - \omega t]}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (22.63a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}(z, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (22.63b)$$

Assim, além do termo oscilante dado pela parte real de k , descrito pela exponencial complexa, há também um termo de amortecimento associado à parte imaginária de k e expresso pela exponencial real. Os campos acima são amortecidos e as ondas descritas por eles não são mais homogêneas, conforme vimos na seção 22.3. Para obter os valores de k e κ em termos das propriedades características do condutor, elevamos ao quadrado a relação 22.62, ou seja,

$$k^2 = (k + i\kappa)(k + i\kappa)$$

$$k^2 = k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa$$

e comparamos com a expressão 22.61, de onde extraímos

$$k^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 \quad (22.64a)$$

$$2k\kappa = \mu\varsigma\omega \quad (22.64b)$$

Da expressão 22.64b, obtemos

$$\kappa = \frac{\mu\varsigma\omega}{2k}$$

que, substituída na equação 22.64a, fornece

$$k^2 - \frac{\mu^2\varsigma^2\omega^2}{4k^2} = \mu\epsilon\omega^2$$

ou

$$4k^4 - 4\mu\epsilon\omega^2 k^2 - \mu^2 \mathfrak{s}^2 \omega^2 = 0$$

que pode ser resolvida para fornecer k^2 através de

$$k^2 = \frac{4\mu\epsilon\omega^2 \pm \sqrt{(4\mu\epsilon\omega^2)^2 + 16\mu^2 \mathfrak{s}^2 \omega^2}}{8}$$

ou

$$k^2 = \frac{4\mu\epsilon\omega^2 \pm 4\mu\epsilon\omega^2 \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{s}^2}{\epsilon^2 \omega^2}}}{8}$$

ou ainda,

$$k^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]$$

Retornando agora à equação 22.64a, obtemos

$$\frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^2} \right] - \kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2$$

ou

$$\kappa^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^2} \right] - \mu\epsilon\omega^2$$

e então,

$$\kappa^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]$$

Portanto, temos, em princípio,

$$k = \pm \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\kappa = \pm \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Entretanto, nem todos os sinais são possíveis. Primeiramente, quando a condutividade $\mathfrak{s}$ vai a zero, ou seja, o material torna-se isolante, k deve ser real e ter o valor dado pela expressão 22.41,

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

de modo que $\kappa = 0$ quando $\mathfrak{s} \rightarrow 0$, o que implica que o sinal dentro dos colchetes deve ser positivo. Além disso, num meio condutor usual, a onda é amortecida quando se propaga, de modo que, se ela se propaga no sentido positivo do eixo z , tanto k como κ devem ser positivos, ao passo que, se ela se propaga no sentido negativo de z , ambos devem ser negativos, ou seja, eles devem ter mesmo sinal. Num *laser*, ao contrário, a onda pode ter sua amplitude ampliada, ao invés de ocorrer amortecimento, de modo que nesse caso k e κ podem ter sinais contrários. Portanto, para uma onda propagando-se no sentido positivo do eixo, devemos ter

$$k = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22.65)$$

e

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22.66)$$

É importante notar que a parte real de k , ou seja, k , está relacionada ao comprimento de onda λ através de

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

e à frequência angular ω através de

$$v = \frac{\omega}{k}$$

já que k está associado à parte oscilante das soluções 22.63,

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (22.67a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}(z, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (22.67b)$$

A parte imaginária, κ , está associada ao amortecimento que ocorre com a onda, que penetra no condutor até uma profundidade de penetração característica, dada por

$$\zeta = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\mu\epsilon}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (22.68)$$

As soluções acima devem satisfazer as equações de Maxwell 22.54 e 22.56, que impõem condições idênticas às expressas por 22.20,

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

e 22.21,

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

além da relação 22.24,

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k}{\omega} \hat{k} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (22.69)$$

que estabelecem que a onda é transversal, de modo que $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{B}} \perp \vec{k}$. Além disso, os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ em geral não oscilam em fase. Para ver isso, escrevemos k na forma polar, isto é,

$$k = |k| e^{i\phi}$$

Lembrando que k é dado pela expressão 22.62, temos

$$|k| = \sqrt{k^2 + \kappa^2}$$

ou

$$|k| = \sqrt{\frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right] + \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]}$$

ou ainda,

$$|k| = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2}$$

Quanto à fase ϕ , temos

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\kappa}{k} \quad (22.70)$$

ou

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}}{\omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

ou ainda,

$$\operatorname{tg} \phi = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2} + 1}}$$

que pode ser reescrita se considerarmos a relação

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2 \operatorname{tg} \phi}{1 - \operatorname{tg}^2 \phi}$$

que fica

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2 \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2} + 1}}}{1 - \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\epsilon \omega}\right)^2} + 1}}$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2 \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1}}}{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1}}$$

ou ainda,

$$\operatorname{tg} 2\phi = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1}} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1}{2}$$

ou então,

$$\operatorname{tg} 2\phi = \sqrt{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1\right] \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1\right]}$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\phi = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1$$

e finalmente,

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}$$

de onde extraímos

$$\phi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)$$

Agora, das soluções 22.67, temos que

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_0 &= \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\delta_{\mathcal{E}}} \\ \vec{\mathcal{B}}_0 &= \vec{\mathcal{B}}_0 e^{i\delta_{\mathcal{B}}}\end{aligned}$$

Considerando a expressão 22.69 em módulo, obtemos

$$\mathcal{B}_0 e^{i\delta_B} = \frac{|k| e^{i\phi}}{\omega} \mathcal{E}_0 e^{i\delta_E}$$

ou

$$\mathcal{B}_0 e^{i\delta_B} = \frac{|k|}{\omega} \mathcal{E}_0 e^{i(\phi + \delta_E)}$$

de onde extraímos

$$\delta_B = \phi + \delta_E \quad (22.71)$$

e

$$\mathcal{B}_0 = \frac{|k|}{\omega} \mathcal{E}_0$$

ou

$$\mathcal{B}_0 = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon \omega}\right)^2}}}{\omega} \mathcal{E}_0$$

ou ainda,

$$\mathcal{B}_0 = \sqrt{\mu \epsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon \omega}\right)^2}} \mathcal{E}_0 \quad (22.72)$$

A relação 22.71 estabelece que há uma defasagem de um ângulo ϕ entre o campo elétrico e o magnético num condutor, com o campo magnético atrasado de ϕ em relação ao campo elétrico. A expressão 22.72 relaciona os módulos dos campos elétrico e magnético num condutor. Por fim, considerando as partes reais das soluções 22.67, obtemos as ondas reais dadas por

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(z, t) &= \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \\ \vec{\mathcal{B}}(z, t) &= \vec{\mathcal{B}}_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E + \phi) \end{aligned}$$

cuja extensão para uma onda que se propaga em qualquer direção definida pelo vetor $\vec{k} = \vec{k} + i\vec{\kappa}$ é

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{\mathcal{E}}) \quad (22.73a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{-\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta_{\mathcal{E}} + \phi) \quad (22.73b)$$

É interessante observar que, quando os campos têm uma dependência temporal (complexa) do tipo $e^{-i\omega t}$, como ocorre no caso das ondas acima, é possível transformar formalmente o caso de ondas num condutor numa situação equivalente envolvendo dielétricos. Para tanto, devemos lembrar a relação 22.27,

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = -i\omega \vec{\mathcal{E}}$$

válida para os campos dados pelas equações 22.60. Assim, voltando à equação de Maxwell 22.54d, temos

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu \mathfrak{s} \vec{\mathcal{E}} - i\mu\epsilon\omega \vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu(-i\omega \vec{\mathcal{E}}) \left(\frac{\mathfrak{s}}{-i\omega} + \epsilon \right)$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu \left(\epsilon + i \frac{\mathfrak{s}}{\omega} \right) (-i\omega \vec{\mathcal{E}})$$

ou então, usando novamente a equação 22.27, ficamos com

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu \left(\epsilon + i \frac{\mathfrak{s}}{\omega} \right) \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

Agora, se definirmos uma permissividade elétrica complexa ε através de

$$\varepsilon = \epsilon + i \frac{\mathfrak{s}}{\omega} \quad (22.74)$$

a equação acima se torna

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

que é formalmente idêntica à expressão 22.34d válida para isolantes. Assim, os resultados obtidos na seção 22.3 para dielétricos podem ser adaptados para condutores, substituindo-se a permissividade elétrica real ϵ por uma permissividade complexa ϵ dada por 22.74. Como consequência imediata, o vetor de onda complexo dado por 22.61 torna-se

$$k^2 = \mu\omega^2 \left(\epsilon + i \frac{\mathfrak{s}}{\omega} \right)$$

ou

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2$$

e assim,

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (22.75)$$

em acordo (formal) com a expressão 22.41,

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = n\frac{\omega}{c}$$

que é válida para dielétricos. Além disso, podemos introduzir também um índice de refração complexo através da relação 22.37, de modo que

$$n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \quad (22.76)$$

Assim, uma permissividade elétrica complexa ou um índice de refração complexo estão associados a ondas amortecidas que se propagam num dado meio. Com o uso de n , achamos

$$k = n\frac{\omega}{c} \quad (22.77)$$

Existem dois casos-limite importantes quando se trata com materiais condutores, que são obtidos da análise da equação de Ampère-Maxwell 22.54d,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\mathfrak{s}\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

lembrando que a dependência temporal de $\vec{E}$ é dada por um fator $e^{-i\omega t}$, de modo que temos

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \mathfrak{s} \vec{E} - i\mu\epsilon\omega \vec{E}$$

O primeiro fator está associado às correntes reais, enquanto o segundo é derivado das correntes de deslocamento. Assim, o primeiro caso-limite consiste em considerar os materiais maus condutores, que têm baixa condutividade, de modo que $\mathfrak{s} \ll \omega\epsilon$. As correntes reais são muito menos importantes do que as correntes de deslocamento produzidas pelo campo elétrico oscilante, de modo que esse caso também engloba materiais condutores sujeitos a campos com frequências muito altas. Nesse caso, k torna-se, lembrando a expressão 22.75,

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

ou, utilizando a relação 22.74,

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + i \frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Podemos expandir o resultado acima para obter, considerando termos até primeira ordem,

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + i \frac{\mathfrak{s}}{2\epsilon\omega} \right)$$

Comparando com a expressão 22.62,

$$k = k + i\kappa$$

vemos que

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

de modo que a parte real de k permanece inalterada e o comprimento de onda e a velocidade da onda são os mesmos que no caso do meio dielétrico, e

$$\kappa = \frac{\mathfrak{s}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

o que faz com que a profundidade de penetração dada por 22.68 fique sendo

$$\zeta = \frac{1}{\kappa} = \frac{2}{\mathfrak{s}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

que é independente da frequência ω da onda que se propaga, a menos que $\mathfrak{s}$ dependa da frequência.

O segundo caso-limite é encontrado quando se consideram materiais muito bons condutores, de modo que $\mathfrak{s} \gg \omega\epsilon$ e as correntes de condução são muito mais importantes do que as correntes de deslocamento. É o que ocorre com metais sujeitos a ondas de rádio, microondas, radiação na faixa do infravermelho e no visível indo até ultravioleta. Nesse caso, as expressões 22.65 e 22.66 podem ser aproximadas por

$$k = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}}$$

e

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}}$$

ou

$$k = \kappa = \sqrt{\frac{\omega\mu\mathfrak{s}}{2}} \quad (22.78)$$

Como

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

e considerando que a profundidade de penetração 22.68 é dada por

$$\zeta = \frac{1}{\kappa}$$

achamos

$$\zeta = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{k}$$

ou

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mathfrak{s}}} \quad (22.79)$$

Note que, como a profundidade de penetração aparece num fator exponencial do tipo $e^{-\kappa z} = e^{-\frac{z}{\zeta}}$ nas ondas descritas pelos campos 22.73, quando a onda

percorre uma distância igual a um comprimento de onda λ , ela é atenuada por um fator

$$e^{-\frac{\lambda}{\zeta}} = e^{-\frac{2\pi\lambda}{\lambda}} = e^{-2\pi} \approx 0,0019$$

ou seja, após percorrer uma distância de um comprimento de onda num bom condutor, “resta” da onda apenas 0,2 %. Além disso, o comprimento de onda num bom condutor é muito pequeno quando comparado com o comprimento de onda num material mau condutor ou isolante, já que

$$\frac{k_{\text{bom condutor}}}{k_{\text{mau condutor}}} = \frac{\sqrt{\frac{\omega\mu\mathfrak{s}}{2}}}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ou

$$\frac{k_{\text{bom condutor}}}{k_{\text{mau condutor}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mathfrak{s}}{\omega\epsilon}} \gg 1$$

Assim, como

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

temos

$$\frac{\lambda_{\text{bom condutor}}}{\lambda_{\text{mau condutor}}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{\mathfrak{s}}} \ll 1$$

Portanto, o principal efeito que ocorre com ondas eletromagnéticas propagando-se num material bom condutor é a atenuação da onda. O campo magnético, nesse caso, tem uma defasagem de 45° em relação ao campo elétrico, conforme pode ser visto pela expressão 22.70, lembrando que $k = \kappa$, ou seja,

$$\text{tg } \phi = \frac{\kappa}{k} = 1 \Rightarrow \phi = 45^\circ$$

Com relação aos módulos dos campos, pela expressão 22.72, temos

$$B_0 = \sqrt{\mu\epsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\epsilon\omega}\right)^2}} \mathcal{E}_0$$

Num bom condutor, $\omega\epsilon \ll \mathfrak{s}$, e ficamos com

$$\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\mu\epsilon \frac{s}{\epsilon\omega}} \gg 1$$

Assim, a maior parte da energia das ondas num meio bom condutor está associada ao campo magnético. Quando $\omega \rightarrow 0$, ou seja, quando temos a situação de campos estáticos, toda a energia é dada pelo campo magnético, pois um condutor não mantém um campo eletrostático em seu interior, a menos que uma fonte de *fem* externa seja ligada a ele, conforme vimos no capítulo 12 (volume II).

É interessante agora estudar o que ocorre com a densidade de corrente num material bom condutor, já que os campos são fortemente atenuados ao se propagarem dentro do material, e isso de alguma forma se reflete na corrente produzida no condutor. Quando o material é bom condutor, de modo que $s \gg \omega\epsilon$, as correntes de condução são muito mais importantes do que as correntes de deslocamento. Assim, o fator envolvendo a corrente de deslocamento na lei de Ampère-Maxwell 22.54d pode ser desprezado em comparação com o termo envolvendo a corrente real, e assim, ficamos com

$$\nabla \times \vec{B} = \mu s \vec{E}$$

que é a lei de Ampère usual. Usando esta expressão juntamente com a lei de Gauss 22.56 na equação 22.57, achamos

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} [\mu s \vec{E}]$$

ou

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (22.80)$$

e, como $\vec{J} = s\vec{E}$, temos também

$$\nabla^2 \vec{J} - \mu s \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0 \quad (22.81)$$

As equações acima são equações diferenciais semelhantes à equação de difusão. Interessa-nos resolver a equação 22.81, para obter o comportamento da densidade de corrente. Para isso, comparando com a equação 12.22, cuja solução é dada pela expressão 12.24, consideramos que $\vec{J}(\vec{r}, t)$ possa ser escrita como

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, 0)e^{-i\omega t} \quad (22.82)$$

Utilizando essa expressão para $\vec{J}$ na equação diferencial, obtemos

$$\nabla^2(\vec{j}e^{-i\omega t}) - \mu\mathfrak{s}\frac{\partial(\vec{j}e^{-i\omega t})}{\partial t} = 0$$

ou

$$e^{-i\omega t}\nabla^2\vec{j} + i\omega\mu\mathfrak{s}\vec{j}e^{-i\omega t} = 0$$

ou ainda,

$$\nabla^2\vec{j} + i\omega\mu\mathfrak{s}\vec{j} = 0$$

Definindo agora

$$\eta^2 = i\omega\mu\mathfrak{s}$$

ficamos com a equação diferencial

$$\nabla^2\vec{j} + \eta^2\vec{j} = 0 \quad (22.83)$$

Lembrando que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, temos

$$\sqrt{i} = [e^{i\frac{\pi}{2}}]^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

e então,

$$\eta = \sqrt{i}\sqrt{\omega\mu\mathfrak{s}} \quad (22.84)$$

ou

$$\eta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\mathfrak{s}}$$

ou ainda,

$$\eta = \frac{1+i}{\zeta} \quad (22.85)$$

onde usamos a equação 22.79,

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\epsilon}}$$

para a profundidade de penetração num meio bom condutor. Podemos analisar agora um caso simples, para ter idéia do comportamento da corrente. Vamos considerar um condutor infinito nas direções x e y e semi-infinito na direção z , indo de $z = 0$ até $z \rightarrow \infty$. Vamos supor que a corrente seja função de z e que tenha apenas componente x , sendo expressa então por

$$\vec{j}(\vec{r}, 0) = j_x(z) \hat{i}$$

Nesse caso, a equação diferencial 22.83 pode ser escrita como

$$\frac{d^2 j_x}{dz^2} + \eta^2 j_x = 0$$

que é uma equação similar à equação de um oscilador harmônico simples, resolvida por meio de

$$j_x(z) = j_{x_1}(0)e^{i\eta z} + j_{x_2}(0)e^{-i\eta z}$$

onde $j_{x_1}(0)$ e $j_{x_2}(0)$ são coeficientes complexos que dependem das condições do problema. Para nossos propósitos, podemos fazer, sem perda de generalidade, $j_{x_1}(0) = j_x(0)$, $j_{x_2}(0) = 0$, de modo que

$$j_x(z) = j_x(0)e^{i\eta z} = j_x(0)e^{\frac{(1+i)iz}{\zeta}}$$

onde usamos a expressão 22.85. A equação acima pode ser reescrita como

$$j_x(z) = j_x(0)e^{i\eta z} = j_x(0)e^{\frac{(i-1)z}{\zeta}} = j_x(0)e^{-\frac{z}{\zeta}}e^{\frac{iz}{\zeta}}$$

Então, a intensidade relativa da densidade de corrente, à medida que a radiação penetra no condutor, fica

$$\left| \frac{j_x(z)}{j_x(0)} \right| = \left| \frac{j_x(0)e^{-\frac{z}{\zeta}}e^{\frac{iz}{\zeta}}}{j_x(0)} \right|$$

ou

$$\left| \frac{j_x(z)}{j_x(0)} \right| = e^{-\frac{z}{\zeta}}$$

indicando que a densidade de corrente cai exponencialmente com a profundidade do condutor, e a profundidade de penetração ζ corresponde à distância em que a corrente cai pelo valor e^{-1} do valor inicial. A radiação penetra no material de forma apreciável apenas por alguns poucos ζ . Note que, lembrando a expressão 22.79,

$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

vemos que, para altas frequências, a profundidade de penetração tem um valor muito pequeno. No cobre, $\zeta \sim 10^{-6}$ m para uma frequência de microondas de 5 GHz. Assim, para se ter um elemento bom condutor (um fio ou cabo, por exemplo) na faixa de microondas, pode-se usar como suporte um material que tenha uma condutividade elétrica menor revestido por uma camada fina de material bom condutor, como cobre ou prata, que é normalmente mais caro. Por outro lado, na água do mar, para uma frequência de 15 kHz a profundidade de penetração é de cerca de 2 m. Nesse caso, para manter contacto com submarinos é necessário usar ondas de frequência extremamente baixa.

O caso anterior de um condutor semi-infinito na direção z é importante para desenvolver a intuição física a respeito do problema. Agora, vamos estudar um caso de importância óbvia, um fio condutor de seção reta circular e raio ρ_0 . Nesse caso, utilizamos novamente a simetria da situação para excluir dependências angulares da densidade de corrente $\vec{J}$. Além disso, colocando o eixo do fio na direção z , a densidade de corrente deve ter apenas uma componente nessa direção, que deve depender de ρ , a coordenada radial em coordenadas cilíndricas, de modo que $\vec{j} = J_z(\rho) \hat{k}$. Nesse caso, a equação diferencial 22.83 torna-se

$$\nabla^2 J_z(\rho) + \eta^2 J_z(\rho) = 0$$

ou, usando a expressão B.10 para o Laplaciano,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial J_z}{\partial \rho} \right) + \eta^2 J_z = 0 \quad (22.86)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial^2 J_z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial J_z}{\partial \rho} \right) + \eta^2 J_z = 0$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_z}{\partial \rho} + \eta^2 J_z = 0 \quad (22.87)$$

Vamos fazer agora a mudança de variáveis $\varrho = \eta\rho$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{d\varrho}{d\rho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} &= \eta \frac{\partial}{\partial \varrho} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} &= \eta \frac{d\varrho}{d\rho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} &= \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \end{aligned}$$

Usando as duas expressões acima na equação 22.87, achamos

$$\eta^2 \frac{\partial^2 J_z}{\partial \varrho^2} + \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial J_z}{\partial \varrho} + \eta^2 J_z = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial J_z}{\partial \varrho} + J_z = 0 \quad (22.88)$$

Comparando com a equação de Bessel 6.121 (volume I), vemos que a equação acima é a equação de Bessel quando $\nu = 0$, de modo que as suas soluções são dadas pelas funções de Bessel e Neumann na forma

$$J_z(\rho) = A_0 \mathcal{J}_0(\varrho) + B_0 \mathcal{N}_0(\varrho) = A_0 \mathcal{J}_0(\eta\rho) + B_0 \mathcal{N}_0(\eta\rho) \quad (22.89)$$

onde η é obtido utilizando-se a equação 22.79,

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\epsilon}}$$

em 22.84,

$$\eta = \sqrt{i}\sqrt{\omega\mu\epsilon} = \sqrt{i}\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \quad (22.90)$$

Portanto, a solução para a densidade de corrente 22.89 fica

$$J_z(\rho) = A_0 \mathcal{J}_0\left(\sqrt{i}\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) + B_0 \mathcal{N}_0\left(\sqrt{i}\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) \quad (22.91)$$

sendo que devemos notar que a função de Neumann diverge para $\rho \rightarrow 0$ mesmo quando o argumento é imaginário, de modo que, como queremos a solução para a região interna ao fio, a constante B_0 deve ser nula, restando apenas

$$J_z(\rho) = A \mathcal{J}_0\left(\sqrt{i}\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) \quad (22.92)$$

Agora, vamos definir as funções ber (Bessel real) e bei (Bessel imaginária), também chamadas de funções de Kelvin ¹⁵, através de

$$\mathcal{J}_0(i\sqrt{i}x) = \text{ber } x + i \text{bei } x \quad (22.93)$$

onde

$$\text{ber } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n} = 1 - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^8 - \dots \quad (22.94)$$

e

$$\begin{aligned} \text{bei } x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n+1)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2} = \\ &= \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{1}{(5!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - \dots \end{aligned} \quad (22.95)$$

É possível mostrar que (veja o exercício 22.3)

¹⁵ Sir William Thomson, ou Lord Kelvin, introduziu as funções ber e bei em 1889.

$$\mathcal{J}_0(\sqrt{i}x) = \text{ber } x - i \text{bei } x \quad (22.96)$$

e assim, a solução 22.92 fica

$$J_z(\rho) = A \left[\text{ber} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) - i \text{bei} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) \right] \quad (22.97)$$

que é a solução da equação diferencial 22.86, equivalente à equação 22.83. Lembrando que a solução geral é obtida mediante a relação 22.82,

$$J_z(\rho, t) = \vec{j}(\vec{r}, 0) e^{-i\omega t}$$

temos

$$J_z(\rho, t) = A \left[\text{ber} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) - i \text{bei} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) \right] e^{-i\omega t} \quad (22.98)$$

A constante A pode ser obtida se considerarmos que a corrente na superfície do fio, de raio ρ_0 , vale

$$J_z(\rho_0, t) = J_S = A \left[\text{ber} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \right) - i \text{bei} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \right) \right] e^{-i\omega t} \quad (22.99)$$

A densidade de corrente dada por 22.98 é uma grandeza complexa. Seu módulo é obtido considerando-se o complexo conjugado, ou seja,

$$\begin{aligned} |J_z(\rho, t)|^2 &= AA^* \left[\text{ber} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) - i \text{bei} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) \right] \\ &\quad \times \left[\text{ber} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) + i \text{bei} \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) \right] e^{-i\omega t} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

ou

$$|J_z(\rho, t)|^2 = |A|^2 \left[\text{ber}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) + \text{bei}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \right) \right] \quad (22.100)$$

Multiplicando a expressão 22.99 pelo seu complexo conjugado, temos

$$|J_S|^2 = |A|^2 \left[\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) - i \text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) \right] \times \left[\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) - i \text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) \right] e^{-i\omega t} e^{i\omega t}$$

ou

$$|J_S|^2 = |A|^2 \left[\text{ber}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) + \text{bei}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) \right] \quad (22.101)$$

Dividindo agora a expressão 22.100 pela 22.101, temos

$$\frac{|J_z(\rho, t)|^2}{|J_S|^2} = \frac{\text{ber}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) + \text{bei}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right)}{\text{ber}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) + \text{bei}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right)}$$

ou

$$\frac{|J_z(\rho, t)|}{|J_S|} = \left[\frac{\text{ber}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) + \text{bei}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right)}{\text{ber}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) + \text{bei}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (22.102)$$

que estabelece o módulo da densidade de corrente num ponto a uma distância ρ do eixo do fio em termos do módulo da densidade de corrente na sua superfície. Para um fio de cobre, $\varsigma = 5,65 \times 10^7$ S/m (veja a tabela 12.1) e $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A. Assim, podemos determinar o comportamento da densidade de corrente para alguns valores de frequência angular $\omega = 2\pi\nu$. A tabela 22.3 apresenta dados para alguns valores de ν para um fio de cobre de raio $\rho_0 = 0,5$ mm, e a figura 22.8 mostra um gráfico da equação 22.102 para as frequências selecionadas na tabela 22.3. É interessante notar na figura 22.8 que, em baixas frequências, em particular na frequência utilizada na transmissão doméstica de eletricidade, a densidade de corrente se distribui uniformemente pelo fio, ao passo que, em altas frequências, ζ torna-se pequeno e só há corrente elétrica próximo à superfície do fio. Este efeito é conhecido como *efeito pele*, e ele surge por causa das grandes correntes induzidas parasitas que aparecem na região mais interna do fio, produzidas pelo campo magnético variável no tempo. Essas correntes acabam anulando a corrente real nessa região, fazendo com que a corrente real flua apenas por uma

camada fina na superfície do fio. A distribuição de correntes pode ser obtida mediante a integração da expressão 22.98 na área do fio, ou seja,

$$i = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} J_z(\rho, t) \rho d\rho d\theta$$

Curva	ν (Hz)	ζ (mm)	$\frac{\rho_0}{\zeta}$
1	60	8,6	0,058
2	10^3	2,1	0,24
3	10^5	0,21	2,36
4	10^6	0,067	7,47
5	10^7	0,021	23,6

Tabela 22.3: Profundidades de penetração para ondas eletromagnéticas num fio cilíndrico de cobre com as frequências indicadas na tabela. As curvas para a densidade de corrente em função da distância ao eixo do fio são mostradas na figura 22.8.

ou

$$i = 2\pi \int_0^{\rho_0} A \left[\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) - i \text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) \right] e^{-i\omega t} \rho d\rho$$

ou ainda,

$$i = 2\pi A e^{-i\omega t} \int_0^{\rho_0} \left[\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) - i \text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho\right) \right] \rho d\rho$$

Definindo

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho \\ x_0 &= \frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \end{aligned}$$

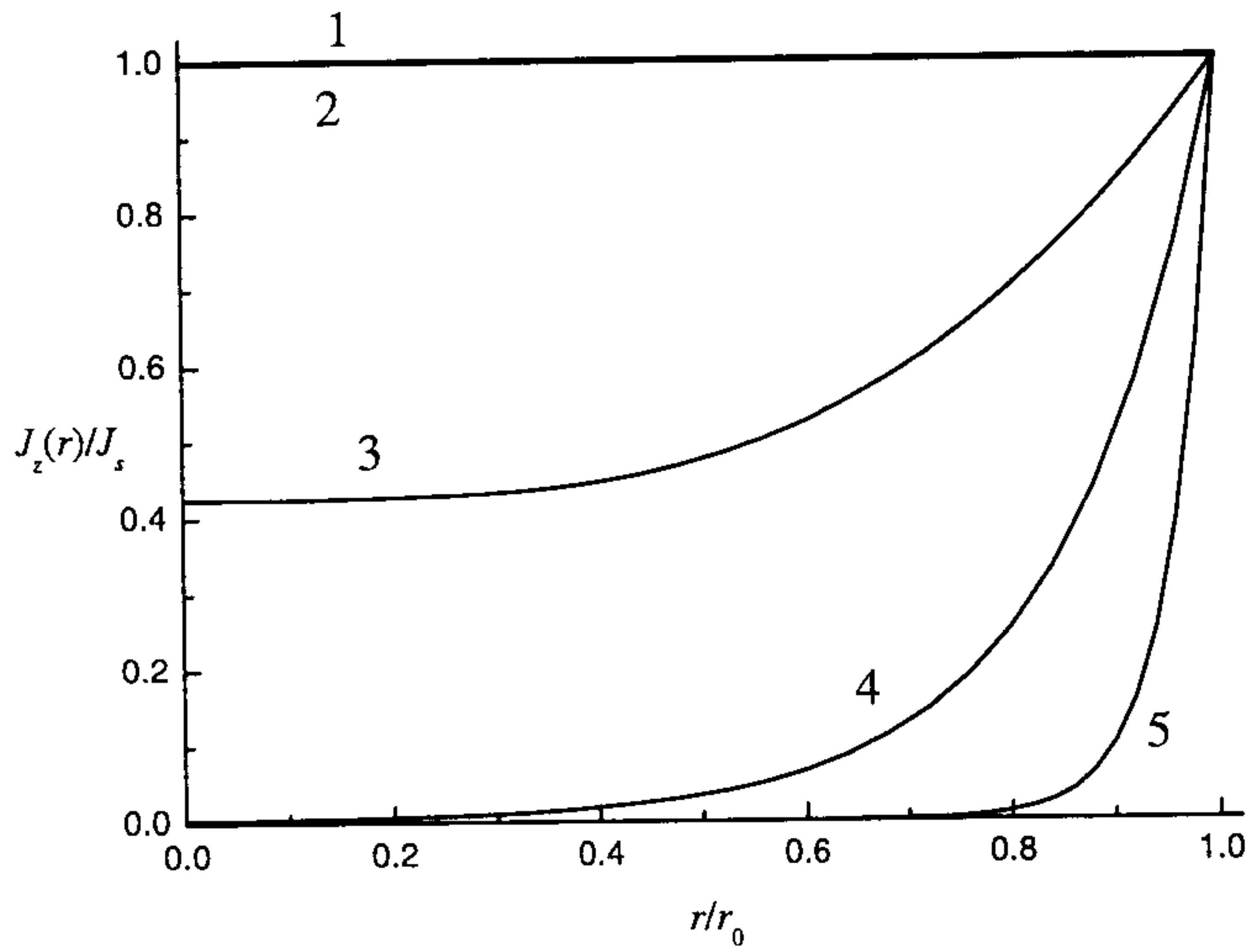


Figura 22.8: Gráficos da densidade de corrente em função da distância ao eixo dos fios de cobre descritos pelos parâmetros mostrados na tabela 22.3.

temos

$$i = 2\pi A e^{-i\omega t} \frac{\zeta^2}{2} \int_0^{x_0} (\text{ber } x - i \text{bei } x) x dx$$

ou

$$i = \pi A \zeta^2 e^{-i\omega t} \left[\int_0^{x_0} x \text{ber } x dx - i \int_0^{x_0} x \text{bei } x dx \right] \quad (22.103)$$

A primeira integral na equação 22.103 pode ser feita considerando-se a expressão 22.94 para a função $\text{ber } x$, isto é,

$$\int_0^{x_0} x \text{ber } x dx = \int_0^{x_0} x \left[1 - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^8 - \dots \right] dx$$

ou

$$\int_0^{x_0} x \text{ber } x dx = \int_0^{x_0} \left[x - \frac{x^5}{2^4(2!)^2} + \frac{x^9}{2^8(4!)^2} - \dots \right] dx$$

ou ainda,

$$\int_0^{x_0} x \operatorname{ber} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6 \cdot 2^4 (2!)^2} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 2^8 (4!)^2} - \dots \right]_0^{x_0}$$

e então,

$$\int_0^{x_0} x \operatorname{ber} x \, dx = \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_0^6}{6 \cdot 2^4 (2!)^2} + \frac{x_0^{10}}{10 \cdot 2^8 (4!)^2} - \dots$$

ou, finalmente,

$$\int_0^{x_0} x \operatorname{ber} x \, dx = x_0 \left[\frac{x_0}{2} - \frac{x_0^5}{6 \cdot 2^4 (2!)^2} + \frac{x_0^9}{10 \cdot 2^8 (4!)^2} - \dots \right] \quad (22.104)$$

Agora, vamos considerar a função $\operatorname{bei} x$, dada pela expressão 22.95,

$$\operatorname{bei} x = \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^6 + \frac{1}{(5!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{10} - \dots$$

Vamos derivá-la, de modo que temos

$$\operatorname{bei}' x = \frac{d \operatorname{bei} x}{dx} = \frac{2x}{2^2 (1!)^2} - \frac{6x^5}{2^6 (3!)^2} + \frac{10x^9}{2^{10} (5!)^2} - \dots$$

ou

$$\operatorname{bei}' x = \frac{x}{2(1!)^2} - \frac{x^5}{6 \cdot 2^4 (2!)^2} + \frac{10x^9}{4 \cdot 2^8 (4!)^2 \cdot 25} - \dots$$

ou ainda,

$$\operatorname{bei}' x = \frac{x}{2} - \frac{x^5}{6 \cdot 2^4 (2!)^2} + \frac{x^9}{10 \cdot 2^8 (4!)^2} - \dots \quad (22.105)$$

Comparando as expressões 22.104 e 22.105, vemos que

$$\int_0^{x_0} x \operatorname{ber} x \, dx = x_0 \operatorname{bei}' x_0$$

ou

$$\int_0^{x_0} x \operatorname{ber} x \, dx = \frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \operatorname{bei}' \left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \right) \quad (22.106)$$

Por meio de um procedimento análogo, pode-se mostrar que (veja o exercício 22.4)

$$\int_0^{x_0} x \operatorname{bei} x \, dx = -\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \operatorname{ber}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0\right) \quad (22.107)$$

de modo que a corrente dada pela expressão 22.103 torna-se

$$i = \pi A \zeta^2 e^{-i\omega t} \left[\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \operatorname{bei}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0\right) + i \frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \operatorname{ber}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0\right) \right]$$

ou

$$i = \frac{2\pi A \zeta \rho_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{bei}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0\right) + i \operatorname{ber}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0\right) \right] \quad (22.108)$$

A tensão aplicada aos extremos do fio, medida na superfície deste, pode ser obtida considerando-se que

$$\mathbb{V}(\rho_0, t) = \mathcal{E}_z(\rho_0, t) L$$

onde L é o comprimento do fio. Usando a equação 12.11 na forma escalar, temos

$$J_z = \mathfrak{s} \mathcal{E}_z$$

e então,

$$\mathbb{V}(\rho_0, t) = J_z(\rho_0, t) \frac{L}{\mathfrak{s}}$$

ou, usando a expressão 22.99, obtemos

$$\mathbb{V}(\rho_0, t) = \frac{AL}{\mathfrak{s}} \left[\operatorname{ber}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0\right) - i \operatorname{bei}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0\right) \right] e^{-i\omega t} \quad (22.109)$$

A razão entre a tensão e a corrente no fio define a *impedância* $\mathcal{Z}$ ¹⁶, ou seja,

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathbb{V}}{i}$$

¹⁶ Veja a nota de rodapé 12.

ou, usando as expressões 22.108 e 22.109,

$$\mathcal{Z} = \frac{\frac{AL}{s} \left[\text{ber}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) - i \text{bei}\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) \right] e^{-i\omega t}}{\frac{2\pi A\zeta\rho_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \left[\text{bei}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) + i \text{ber}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0\right) \right]}$$

ou

$$\mathcal{Z} = \frac{\sqrt{2}L}{2\pi\zeta\rho_0 s} \left[\frac{\text{ber } x_0 - i \text{bei } x_0}{\text{bei}' x_0 + i \text{ber}' x_0} \right] \quad (22.110)$$

onde

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{\zeta}\rho_0$$

Quando a frequência é baixa, $\zeta \gg \rho_0$, conforme se vê na tabela 22.3, o que implica que x_0 é pequeno. Nesse caso, usando as formas explícitas para as funções $\text{ber } x$ e $\text{bei } x$ dadas pelas relações 22.94 e 22.95, é possível mostrar que (veja o exercício 22.5)

$$\lim_{\substack{x_0 \rightarrow 0 \\ \text{(baixa frequência)}}} \frac{\text{ber } x_0 - i \text{bei } x_0}{\text{bei}' x_0 + i \text{ber}' x_0} = \frac{2}{x_0} = \frac{\sqrt{2}\zeta}{\rho_0} \quad (22.111)$$

Nesse caso, a impedância 22.110 torna-se

$$\mathcal{Z} = \frac{L}{s\pi\rho_0^2}$$

Lembrando que em baixas frequências a corrente flui por todo o fio através de uma área dada por $A = \pi\rho_0^2$ e que a resistividade é o inverso da condutividade, vemos que a expressão acima fornece a resistência de um fio de comprimento L e área A , conforme dada pela expressão 12.12. Essa resistência foi obtida no capítulo 12 considerando-se uma corrente contínua passando pelo fio, de modo que ela é chamada de resistência CC (**C**orrente **C**ontínua), ou seja,

$$\mathcal{R}_{\text{CC}} = \frac{L}{s\pi\rho_0^2}$$

Então, em geral,

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{R}_{CC}} = \frac{x_0}{2} \left[\frac{\text{ber } x_0 - i \text{bei } x_0}{\text{bei}' x_0 + i \text{ber}' x_0} \right]$$

ou

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{R}_{CC}} = \frac{x_0}{2} \left[\frac{\text{ber } x_0 - i \text{bei } x_0}{\text{bei}' x_0 + i \text{ber}' x_0} \right] \left[\frac{\text{bei}' x_0 - i \text{ber}' x_0}{\text{bei}' x_0 - i \text{ber}' x_0} \right]$$

ou ainda,

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{R}_{CC}} = \frac{x_0}{2} \left[\frac{\text{ber } x_0 \text{bei}' x_0 - i \text{bei } x_0 \text{bei}' x_0 - i \text{ber } x_0 \text{ber}' x_0 - \text{bei } x_0 \text{ber}' x_0}{\text{bei}'^2 x_0 + \text{ber}'^2 x_0} \right]$$

e então,

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{R}_{CC}} = \frac{x_0}{2} \left[\frac{\text{ber } x_0 \text{bei}' x_0 - \text{bei } x_0 \text{ber}' x_0 - i (\text{bei } x_0 \text{bei}' x_0 + \text{ber } x_0 \text{ber}' x_0)}{\text{bei}'^2 x_0 + \text{ber}'^2 x_0} \right] \quad (22.112)$$

No apêndice G veremos que a impedância de um circuito de corrente alternada é dada por

$$\mathcal{Z} = \mathcal{R}_{CA} + i\mathcal{X}$$

onde $\mathcal{X}$ é a reatância do circuito e $\mathcal{R}_{CA}$ é a resistência do circuito quando submetido a uma **C**orrente **A**lternada. Portanto, vemos que

$$\frac{\mathcal{R}_{CA}}{\mathcal{R}_{CC}} = \frac{x_0}{2} \left[\frac{\text{ber } x_0 \text{bei}' x_0 - \text{bei } x_0 \text{ber}' x_0}{\text{bei}'^2 x_0 + \text{ber}'^2 x_0} \right] \quad (22.113)$$

O comportamento da função acima em função da frequência ou de ζ pode ser visto na figura 22.9, lembrando que $\rho_0 = 0,5 \text{ mm}$.

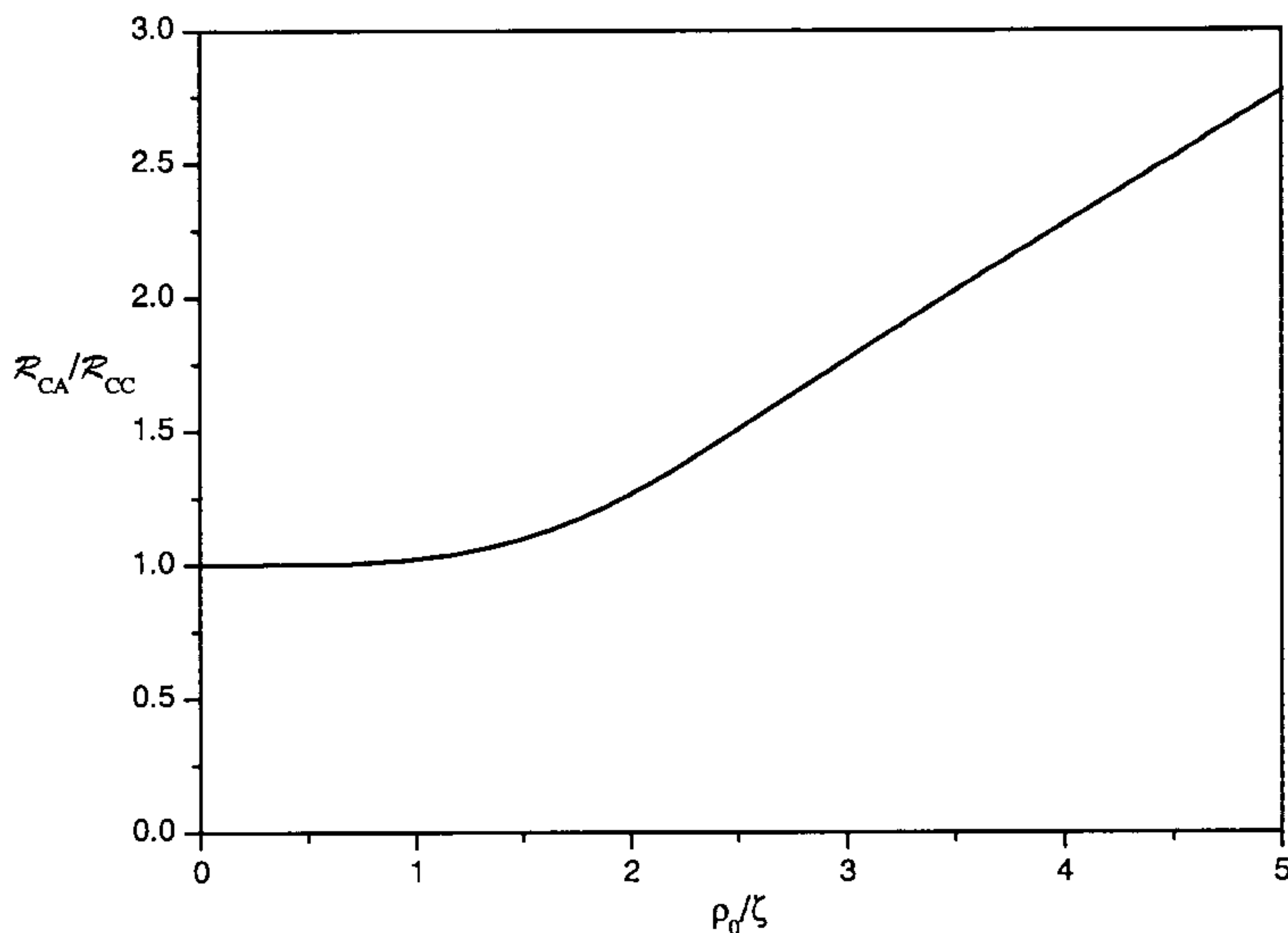


Figura 22.9: Gráfico da função descrita pela equação 22.113 para o intervalo de frequências de 1 Hz a 3 MHz.

Da figura acima, vemos que a resistência CA começa a desviar apreciavelmente de R_{CC} a partir de $\frac{\rho_0}{\zeta} \approx 1$, o que corresponde, nesse caso, a uma frequência de 200 kHz. Na região de altas frequências, a função descrita pela equação 22.113 tem um comportamento dado por

$$\lim_{\substack{x_0 \rightarrow \infty \\ \text{(alta frequência)}}} \frac{R_{CA}}{R_{CC}} = \frac{x_0}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho_0}{2\zeta} = \frac{\pi\rho_0^2}{2\pi\rho_0\zeta} \quad (22.114)$$

A equação acima é muito interessante, pois ela pode ser facilmente entendida. Lembrando que a resistência elétrica é inversamente proporcional à área de seção transversal do fio, notamos que em baixa frequência a corrente se distribui por todo o volume do condutor, atravessando uma área $\pi\rho_0^2$. Por outro lado, em altas frequências ocorre o efeito pele, e a onda se propaga apenas numa fina camada de espessura ζ medida a partir da superfície do condutor. A área dessa camada é dada por $2\pi\rho_0\zeta$, de modo que a razão entre as resistências está relacionada à razão inversa dessas duas áreas.

Quando as frequências tornam-se muito altas, a partir do ultravioleta, por exemplo, o livre caminho médio dos elétrons pode se tornar maior do

que a profundidade de penetração ζ , e surge então o efeito pele *anômalo*. Nessa faixa de frequências, a lei de Ohm deixa de ser válida e a própria discussão de condutividade torna-se mais delicada. Outros fenômenos começam a surgir, relacionados à absorção da onda pelos átomos e elétrons do material, por exemplo, e uma descrição quântica pode ser necessária, devendo-se eventualmente considerar fótons individuais.

22.5 Dispersão e Absorção

Ondas eletromagnéticas propagando-se num material podem atuar sobre os constituintes do material, transferindo energia para eles. Esses constituintes podem ser átomos, moléculas, íons ou elétrons livres ou ligados a átomos do material. Nesse caso, uma parcela da energia eletromagnética da onda é absorvida e pode ser transformada noutras formas de energia, como vibracional ou translacional, por exemplo. Além disso, essa absorção pode ocorrer de forma diferente quando ondas de frequências diferentes propagam-se no material, de modo que ocorre o fenômeno da dispersão. Nesse caso, as grandezas que caracterizam o material, μ e ϵ , assim como a velocidade da onda, passam a depender da frequência da onda incidente, já que $\vec{v}$ é definida pelas grandezas acima. O meio, nesse caso, é chamado de dispersivo, e o vidro e a água são exemplos comuns desse tipo de meio. Para estudar a absorção e a dispersão que ocorrem com as ondas eletromagnéticas, podemos considerar um modelo simples clássico para a interação entre a onda e os átomos ou moléculas do meio. Tal modelo, conhecido como modelo de Lorentz, consiste em considerar os elétrons do material como osciladores harmônicos amortecidos forçados pelo campo eletromagnético da onda incidente. A figura 22.10 ilustra esse modelo simples. Na figura vemos um elétron representado por um ponto de massa m e carga $-e$ que oscila sujeito a um campo elétrico orientado na direção x , considerando que o núcleo do átomo fique em repouso. A parte magnética da onda pode ser desprezada em comparação com o efeito produzido pelo campo elétrico, conforme veremos ao estudar a experiência de Weiner no final da seção 23.3.1. Assim, age sobre o elétron uma força restauradora descrita por uma expressão semelhante à lei de Hooke, ou seja, em módulo,

$$F_{\text{mola}} = k_{\text{mola},j} x_j$$

onde $k_{\text{mola},j}$ é a constante de mola associada ao elétron j , e x_j o seu des-

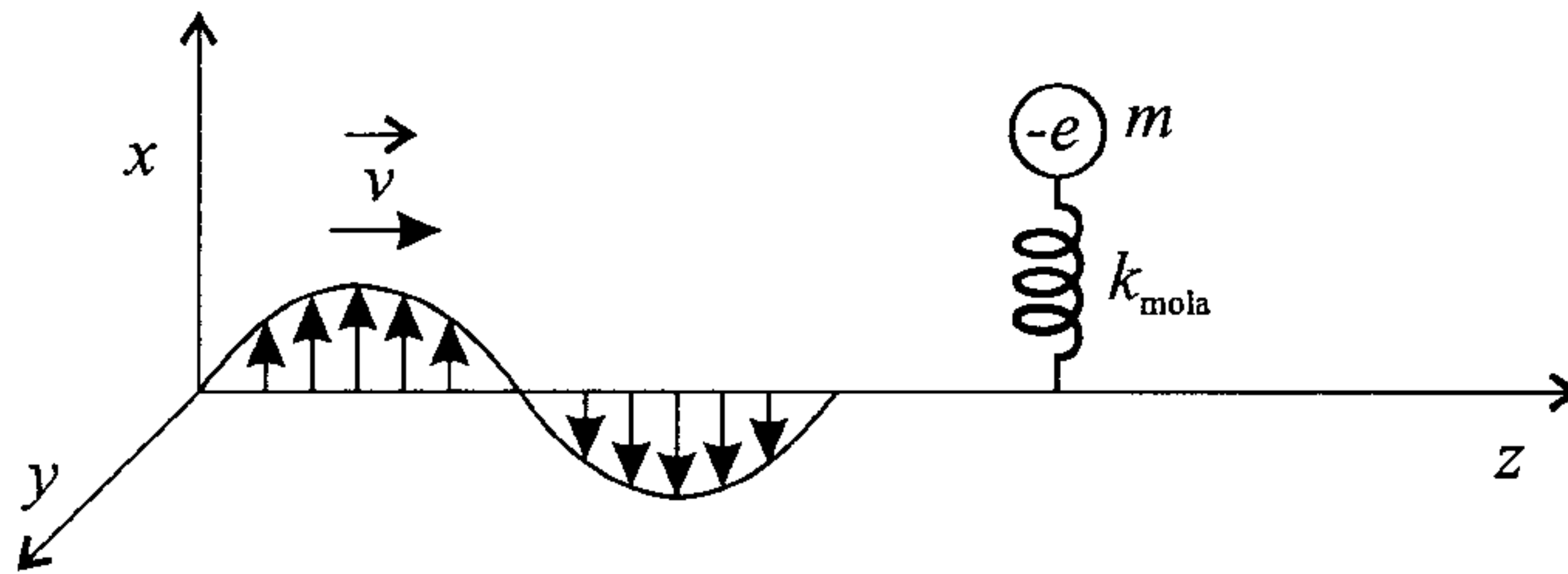


Figura 22.10: Modelo simples para um elétron para estudo da absorção e dispersão.

locamento do equilíbrio. Além da força restauradora acima, possivelmente o elétron está sujeito a algum tipo de amortecimento, o qual é o responsável pela absorção e dissipação de energia ¹⁷. Podemos supor uma forma funcional proporcional à velocidade, do tipo

$$F_{\text{diss}} = b_j \frac{dx_j}{dt}$$

onde b_j representa o amortecimento. O sistema está sujeito ao campo externo, que pode ser escrito de maneira simplificada como

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos \omega t = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{i}}$$

ou, na forma complexa, mediante

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{i}}$$

sendo que estamos considerando uma onda incidente monocromática. Assim, a equação de movimento do elétron pode ser escrita como

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -k_{\text{mola},j} x_j - b_j \frac{dx_j}{dt} - e\mathcal{E}$$

onde o último termo representa a força elétrica agindo sobre o elétron. A equação acima pode ser reescrita considerando uma coordenada $\mathcal{X}_j$ complexa e lembrando de tomar a parte real da solução posteriormente, isto é,

¹⁷ Em última análise, existe a reação de radiação, que será vista no capítulo 28 e que age como um amortecimento.

$$m \frac{d^2 \mathcal{X}_j}{dt^2} + b_j \frac{d\mathcal{X}_j}{dt} + k_{\text{mola},j} \mathcal{X}_j = -e\mathcal{E}$$

ou

$$\frac{d^2 \mathcal{X}_j}{dt^2} + \gamma_j \frac{d\mathcal{X}_j}{dt} + \omega_{0,j}^2 \mathcal{X}_j = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m} e^{-i\omega t} \quad (22.115)$$

onde

$$\omega_{0,j}^2 = \frac{k_{\text{mola},j}}{m}$$

é a frequência natural do sistema e

$$\gamma_j = \frac{b_j}{m}$$

A equação acima é uma equação que representa um oscilador harmônico amortecido forçado. A solução da equação consiste numa solução transiente, obtida a partir da equação homogênea correspondente, somada a uma solução particular estacionária. A solução transiente se anula decorrido um certo intervalo de tempo, de modo que interessa-nos apenas a solução particular, que pode ser obtida se considerarmos que

$$\mathcal{X}_j(t) = \mathcal{X}_{0,j} e^{-i\omega t}$$

onde $\mathcal{X}_0$ é uma posição (complexa) inicial. Vamos precisar também de

$$\frac{d\mathcal{X}_j}{dt} = -i\omega \mathcal{X}_{0,j} e^{-i\omega t}$$

e

$$\frac{d^2 \mathcal{X}_j}{dt^2} = -\omega^2 \mathcal{X}_{0,j} e^{-i\omega t}$$

de modo que a equação diferencial 22.115 fica

$$-\omega^2 \mathcal{X}_{0,j} e^{-i\omega t} + \gamma_j (-i\omega) \mathcal{X}_{0,j} e^{-i\omega t} + \omega_{0,j}^2 \mathcal{X}_{0,j} e^{-i\omega t} = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m} e^{-i\omega t}$$

ou

$$(\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega)\mathcal{X}_{0j} = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m}$$

e então,

$$\mathcal{X}_{0j} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \mathcal{E}_0 \quad (22.116)$$

de modo que achamos

$$\mathcal{X}_j(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$$

ou

$$\mathcal{X}_j(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \mathcal{E}(t) \quad (22.117)$$

e vetorialmente,

$$\vec{\mathcal{X}}_j(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \vec{\mathcal{E}}(t) \quad (22.118)$$

O movimento do elétron j dá origem a um momento de dipolo elétrico dado por

$$\vec{p}_j(t) = -e\vec{\mathcal{X}}_j(t)$$

ou

$$\vec{p}_j(t) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \vec{\mathcal{E}}(t) \quad (22.119)$$

Considerando que existam N elétrons por unidade de volume do gás e que uma fração f_j desses elétrons tenha uma frequência natural ω_{0j} , a polarização (complexa) do gás é dada pela soma dos momentos de dipolo por unidade de volume, ou seja, pela equação 10.1,

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i$$

ou, na forma complexa, já substituindo a expressão 22.119,

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_j N f_j \vec{p}_j(t) = \sum_j \frac{N f_j e^2}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{P}} = \left[\frac{N e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \right] \vec{\mathcal{E}}$$

Agora, pela relação 10.15, o termo entre colchetes pode ser identificado com a susceptibilidade elétrica (complexa) do material, ou seja,

$$\chi = \frac{N e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \quad (22.120)$$

lembrando que $\chi = \Re[\chi]$. Da equação 10.16, temos

$$\chi = \varepsilon - \epsilon_0$$

enquanto de 10.17 vemos que a constante dielétrica (complexa) do meio fica

$$\mathcal{K} = \frac{\varepsilon}{\epsilon_0}$$

Assim, podemos reescrever a constante dielétrica do meio em termos de χ , ou seja,

$$\mathcal{K} = \frac{\chi + \epsilon_0}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}$$

de modo que, usando a equação 22.120, obtemos

$$\mathcal{K} = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}$$

que também pode ser escrita como

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \quad (22.121)$$

Assim, observamos que a permissividade elétrica do meio depende da frequência ω da onda incidente, caracterizando o meio como dispersivo. O amortecimento descrito pelas constantes γ_j é, em geral, muito pequeno quando comparado com as frequências naturais ou de ressonância ω_{0j} , de modo que $\varepsilon(\omega)$ é basicamente real em todas as frequências, exceto quando ω está muito próximo de uma das frequências de ressonância ω_{0j} . Além disso, quando ω é menor do que $\omega_{0_{\min}}$, que é a menor frequência de ressonância, todos os termos da soma acima são positivos e ε é maior do que ϵ_0 . À medida que ω aumenta, a soma diminui e eventualmente torna-se negativa, fazendo com que ε fique menor do que ϵ_0 .

Uma situação interessante ocorre quando ω está próximo a um dos ω_{0j} , o que faz com que a parte imaginária de ε torne-se apreciável. Exatamente em $\omega = \omega_{0j}$ ocorre uma ressonância, e ε torna-se imaginária pura. Lembrando que a parte imaginária de ε está relacionada com absorção da onda pelo meio, vemos que, ao colocarmos o sistema próximo a uma de suas ressonâncias, uma grande parte da onda deveria mesmo ser absorvida, de modo que qualitativamente o modelo utilizado é apropriado ¹⁸. As regiões em que $\Im(\varepsilon)$ é grande são chamadas de zonas de absorção ressonante, e o material torna-se opaco.

Vamos agora relacionar ε com o índice de refração do material. Da expressão 22.37, temos

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$$

Vamos nos restringir a meios não-magnéticos ou fracamente magnéticos, de modo que $\mu \approx \mu_0$. Então, como ε é complexo, temos um índice de refração complexo, ou seja,

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\epsilon_0}}$$

ou, usando a equação 22.121,

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}}$$

¹⁸ Note que uma parte imaginária positiva está relacionada com absorção. Uma parte imaginária negativa está relacionada com amplificação da onda pelo meio, como ocorre num *laser*.

Para gases, a somatória é pequena quando comparada com a unidade, de modo que podemos expandir a expressão acima e considerar apenas o primeiro termo da expansão, ou seja,

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}$$

Vamos reescrever esta expressão como

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \frac{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega}$$

ou

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j(\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

As partes real e imaginária desse índice de refração podem ser escritas como

$$n = n + in$$

Assim, o índice de refração real fica

$$n = \Re(n) = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j(\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \quad (22.122)$$

enquanto o termo imaginário, ligado à absorção, fica

$$n = \Im(n) = \frac{Ne^2 \omega}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

Definindo o coeficiente de absorção κ através de

$$\kappa = 2n \quad (22.123)$$

temos

$$\kappa = \frac{Ne^2 \omega}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \quad (22.124)$$

O comportamento do índice de refração e do coeficiente de absorção próximo a uma ressonância pode ser visto na figura 22.11.

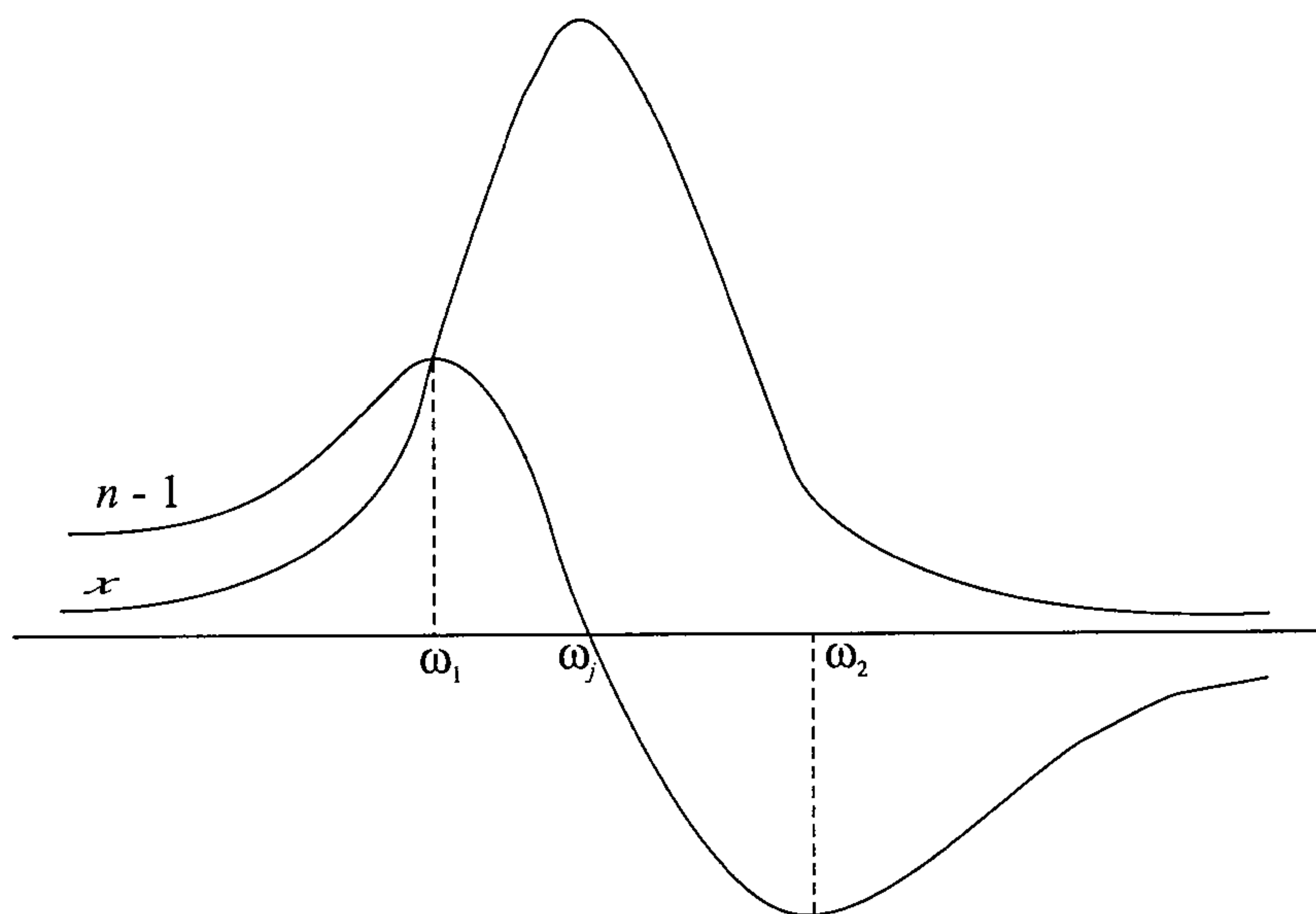


Figura 22.11: Índice de refração e coeficiente de absorção próximo a uma ressonância.

Na figura vemos que o índice de refração, para frequências menores que ω_1 ou maiores que ω_2 , cresce com a frequência, que é o comportamento normal esperado para essa grandeza. Entretanto, na faixa que vai de $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ e que inclui uma das frequências de ressonância ω_j , o índice de refração cai abruptamente, ao mesmo tempo em que o coeficiente de absorção torna-se apreciável. Essa região de comportamento inesperado para n é chamada de região de *dispersão anômala*. Note que, da figura, o índice de refração torna-se menor que um na faixa de frequências logo acima da frequência de ressonância, sugerindo que a velocidade da onda se torna maior que c , a velocidade da luz no vácuo. Aqui é preciso considerar dois fatores. Primeiro, na figura está expressa apenas a contribuição de um dos termos na soma que aparece nas equações 22.122 e 22.124, aquele associado à frequência ω_j . Os outros termos também devem ser considerados, e na maior parte dos casos isso faz com que n fique maior que um dos dois lados da ressonância. O segundo ponto refere-se ao fato de que a velocidade expressa na equação

$$n = \frac{c}{v}$$

é a velocidade de propagação de uma onda monocromática, de frequência ω bem definida e que só existe em teoria. Na prática, uma onda eletromagnética é sempre policromática, sendo uma combinação de uma faixa de frequências, ainda que estreita. Assim, como a velocidade de propagação de cada onda depende da frequência, uma onda caracterizada por picos estreitos e altos quando produzida normalmente tem seus picos alargados e abaixados quando se propaga. A velocidade de cada componente de frequência definida é chamada de *velocidade de fase*, e é a que aparece na expressão acima, ou seja,

$$n = \frac{c}{v_{\text{fase}}}$$

e ela também pode ser obtida mediante

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (22.125)$$

A velocidade de propagação do conjunto das ondas que formam a onda composta policromática é chamada de *velocidade de grupo* da onda. Ela é obtida por meio de

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (22.126)$$

ou, se lembrarmos que

$$k = \frac{\omega}{c}n$$

temos

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}$$

ou

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right)$$

ou ainda,

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v_{\text{fase}}} \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right)$$

de modo que

$$\frac{d\omega}{dk} = v_{\text{fase}} \left(1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right)^{-1}$$

ou

$$v_g = \frac{v_{\text{fase}}}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}} \quad (22.127)$$

A velocidade de fase pode ser maior que c , mas isso não causa problemas com relação à Relatividade porque a informação é transmitida pela onda completa, que se propaga com a velocidade de grupo, que é geralmente menor ou igual a c ¹⁹.

Considerando que a frequência ω da onda incidente está longe de uma das frequências de ressonância do meio, podemos desprezar o coeficiente γ_j de amortecimento na expressão 22.122 para obter

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \quad (22.128)$$

Supondo inicialmente que o meio tenha ressonâncias apenas na região de frequências igual ou maior que a do ultravioleta e que ω esteja abaixo dessas ressonâncias, temos que $\omega < \omega_{0j}$, de modo que podemos escrever

$$\frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_{0j}^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right)}$$

ou

$$\frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_{0j}^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right)^{-1}$$

¹⁹ Mesmo a velocidade de grupo pode ser maior que c . Veja, por exemplo, P. C. Peters, Am. J. Phys. **56**, 129 (1988).

ou ainda, expandindo em série de Taylor e considerando apenas o primeiro termo,

$$\frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \approx \frac{1}{\omega_{0j}^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right)$$

Então, o índice de refração fica

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j f_j \frac{1}{\omega_{0j}^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right)$$

ou

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2} + \frac{Ne^2 \omega^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^4}$$

Como, no vácuo,

$$c = \lambda \nu = 2\pi \omega \lambda$$

temos

$$\omega = \frac{c}{2\pi \lambda}$$

e então,

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2} + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{c^2}{4\pi^2 \lambda^2} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^4} \quad (22.129)$$

que pode ser colocada na forma

$$n = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right) \quad (22.130)$$

que é conhecida como *fórmula de Cauchy*, onde A é chamado de coeficiente de refração e B é o coeficiente de dispersão ²⁰. Essa fórmula descreve bastante bem gases e mesmo líquidos e sólidos transparentes para ondas na faixa do visível, e ela pode ser melhorada acrescentando-se termos proporcionais a $\frac{1}{\lambda^4}$, $\frac{1}{\lambda^6}$ e assim por diante. Se uma das frequências de ressonância ω_{0j} é muito

²⁰ Obtida por Augustin-Louis Cauchy, matemático francês, em 1830.

mais provável do que as outras, ou seja, se f_j para essa frequência é muito maior do que os outros f_j , podemos reescrever a equação 22.129 como

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{f_j}{\omega_{0j}^2} + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{c^2}{4\pi^2 \lambda^2} \frac{f_j}{\omega_{0j}^4}$$

ou

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2 f_j}{2\epsilon_0 m \omega_{0j}^2} \left(1 + \frac{c^2}{4\pi^2 \omega_{0j}^2} \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

A frequência de ressonância pode ser escrita como

$$\omega_{0j} = \frac{c}{2\pi \lambda_{0j}}$$

e então,

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2 f_j}{2\epsilon_0 m} \frac{4\pi^2 \lambda_{0j}^2}{c^2} \left(1 + \frac{\lambda_{0j}^2}{\lambda^2} \right)$$

ou

$$n \approx 1 + \frac{2\pi^2 Ne^2 c^2 f_j}{\epsilon_0 m \lambda_{0j}^2} \left(1 + \frac{\lambda_{0j}^2}{\lambda^2} \right)$$

Comparando com a expressão 22.130, vemos que

$$A = \frac{2\pi^2 Ne^2 c^2 f_j}{\epsilon_0 m \lambda_{0j}^2}$$

$$B = \lambda_{0j}^2$$

e

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{2\pi^2 Ne^2 c^2 f_j}{\epsilon_0 m \lambda_{0j}^2}}{\lambda_{0j}^2}$$

ou

$$\frac{A}{B} = \frac{2\pi^2 Ne^2 c^2 f_j}{\epsilon_0 m} \quad (22.131)$$

Note que a razão acima depende apenas de grandezas conhecidas e do número de elétrons por unidade de volume, que pode então ser determinado fazendo-se medidas do índice de refração do meio e traçando-se a curva descrita pela equação 22.130.

Se a frequência da onda incidente está na região do visível e só existem ressonâncias na região do infravermelho e do ultravioleta, podemos reescrever a expressão 22.128 como

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_{j,\text{infra}}}{\omega_{0j,\text{infra}}^2 - \omega^2} + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_{j,\text{ultra}}}{\omega_{0j,\text{ultra}}^2 - \omega^2}$$

onde o índice infra (ultra) indica as grandezas na região do infravermelho (ultravioleta). Como

$$\omega = \frac{c}{2\pi\lambda}, \quad \omega_{0j} = \frac{c}{2\pi\lambda_{0j}}$$

temos

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_{j,\text{infra}}}{\frac{c^2}{4\pi^2\lambda_{0j,\text{infra}}^2} - \frac{c^2}{4\pi^2\lambda^2}} + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_{j,\text{ultra}}}{\frac{c^2}{4\pi^2\lambda_{0j,\text{ultra}}^2} - \frac{c^2}{4\pi^2\lambda^2}}$$

ou

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 mc^2} \sum_j \frac{4\pi^2\lambda_{0j,\text{infra}}^2 \lambda^2 f_{j,\text{infra}}}{\lambda^2 - \lambda_{0j,\text{infra}}^2} + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 mc^2} \sum_j \frac{4\pi^2\lambda_{0j,\text{ultra}}^2 \lambda^2 f_{j,\text{ultra}}}{\lambda^2 - \lambda_{0j,\text{ultra}}^2}$$

ou ainda,

$$n = 1 + \frac{2\pi^2\lambda^2 Ne^2}{\epsilon_0 mc^2} \sum_j \frac{\lambda_{0j,\text{infra}}^2 f_{j,\text{infra}}}{\lambda^2 - \lambda_{0j,\text{infra}}^2} + \frac{2\pi^2\lambda^2 Ne^2}{\epsilon_0 mc^2} \sum_j \frac{\lambda_{0j,\text{ultra}}^2 f_{j,\text{ultra}}}{\lambda^2 - \lambda_{0j,\text{ultra}}^2} \quad (22.132)$$

Agora lembramos que $\lambda_{0j,\text{ultra}} < \lambda < \lambda_{0j,\text{infra}}$, de modo que reescrevemos os denominadores acima como

$$\frac{1}{\lambda^2 - \lambda_{0j,\text{infra}}^2} = -\frac{1}{\lambda_{0j,\text{infra}}^2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{0j,\text{infra}}^2}} = -\frac{1}{\lambda_{0j,\text{infra}}^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{0j,\text{infra}}^2}\right)^{-1}$$

e

$$\frac{1}{\lambda^2 - \lambda_{0j,\text{ultra}}^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_{0j,\text{ultra}}^2}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda_{0j,\text{ultra}}^2}{\lambda^2}\right)^{-1}$$

Com essas expressões, a equação 22.132 torna-se

$$n = 1 - \frac{2\pi^2 \lambda^2 N e^2}{\epsilon_0 m c^2} \sum_j \frac{\lambda_{0j,\text{infra}}^2 f_{j,\text{infra}}}{\lambda_{0j,\text{infra}}^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{0j,\text{infra}}^2}\right)^{-1} \\ + \frac{2\pi^2 \lambda^2 N e^2}{\epsilon_0 m c^2} \sum_j \frac{\lambda_{0j,\text{ultra}}^2 f_{j,\text{ultra}}}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda_{0j,\text{ultra}}^2}{\lambda^2}\right)^{-1}$$

ou

$$n = 1 - \frac{2\pi^2 \lambda^2 N e^2}{\epsilon_0 m c^2} \sum_j f_{j,\text{infra}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{0j,\text{infra}}^2}\right)^{-1} \\ + \frac{2\pi^2 N e^2}{\epsilon_0 m c^2} \sum_j \lambda_{0j,\text{ultra}}^2 f_{j,\text{ultra}} \left(1 - \frac{\lambda_{0j,\text{ultra}}^2}{\lambda^2}\right)^{-1} \quad (22.133)$$

Como as frações dentro dos parênteses na expressão acima são sempre menores que um, podemos expandir os parênteses em série de Taylor, mediante

$$(1 - x)^{-1} \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Assim, a equação 22.133 pode ser colocada numa forma geral

$$n \approx 1 - B_{\text{infra}}(f_{j,\text{infra}}) \lambda^2 - C_{\text{infra}}(f_{j,\text{infra}}, \lambda_{j,\text{infra}}) \lambda^4 - \dots \\ + A_{\text{ultra}}(f_{j,\text{ultra}}, \lambda_{j,\text{ultra}}) + \frac{B_{\text{ultra}}(f_{j,\text{ultra}}, \lambda_{j,\text{ultra}})}{\lambda^2} \\ + \frac{C_{\text{ultra}}(f_{j,\text{ultra}}, \lambda_{j,\text{ultra}})}{\lambda^4} + \dots \quad (22.134)$$

que expressa o índice de refração como uma expansão em potências positivas e negativas de λ^2 . Quando não existem ressonâncias no infravermelho e uma das ressonâncias do ultravioleta predomina sobre todas as outras, apenas A_{ultra} e B_{ultra} são diferentes de zero, e assim recuperamos a fórmula de Cauchy dada por 22.130. As formas explícitas de alguns dos coeficientes acima são obtidas nos exercícios (veja o exercício 22.6).

Se o meio com o qual a onda eletromagnética está interagindo é dielétrico, os elétrons do material não são livres e não existe a possibilidade de uma frequência de ressonância ser nula, o que corresponde a nenhuma força restauradora agindo sobre o elétron. Por outro lado, quando o meio é condutor, a menor (que é a primeira) frequência de ressonância pode ser nula, pois corresponde à situação de elétrons livres. Nesse caso, podemos reescrever a equação 22.121 explicitando o fator correspondente a $\omega_{0_1} = 0$, ou seja,

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_{j>1} \frac{f_j}{\omega_{0_j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{f_1}{\omega^2 + i\gamma_1 \omega}$$

ou

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_{j>1} \frac{f_j}{\omega_{0_j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} - \frac{Ne^2}{m\omega} \frac{f_1}{\omega + i\gamma_1} \quad (22.135)$$

Comparando essa equação com a expressão 22.74 para a permissividade elétrica complexa,

$$\varepsilon = \epsilon + i \frac{s}{\omega}$$

vemos que podemos escrever a permissividade elétrica real como

$$\epsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum_{j>1} \frac{f_j}{\omega_{0_j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}$$

Além disso, a condutividade elétrica do condutor é agora complexa e depende da frequência. Ela é obtida por meio de

$$i \frac{s}{\omega} = - \frac{Ne^2}{m\omega} \frac{f_1}{\omega + i\gamma_1}$$

ou

$$s = -\frac{Ne^2}{m} \frac{f_1}{i\omega - \gamma_1}$$

ou ainda,

$$s(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \frac{f_1 \tau_1}{1 - i\tau_1 \omega} \quad (22.136)$$

onde $\tau_1 = \gamma_1^{-1}$ é um tempo característico, o qual pode ser identificado com o tempo médio entre colisões se lembrarmos a equação 12.30 para a condutividade elétrica de metais

$$\mathfrak{s} = \frac{Nq^2\tau}{m}$$

onde τ é o tempo médio entre colisões. No caso eletrônico, temos

$$\mathfrak{s} = \frac{Ne^2\tau}{m_e}$$

Essa é a condutividade quando a corrente que percorre o condutor é uma corrente contínua, de modo que podemos escrever

$$\mathfrak{s}_{CC} = \frac{Ne^2\tau}{m_e}$$

Agora, se considerarmos o limite $\omega \rightarrow 0$ na expressão 22.136, temos, lembrando que nessa expressão m é a massa do elétron,

$$s(\omega \rightarrow 0) = \frac{Ne^2\tau_1 f_1}{m}$$

e assim, fazendo $\tau = \tau_1 f_1$, vemos que

$$s(\omega \rightarrow 0) = \mathfrak{s}_{CC}$$

e, em geral, a condutividade para corrente alternada fica

$$s_{CA} = s(\omega) = \frac{\mathfrak{s}_{CC}}{1 - i\tau_1 \omega} \quad (22.137)$$

Quando a frequência da onda incidente é muito maior do que a maior frequência de ressonância do meio, a expressão 22.121 pode ser reescrita como

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega^2} \frac{1}{\frac{\omega_{0j}^2}{\omega^2} - 1 - i\frac{\gamma_j}{\omega}}$$

ou, desprezando o amortecimento, já que estamos muito longe da ressonância,

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \sum_j \frac{f_j}{1 - \frac{\omega_{0j}^2}{\omega^2}}$$

A expressão acima pode ser aproximada se considerarmos a sua série de Taylor, de modo que, em primeira ordem,

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \approx 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \sum_j f_j$$

ou, como

$$\sum_j f_j = Z \quad (22.138)$$

temos

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \approx 1 - \frac{Ne^2 Z}{\varepsilon_0 m \omega^2}$$

Definindo a frequência de plasma ω_p por intermédio de

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2 Z}{\varepsilon_0 m} \quad (22.139)$$

temos

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (22.140)$$

Lembrando que

$$k = \frac{\omega}{c} n$$

e que, para materiais onde $\mu = \mu_0$,

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

temos

$$ck = \omega \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$$

ou

$$ck = \omega \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2}}$$

ou ainda,

$$ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

que pode ser reescrito como

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2$$

que estabelece uma relação de dispersão entre ω e k diferente da usual, em que $\omega \propto k$. A constante dielétrica é próxima, mas um pouco menor do que um, e ela aumenta com a frequência. O número de onda k é real quando $\omega > \omega_p$. Na ionosfera e em plasmas pouco densos, os elétrons são praticamente livres e há muito pouco amortecimento. Nesses casos, a expressão 22.140 permanece válida, e o número de onda correspondente é imaginário puro, dando origem a ondas amortecidas dentro do material. A onda é então completamente refletida. É isso o que acontece também com metais condutores até a faixa de frequências do visível. Os metais são opacos e altamente refletores até o ultravioleta, quando então a frequência da onda incidente torna-se maior do que a frequência de plasma e ela passa a penetrar no metal, que passa a ser transparente à onda. Na ionosfera e também em plasmas confinados, a situação é um pouco mais complicada, pois a densidade volumétrica de elétrons varia à medida que a onda se propaga. Nesse caso, para uma dada frequência ω da onda incidente, pode ocorrer que a frequência de plasma ω_p seja menor que ω na região de entrada da onda no plasma, que se comporta então como se fosse transparente. À medida que a onda entra no plasma, sua frequência ω é fixa,

mas a densidade volumétrica N de elétrons que aparece na equação 22.139 aumenta, aumentando também ω_p . Eventualmente pode ocorrer que ω_p torne-se maior que ω , e nesse caso a onda é refletida de volta. Na ionosfera isso ocorre com as ondas de rádio, por exemplo, que são refletidas de volta para a Terra a uma certa altura do chão. Essa altura depende da hora do dia, sendo mais baixa durante o dia e mais alta à noite.

22.6 Superposição de Ondas Monocromáticas

Até o momento, as ondas eletromagnéticas que estudamos eram bem caracterizadas por uma única frequência ω e um único vetor de onda $\vec{k}$, ou seja, são ondas monocromáticas. Essa é uma idealização, já que mesmo os melhores lasers ou outras fontes de radiação “monocromática” não produzem uma onda realmente monocromática. Sempre há um espectro de frequências ou de comprimentos de onda envolvido, que pode até eventualmente ser pequeno, causado pela duração finita do pulso, pela fonte em si, ou por várias outras razões inclusive técnicas. De fato, se pensarmos sob um ponto de vista quântico, uma das formas do princípio de incerteza de Heisenberg estabelece que

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

onde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h é a constante de Planck, Δx é a incerteza na determinação da posição e Δp a incerteza do momento. Assim, como $p = \hbar k$, sendo k o vetor de onda, temos

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

Portanto, uma onda monocromática caracterizada por um k bem definido, de modo que $\Delta k = 0$, teria que ter uma incerteza infinita na sua localização, isto é, $\Delta x = \infty$, e a onda poderia estar, na verdade, em qualquer lugar. Além disso, outra forma do princípio de incerteza diz que

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

sendo ΔE a incerteza na energia e Δt a do tempo necessário para medir essa energia. Como, pela relação de Einstein, $E = \hbar\omega$, temos

$$\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$$

Novamente, para termos uma onda monocromática com um ω bem definido, seria necessária uma imprecisão infinita na medida do tempo, ou seja, $\Delta t = \infty$, de modo que podemos dizer que não se saberia quando a onda foi produzida, nem onde. No entanto, considerando que a onda produzida por algum equipamento é detectada através de alguma forma (um receptor de rádio, TV, aquecimento de uma superfície, efeito fotoelétrico, etc.), nem a incerteza na posição nem no tempo são infinitas, de modo que Δk e $\Delta\omega$ são sempre não-nulos, e os pulsos de radiação são sempre policromáticos. Note que a discussão acima é independente da qualidade dos equipamentos que produzem ou detectam as ondas, ou seja, a inexistência de uma onda verdadeiramente monocromática não é um problema técnico, e sim conceitual.

O fato de toda radiação ser policromática não invalida toda a discussão feita até agora em relação à propagação de ondas, isso porque as equações envolvidas, isto é, as equações de Maxwell, são lineares. Assim, em princípio, uma superposição linear com coeficientes apropriados dos vários componentes monocromáticos de uma onda policromática deveria resolver a questão. Na prática, porém, existem algumas dificuldades. Num meio dispersivo, ou seja, num meio em que $\epsilon = \epsilon(\omega)$ ou $\mu = \mu(\omega)$, ou ainda, $n = n(\omega)$, ondas de frequências diferentes podem se propagar com velocidades diferentes. Aqui é importante notar que a velocidade dada, por exemplo, pelas equações 22.7, 22.35 ou 22.125, é a velocidade de uma onda monocromática de frequência ω (ou velocidade de fase v_f da onda monocromática). Uma onda policromática, formada por uma superposição de ondas monocromáticas, não possui uma velocidade de fase definida. Assim, como ondas de frequências diferentes têm velocidades de fase diferentes, a forma da onda policromática pode se alterar durante a propagação, de modo que ocorre também uma alteração entre as fases relativas das ondas constituintes. Uma onda inicialmente formada por componentes em fase quando produzida, ou seja, uma onda coerente, pode, ao se propagar, perder a coerência, por causa das diferentes $v_f(\omega)$ das componentes. Além disso, a propagação de energia através das ondas normalmente é feita numa velocidade diferente dos $v_f(\omega)$ das componentes. Eventualmente, essa velocidade pode até mesmo não ter um significado físico preciso, dependendo da situação. Por último, se o meio, além de dispersivo, for também dissipativo, a onda, além de ter sua forma alterada, pode também ser atenuada.

Levando em conta as questões acima, a melhor forma de tratar ondas policromáticas consiste em considerar uma superposição na forma de séries ou transformadas de Fourier, como a expressa pela equação 22.13,

$$\mathcal{F}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(k)t + \delta(k))} dk$$

Para simplificar o tratamento, sem perder aspectos importantes, vamos considerar ondas unidimensionais, propagando-se na direção z e tendo $\delta = 0$. Além disso, vamos considerar que ω e k sejam reais, de modo que os meios são não-dissipativos, mas podem ser dispersivos, com uma relação de dispersão geral entre ω e k dada por

$$\omega = \omega(k)$$

Como ω não deve depender do sentido de propagação da onda, devemos ter $\omega(-k) = \omega(k)$, ou seja, ω deve ser uma função par de k . Note que, dada a generalidade das suposições feitas, os resultados obtidos serão válidos para quaisquer tipos de ondas, como ondas eletromagnéticas, ondas sonoras, ondas de matéria, etc. Seguindo a equação 22.13, podemos escrever

$$\mathcal{F}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikz - i\omega(k)t} dk \quad (22.141)$$

onde $\mathcal{F}(z, t)$ representa o campo elétrico ou o magnético. Os coeficientes $A(k)$ podem ser obtidos em $t = 0$ por meio de

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(z, 0) e^{-ikz} dz \quad (22.142)$$

Como exemplo, se em $t = 0$ temos uma onda monocromática de vetor de onda k_0 dada por

$$\mathcal{F}(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 z}, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

obtemos

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 z} e^{-ikz} dz$$

ou

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_0 - k)z} dz$$

Comparando com a expressão C.29,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,m'}$$

vemos que a integral acima resulta na delta de Dirac, ou seja,

$$A(k) = \delta(k - k_0)$$

Portanto, a onda em qualquer tempo será

$$\mathcal{F}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k_0) e^{ikz - i\omega(k)t} dk$$

ou

$$\mathcal{F}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$$

onde $\omega_0 = \omega(k_0)$. A onda monocromática em $t = 0$ propaga-se sem alterar sua forma, como já era de se esperar. Por outro lado, se a onda estende-se por um comprimento finito L , sendo então localizada, a amplitude $A(k)$ deixa de ser uma função delta, e a onda resultante apresenta um espectro de vetores de onda k , de valor Δk , sendo, portanto, policromática. É fácil perceber que, quanto mais localizada for a onda em $t = 0$ (L menor), maior será o espectro de vetores de onda Δk que a compõe, em acordo com o princípio de incerteza de Heisenberg. À medida que o tempo passa e a onda se propaga, sua forma se modifica, porque as ondas monocromáticas que a compõem deslocam-se com velocidades de fase diferentes se o meio é dispersivo. Se o meio é apenas fracamente dispersivo, isto é, se ω é praticamente uma função linear de k ²¹, ou se o espectro Δk não é muito largo, então podemos expandir $\omega(k)$ em torno de um valor k_0 característico da onda, ou seja,

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} + \dots \quad (22.143)$$

²¹ Para ser mais preciso, ω é uma função linear do módulo de k , ou seja, $\omega \approx \alpha|k|$, onde α é uma constante.

ou, simplificando a notação e mantendo termos até primeira ordem apenas,

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0$$

Utilizando essa expressão na equação 22.141, obtemos

$$\mathcal{F}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp \left\{ ikz - i \left[\omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 \right] t \right\} dk$$

ou

$$\mathcal{F}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -i \left(\omega_0 - k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 \right) t \right\} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp \left\{ ikz - ik \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t \right\} dk$$

ou ainda,

$$\mathcal{F}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 - \omega_0)t} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik(z - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t)} dk \quad (22.144)$$

Fazendo a transformada inversa da equação 22.142, obtemos

$$\mathcal{F}(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikz} dz \quad (22.145)$$

Definindo

$$z' = z - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t \quad dz' = dz$$

a equação 22.144 torna-se

$$\mathcal{F}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 - \omega_0)t} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikz'} dk$$

que é matematicamente idêntica à equação 22.145 (excetuando-se o fator exponencial que multiplica a integral), de modo que, trocando z por z' ,

$$\mathcal{F}(z, t) = \mathcal{F} \left(z - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t, 0 \right) e^{-i(k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 - \omega_0)t}$$

Assim, a forma da onda policromática praticamente se mantém, apesar de ela sofrer uma defasagem como um todo dada pelo fator exponencial multiplicativo. Além disso, lembrando as formas funcionais das funções de onda

dadas pela expressão 22.5, vemos que a velocidade de propagação da onda policromática está contida no termo

$$z - \frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t$$

e então, a velocidade de grupo da onda policromática é dada por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Big|_0$$

em acordo com a expressão 22.126, lembrando que a velocidade de fase de uma onda monocromática é dada por 22.125,

$$v_f = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)}$$

Outra expressão importante para a velocidade de grupo pode ser obtida se reescrevermos a equação acima como

$$\omega = \frac{ck}{n(\omega)}$$

onde agora entendemos que $n = n(\omega)$, e assim, calcularmos

$$\frac{d\omega}{d\omega} = \frac{c}{n} \frac{dk}{d\omega} - \frac{ck}{n^2} \frac{dn}{d\omega}$$

ou

$$1 = \frac{c}{n} \frac{dk}{d\omega} - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}$$

de modo que

$$\frac{c}{n} \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{n} \left[n + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right]$$

ou

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$$

e, finalmente,

$$v_g = \frac{c}{n + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$$

Relembrando a seção 22.5 e, em particular, a figura 22.11, notamos que nas regiões em que ocorre a dispersão usual, $n(\omega) > 1$ e $\frac{dn}{d\omega} > 0$, de modo que a velocidade de grupo é sempre menor ou igual a c , em acordo com nossa intuição. Porém, nas regiões de dispersão anômala que ocorrem próximas às ressonâncias do sistema (veja a figura 22.11), $\frac{dn}{d\omega}$ é negativo e pode ser grande, de modo que v_g pode exceder c ou mesmo ser negativa. Esse fato não deve causar estranheza, pois não implica em violação da relatividade geral. A questão aqui é que nas regiões de absorção anômala o conceito de velocidade de grupo perde o significado. Além disso, um grande $\frac{dn}{d\omega}$ implica numa também grande variação de ω com k , ou num meio bastante dispersivo, o que invalida a aproximação feita em 22.143 e nas equações subsequentes. Se o pulso tem forma gaussiana e tem uma frequência característica centrada próximo a uma das frequências de ressonância do meio, que não deve ser muito espesso, o que ocorre é que o pulso é grandemente absorvido, sendo a parte frontal bem menos atenuada que a posterior. Assim, ao penetrar no meio, a parte frontal pode tornar-se mais alta do que a posterior, e o efeito que se tem é que o pico da onda emergente sai do material antes do pico da onda incidente entrar nele. Esse é o significado de uma velocidade de grupo negativa, e por vezes se diz, incorretamente, que a onda tem uma velocidade superluminal, violando o princípio da causalidade. É útil reafirmar que nenhuma informação se propaga com velocidade maior do que c e que a “aparente” violação acima pode ser explicada em termos de argumentos clássicos relativamente simples.

22.7 Causalidade e Relações de Kramers-Kronig

Quando a permissividade elétrica ϵ é uma função de ω , isto é, $\epsilon = \epsilon(\omega)$, ocorre uma conexão temporal não-local entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$, de modo que $\vec{D}$ no tempo t depende de $\vec{E}$ não só no tempo t como em outros valores de tempo. Para ver isso, começamos relacionando $\vec{D}$ e $\vec{E}$ para uma das componentes de frequência ω de uma onda policromática qualquer, ou seja,

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (22.146)$$

que é válida para cada onda monocromática. A onda total é dada por

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (22.147)$$

ou

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

sendo que, para o campo elétrico, temos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (22.148)$$

Substituindo a equação 22.146 em 22.147, obtemos

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Agora, utilizamos a expressão 22.148, de modo que

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \right] e^{-i\omega t} d\omega$$

ou

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') e^{i\omega(t'-t)} dt' d\omega$$

Lembrando que, pela equação 10.16,

$$\chi = \epsilon - \epsilon_0$$

vemos que podemos escrever

$$\epsilon = \chi + \epsilon_0$$

e então,

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\chi + \epsilon_0) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') e^{i\omega(t'-t)} dt' d\omega$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') & \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] dt' \\ & + \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] dt' \end{aligned}$$

Comparando com a expressão C.29, vemos que a segunda integral entre colchetes na expressão acima resulta, na verdade, na função delta de Dirac, de modo que achamos

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') & \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] dt' \\ & + \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') 2\pi \delta(t - t') dt' \end{aligned}$$

ou

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] dt' + \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$$

Agora, vamos definir

$$\tau = t - t' \quad d\tau = -dt' \quad t' = t - \tau$$

e assim,

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t - \tau) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right] (-d\tau) + \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$$

que pode ser reescrita como²²

²² Note a troca de sinais nos limites de integração por causa da definição de τ .

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right] d\tau + \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Agora, definindo a transformada de Fourier da susceptibilidade elétrica através de

$$\hat{\chi}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (22.149)$$

obtemos

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau \quad (22.150)$$

Assim, pela relação acima, $\vec{D}$ depende do valor de $\vec{E}$ determinado não só para o tempo t (através do primeiro fator), mas também para outros valores de tempo além de t (por meio do segundo fator). Se $\epsilon(\omega)$ (e conseqüentemente, $\chi(\omega)$) não depende de ω , então a integral na equação 22.149 torna-se

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(\tau) &= \frac{\chi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{\chi}{\sqrt{2\pi}} 2\pi \delta(\tau) \\ \hat{\chi}(\tau) &= \sqrt{2\pi} \chi \delta(\tau) \end{aligned}$$

de modo que a relação 22.150 entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$ fica

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \chi \delta(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau \\ &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \chi \vec{E}(\vec{r}, t) \\ \vec{D}(\vec{r}, t) &= \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$. Nesse caso particular, $\vec{D}$ só depende de $\vec{E}$ no tempo t . Em geral, entretanto, $\epsilon = \epsilon(\omega)$, de modo que $\hat{\chi}(\tau)$ existe para valores não-nulos de τ e há uma conexão temporal não-local entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$. Como exemplo, vamos considerar nosso modelo de oscilador harmônico que utilizamos para estudar meios dispersivos, o qual fornece a permissividade elétrica dada pela equação 22.121,

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}$$

Considerando, por simplicidade, uma única frequência de ressonância ω_0 , além das equações 22.138,

$$\sum_j f_j = Z$$

e 22.139,

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2 Z}{\epsilon_0 m}$$

que definem a frequência de plasma ω_p , vemos que podemos escrever

$$\varepsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

ou

$$\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - \epsilon_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Nesse caso, $\hat{\chi}(\tau)$, dada pela equação 22.149, fica

$$\hat{\chi}(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega \quad (22.151)$$

Para resolver a integral acima, devemos passá-la para o plano complexo e usar os teoremas de integrais de Cauchy. A função acima é analítica, exceto nos polos simples dados por

$$\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega = 0$$

ou, em termos de ω ,

$$\omega_{\pm} = \frac{i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{-2}$$

que pode ser reescrita como

$$\omega_{\pm} = \frac{i\gamma \pm 2\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}{-2}$$

ou ainda,

$$\omega_{\pm} = -i\frac{\gamma}{2} \mp \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Definindo

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \qquad b = \frac{\gamma}{2}$$

achamos

$$\omega_{\pm} = -ib \mp \omega_1 \qquad (22.152)$$

Note que os dois pólos estão localizados no semiplano complexo inferior. Assim, devemos nos preocupar apenas quando a integração for feita nessa região. Para efetuar a integração, fechamos a região considerando um semicírculo de raio $R \rightarrow \infty$, de modo que a integral sobre essa curva se anula. Quando $\tau < 0$, o fator $e^{-i\omega\tau}$ no semiplano complexo superior é positivo e o semicírculo situa-se no semiplano complexo superior. Essa região não contém os polos dados por 22.152, de forma que a integral, pelo teorema de Cauchy, se anula, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = \oint_S \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = 0, \quad \tau < 0$$

ou seja,

$$\hat{\chi}(\tau) = 0, \quad \tau < 0 \qquad (22.153)$$

Por outro lado, quando $\tau > 0$, a região é fechada por um semicírculo no semiplano complexo inferior, de modo que na região são encontrados os dois pólos simples. Assim, a solução da integral consiste em calcular os resíduos da integral nos pólos, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = \oint_S \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega$$

ou

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega \\
= -2\pi i \lim_{\omega \rightarrow \omega_+} \left[(\omega - \omega_+) \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right] \\
- 2\pi i \lim_{\omega \rightarrow \omega_-} \left[(\omega - \omega_-) \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right]
\end{aligned}$$

O denominador das frações pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega \\
= -2\pi i \lim_{\omega \rightarrow \omega_+} \left[(\omega - \omega_+) \frac{e^{-i\omega\tau}}{-(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)} \right] \\
- 2\pi i \lim_{\omega \rightarrow \omega_-} \left[(\omega - \omega_-) \frac{e^{-i\omega\tau}}{-(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)} \right]
\end{aligned}$$

de modo que achamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = 2\pi i \left[\frac{e^{-i\omega_+\tau}}{\omega_+ - \omega_-} + \frac{e^{-i\omega_-\tau}}{\omega_- - \omega_+} \right]$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = 2\pi i \frac{e^{-i\omega_+\tau} - e^{-i\omega_-\tau}}{\omega_+ - \omega_-}$$

Considerando os pólos dados pela equação 22.152, temos

$$\omega_+ - \omega_- = -ib - \omega_1 - (-ib + \omega_1) = -2\omega_1$$

e assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = 2\pi i \frac{e^{-i(-ib-\omega_1)\tau} - e^{-i(-ib+\omega_1)\tau}}{-2\omega_1}$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = -\frac{2\pi i e^{-b\tau}}{\omega_1} \frac{e^{i\omega_1\tau} - e^{-i\omega_1\tau}}{2}$$

ou ainda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = 2\pi e^{-b\tau} \frac{\text{sen } \omega_1 \tau}{\omega_1}$$

Voltando agora à expressão de $\hat{\chi}$, temos

$$\hat{\chi}(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\sqrt{2\pi}} 2\pi e^{-b\tau} \frac{\text{sen } \omega_1 \tau}{\omega_1}$$

ou

$$\hat{\chi}(\tau) = \sqrt{2\pi} \omega_p^2 e^{-b\tau} \frac{\text{sen } \omega_1 \tau}{\omega_1}, \quad \tau > 0 \quad (22.154)$$

Podemos reunir os dois resultados expressos em 22.153 e 22.154 utilizando uma função degrau dada por

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau > 0 \end{cases} \quad (22.155)$$

e assim,

$$\hat{\chi}(\tau) = \sqrt{2\pi} \omega_p^2 e^{-b\tau} \frac{\text{sen } \omega_1 \tau}{\omega_1} \Theta(\tau) \quad (22.156)$$

de modo que a equação 22.150 fica

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \omega_p^2 e^{-b\tau} \frac{\text{sen } \omega_1 \tau}{\omega_1} \Theta(\tau) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

ou, por causa da função degrau $\Theta(\tau)$, que anula contribuições para $\tau < 0$, temos

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) + \frac{\omega_p^2}{\omega_1} \int_0^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t - \tau) e^{-b\tau} \text{sen } \omega_1 \tau d\tau$$

É importante notar que o fator $t - \tau$ em $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t - \tau)$, combinado com os limites de integração, faz com que apenas tempos menores ou iguais a t contribuam para o deslocamento elétrico $\vec{\mathcal{D}}$ em t , fazendo com que a relação entre $\vec{\mathcal{D}}$ e $\vec{\mathcal{E}}$ seja causal, de acordo, portanto, com nossa intuição física. Além disso, devido ao amortecimento dado pelo fator exponencial dentro da integral, que ocorre com um tempo característico $t_c = b^{-1}$, isto é,

$$t_c = \frac{1}{b} = \frac{2}{\gamma}$$

a não-localidade temporal entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$ fica restrita a intervalos de tempo da ordem de t_c . Considerando que γ é da ordem de 10^7 – 10^9 Hz (largura das faixas de frequência), temos $t_c \sim 10^{-7}$ – 10^{-9} s, que é a diferença entre os tempos de aplicação de $\vec{E}$ e $\vec{D}$. Note que, apesar de não-local no tempo, a relação 22.150 entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$ é local espacialmente, o que se justifica se a variação espacial no campo elétrico ocorre numa escala de tamanhos maior do que a escala de tamanhos associada à formação de dipolos induzidos, por exemplo. Num dielétrico, esta escala é da ordem do tamanho de alguns átomos, de modo que, mesmo em baixas frequências ω , a relação entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$ é espacialmente local. Quando há condutores, por outro lado, os livres caminhos médios eletrônicos, especialmente a baixas temperaturas, podem ser bem maiores do que a profundidade de penetração ζ associada à variação do campo elétrico, fazendo com que haja uma conexão espacial não-local entre $\vec{D}$ e $\vec{E}$ e também entre $\vec{E}$ e a densidade de corrente J , tornando espacialmente não-local a equação 12.11 $J = \mathfrak{s}\vec{E}$. A condutividade $\mathfrak{s}$ passa a ser um tensor, dependendo de $\vec{k}$ e ω , o que é conhecido como efeito pele anômalo. Tais efeitos também ocorrem com os supercondutores, pois eles têm uma profundidade de penetração London associada a eles (veja o apêndice E, vol II, equação E.24) que é da ordem de $\lambda_L \sim 10^{-6}$ m.

Considerando novamente a relação 22.150,

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\tau) \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

vemos que, como $\vec{E}$ e $\vec{D}$ são reais, $\hat{\chi}(\tau)$, dada pela expressão 22.149,

$$\hat{\chi}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega$$

também deve ser real. A inversa dessa equação é dada por

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

ou, lembrando que $\hat{\chi}(\tau) = 0$, para $\tau < 0$,

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (22.157)$$

Considerando que ω possa ser complexo, temos, para o conjugado ω^* ,

$$\chi(\omega^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}(\tau) e^{i\omega^*\tau} d\tau$$

cujo complexo conjugado é

$$\overline{\chi(\omega^*)} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}(\tau) e^{i\omega^*\tau} d\tau}$$

ou

$$\chi^*(\omega^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \overline{\hat{\chi}(\tau) e^{i\omega^*\tau}} d\tau$$

ou ainda, como $\hat{\chi}(\tau)$ é real,

$$\chi^*(\omega^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Considerando $\omega \rightarrow -\omega$ na equação 22.157, temos

$$\chi(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Portanto, temos a propriedade

$$\chi^*(\omega^*) = \chi(-\omega) \quad (22.158)$$

A equação 22.157 também pode ser entendida como sendo a representação complexa de $\chi(\omega)$ no plano complexo ω , de forma que, se $\hat{\chi}(\tau)$ não possui singularidades, ou seja, é finita para todo τ , a função $\chi(\omega)$ é analítica no semiplano complexo superior. Aqui, é preciso fazer a suposição fisicamente razoável de que $\hat{\chi}(\tau) \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$, de modo a manter a analiticidade da função no eixo real. Com essa hipótese, claramente válida para dielétricos, podemos realizar uma integração por partes na equação 22.157 e obter

$$\chi(\omega) = \left[\hat{\chi}(\tau) \frac{e^{i\omega\tau}}{i\omega} \right]_0^\infty - \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}'(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

ou

$$\chi(\omega) = \frac{i\hat{\chi}(0)}{\omega} + \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}'(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

Usando novamente uma integração por partes, temos

$$\chi(\omega) = \frac{i\hat{\chi}(0)}{\omega} + \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} \left[\hat{\chi}'(\tau) \frac{e^{i\omega\tau}}{i\omega} \right]_0^\infty - \frac{i}{i\omega^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}''(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

ou

$$\chi(\omega) = \frac{i\hat{\chi}(0)}{\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\chi}'(0)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}''(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

Vamos efetuar mais uma integração por partes, para obter

$$\begin{aligned} \chi(\omega) = \frac{i\hat{\chi}(0)}{\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\chi}'(0)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2\sqrt{2\pi}} \left[\hat{\chi}''(\tau) \frac{e^{i\omega\tau}}{i\omega} \right]_0^\infty \\ + \frac{1}{i\omega^3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}'''(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

ou

$$\chi(\omega) = \frac{i\hat{\chi}(0)}{\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\chi}'(0)}{\omega^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hat{\chi}''(0)}{\omega^3} - \frac{i}{\omega^3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\chi}'''(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

Continuando com o processo acima, percebemos que $\chi(\omega)$ pode ser escrito na forma de uma expansão como

$$\chi(\omega) = \frac{i\hat{\chi}(0)}{\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\chi}'(0)}{\omega^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hat{\chi}''(0)}{\omega^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\chi}'''(0)}{\omega^4} + \dots$$

onde o argumento de $\hat{\chi}(\tau)$ e suas derivadas é dado por $\tau = 0^+$. Como $\hat{\chi}(0^-) = 0$, e como não há sentido em ter $\hat{\chi}(\tau)$ descontínua em $\tau = 0$, devemos ter $\hat{\chi}(0^+) = 0$. Assim, ficamos com

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\chi}'(0)}{\omega^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hat{\chi}''(0)}{\omega^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{\chi}'''(0)}{\omega^4} + \dots$$

de modo que as partes real e imaginária de $\chi(\omega)$ são dominadas pelos termos

$$\Re[\chi(\omega)] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

e

$$\Im[\chi(\omega)] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

Lembrando que $\chi = \varepsilon - \epsilon_0$ (equação 10.16), temos

$$\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - \epsilon_0 = \epsilon_0 \left(\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1 \right)$$

de modo que podemos reescrever as equações envolvendo $\chi(\omega)$ para colocá-las numa forma mais usual, isto é,

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1\right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (22.159)$$

e

$$\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \quad (22.160)$$

Sendo $\chi(\omega)$ analítica no plano complexo superior, também o é a função

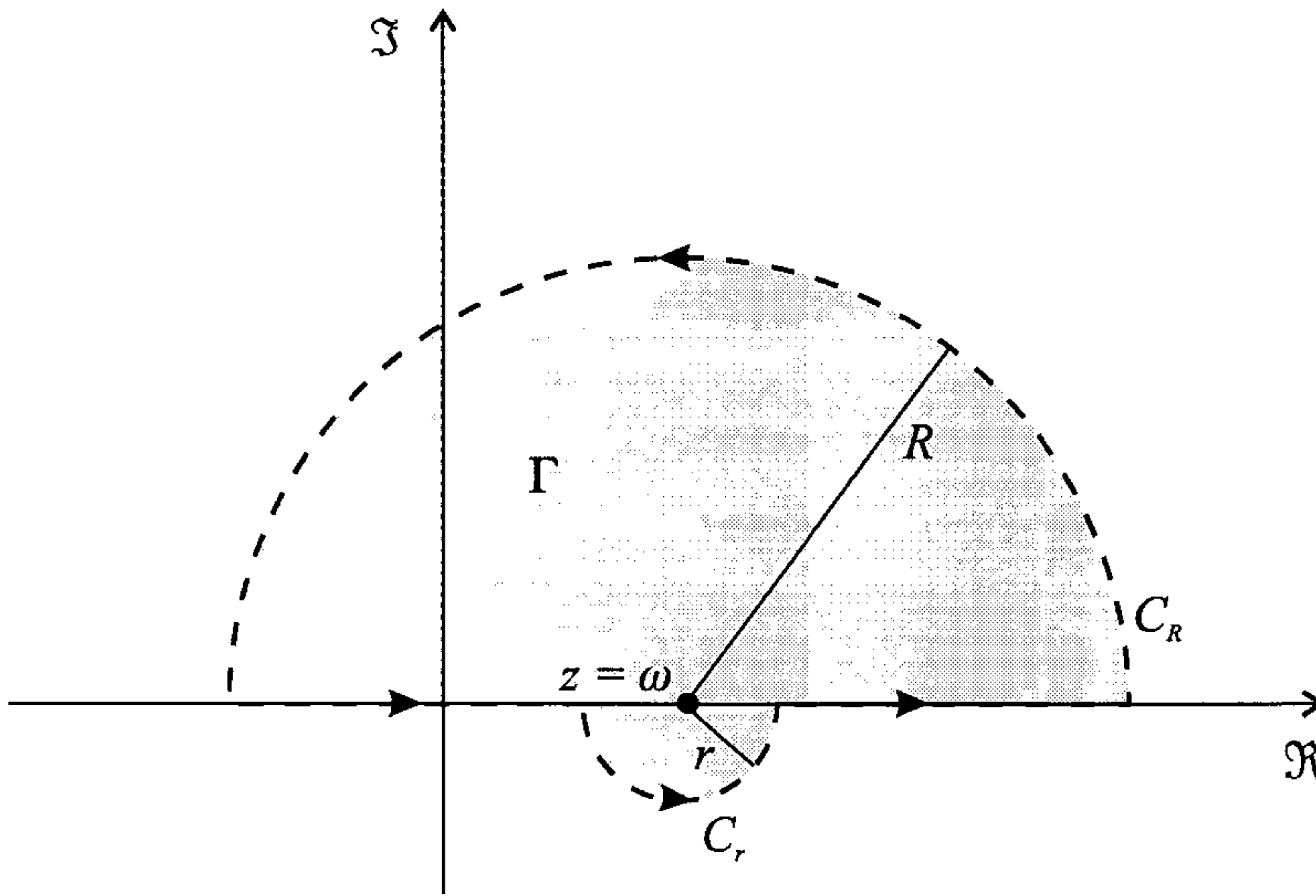
$$f(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1$$

de modo que podemos utilizar uma representação complexa dada pelo teorema de Cauchy para escrever, para um z complexo,

$$\frac{\varepsilon(z)}{\epsilon_0} - 1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' \quad (22.161)$$

onde o contorno de integração é dado pelo eixo real ω e um semicírculo de raio $R \rightarrow \infty$ no plano complexo superior. À medida que z se aproxima de uma frequência real ω , é preciso fazer um desvio semicircular de raio r em torno do ponto $z = \omega$, de modo que o trajeto fica similar ao mostrado na figura 22.12.

A integral dada pela equação 22.161 pode ser escrita como a soma de quatro integrais, isto é,

Figura 22.12: Trajeto para integração da função $f(\omega)$.

$$\oint_{\Gamma} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' = \int_{-R}^{\omega-r} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{C_r} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' + \int_{\omega+r}^R \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{C_R} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' \quad (22.162)$$

onde devemos tomar os limites $R \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$. A primeira e a terceira integrais podem ser escritas como

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{\omega-r} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega+r}^R \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\mathcal{P} \int_{-R}^R \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \right]$$

onde a letra P na integral do lado direito representa a *parte principal* da integral. A parte principal da integral de uma função $f(x)$ num intervalo $a \leq x \leq b$, contínua neste intervalo exceto no ponto x_0 ($a < x_0 < b$), é dada por

$$\oint_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_a^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^b f(x) dx \right] \quad (22.163)$$

Voltando à equação anterior, e aplicando o limite $R \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\oint_{-R}^R \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \right] = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (22.164)$$

Para a quarta integral da equação 22.162,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{C_R} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' \right]$$

nos valem do fato de que o integrando se anula quando $R \rightarrow \infty$ ²³, conforme se vê nas expansões assintóticas dadas pelas equações 22.159 e 22.160,

$$\Re \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1 \right] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) \quad \Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\omega^3} \right)$$

o que faz com que a integral se anule, isto é,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{C_R} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' \right] = 0 \quad (22.165)$$

O resultado acima é um caso particular de um resultado mais geral chamado de *Lema de Jordan*, que estabelece que, se uma função de variável complexa $f(z)$ converge uniformemente para zero quando $z \rightarrow \infty$, isto é, $|f(z)| < \epsilon$ sempre que $|z| > M$ (para algum M), então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{C_R} f(z) e^{icz} dz \right] = 0 \quad (22.166)$$

onde c é um número não-negativo e C_R é o semicírculo no plano complexo superior definido por $|z| = R$.

Voltando ao cálculo das integrais na equação 22.162, vemos que resta determinar

²³ Lembrando que ω' é complexo em C_R e dado por $\omega' = Re^{i\theta}$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{C_r} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' \right]$$

Para isso, vamos considerar o seguinte teorema, e sua prova:

Teorema 22.1. *Considere uma função complexa $f(z)$ analítica para $z = a$, e sua integral*

$$I_\delta = \int_{z_1}^{z_2} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

efetuada de $z_1 = a + re^{i\theta_1}$ a $z_2 = a + re^{i\theta_2}$ sobre o círculo definido por $|z - a| = r$, conforme a figura 22.13. Nesse caso, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_\delta = \delta i f(a) \quad (22.167)$$

onde $\delta = \theta_2 - \theta_1 + 2k\pi$, sendo k um inteiro tal que $|\delta| \leq 2\pi$.

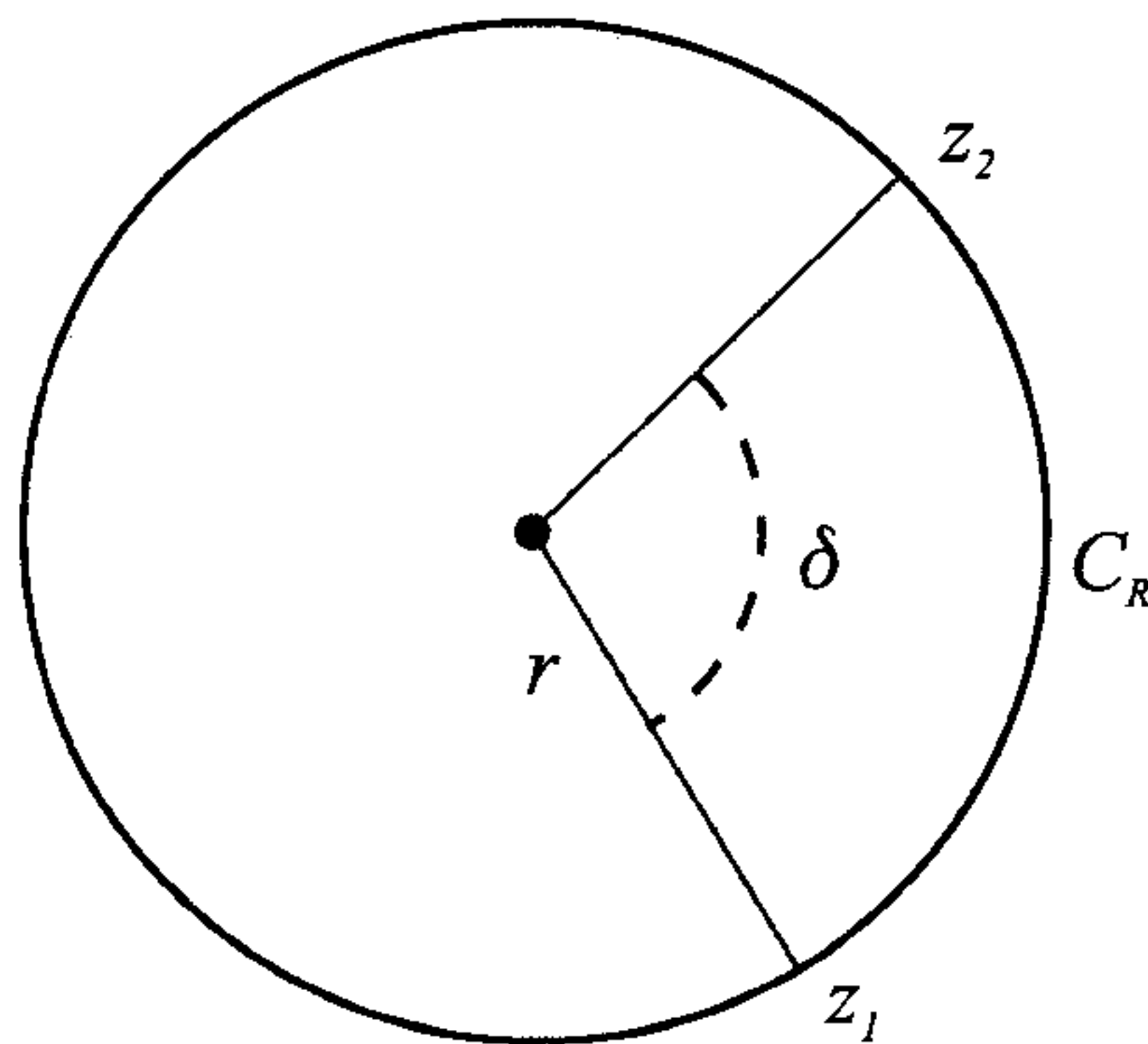


Figura 22.13: Círculo para o teorema 22.1.

Demonstração. Para demonstrar o teorema, vamos considerar a substituição

$$z = a + re^{i\theta}$$

$$dz = ire^{i\theta} d\theta$$

Então, a integral fica

$$\begin{aligned}
I_\delta &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{f(z)}{z-a} dz \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{f(a + re^{i\theta})}{a + re^{i\theta} - a} ire^{i\theta} d\theta \\
I_\delta &= i \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(a + re^{i\theta}) d\theta
\end{aligned}$$

Agora, no limite $r \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_\delta = \lim_{r \rightarrow 0} \left[i \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(a + re^{i\theta}) d\theta \right]$$

ou

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_\delta = i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lim_{r \rightarrow 0} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

de modo que

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_\delta = i \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(a) d\theta$$

ou

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_\delta = if(a) \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

e então,

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_\delta = \delta if(a)$$

o que demonstra o teorema.

□

Vamos agora aplicar o resultado dado pela equação 22.167 à integral de interesse, ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{C_r} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' \right] = i\pi \left[\frac{\varepsilon(z)}{\epsilon_0} - 1 \right] \quad (22.168)$$

Reunindo as expressões 22.164, 22.165 e 22.168 em 22.162, temos

$$\oint_{\Gamma} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - z} d\omega' = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + 0 + i\pi \left[\frac{\varepsilon(z)}{\epsilon_0} - 1 \right]$$

e, retornando à equação 22.161, ficamos com

$$\frac{\varepsilon(z)}{\epsilon_0} - 1 = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega' + i\pi \left[\frac{\varepsilon(z)}{\epsilon_0} - 1 \right] \right\}$$

ou, rearranjando os termos, e lembrando que $z \rightarrow \omega$,

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 - \frac{i}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

cujas partes real e imaginária são

$$\Re \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] = 1 + \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} \right]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (22.169a)$$

$$\Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] = -\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (22.169b)$$

As relações acima são conhecidas como relações de dispersão de Kramers-Kronig, e através do conhecimento da parte imaginária de $\varepsilon(\omega)$ por meio de medidas de absorção de raios-x, por exemplo, como em espectroscopia de absorção de estrutura fina de raios-x (EXAFS - Extended X-ray Absorption Fine Structure), é possível determinar a parte real de $\varepsilon(\omega)$, importante no fenômeno de absorção anômala. As equações 22.169 podem ser reescritas se considerarmos a propriedade 22.158,

$$\chi^*(\omega^*) = \chi(-\omega)$$

Como ω é real, temos $\omega^* = \omega$, e

$$\chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$$

e, como $\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - \epsilon_0$, temos

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega) \quad (22.170)$$

Escrevendo

$$\varepsilon(\omega) = \Re[\varepsilon(\omega)] + i\Im[\varepsilon(\omega)]$$

achamos, para o complexo conjugado,

$$\varepsilon^*(\omega) = \Re[\varepsilon(\omega)] - i\Im[\varepsilon(\omega)]$$

Além disso,

$$\varepsilon(-\omega) = \Re[\varepsilon(-\omega)] + i\Im[\varepsilon(-\omega)]$$

Mas, pela equação 22.170,

$$\Re[\varepsilon(\omega)] - i\Im[\varepsilon(\omega)] = \Re[\varepsilon(-\omega)] + i\Im[\varepsilon(-\omega)]$$

de modo que

$$\begin{aligned}\Re[\varepsilon(\omega)] &= \Re[\varepsilon(-\omega)] \\ -\Im[\varepsilon(\omega)] &= \Im[\varepsilon(-\omega)]\end{aligned}$$

ou seja, a parte real de $\varepsilon(\omega)$ é par, enquanto a parte imaginária é ímpar. Nesse caso, podemos reescrever as equações 22.169 para compreenderem apenas frequências positivas. Para a equação 22.169a, temos

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^0 \frac{\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right]}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Na primeira integral, fazemos

$$\omega' \rightarrow -\omega' \qquad d\omega' \rightarrow -d\omega'$$

e ela fica

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{\infty}^0 \frac{\Im\left[\frac{\varepsilon(-\omega')}{\epsilon_0}\right]}{-\omega' - \omega} (-d\omega') + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

ou então, considerando que $\Im[\varepsilon(\omega)]$ é ímpar e que mudar a ordem dos limites de integração troca o sinal da integral,

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right]}{\omega' + \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Então,

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right] \left[\frac{1}{\omega' + \omega} + \frac{1}{\omega' - \omega} \right] d\omega'$$

ou

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right] \left[\frac{\omega' - \omega + \omega' + \omega}{\omega'^2 - \omega^2} \right] d\omega'$$

e assim,

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \Im\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0}\right] d\omega' \quad (22.171)$$

A outra equação, dada por 22.169b, fica

$$\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^0 \frac{\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1\right]}{\omega' - \omega} d\omega' - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1\right]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

ou, usando a mesma substituição feita no caso anterior,

$$\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^0 \frac{\Re\left[\frac{\varepsilon(-\omega')}{\epsilon_0} - 1\right]}{-\omega' - \omega} (-d\omega') - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1\right]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

ou

$$\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1\right]}{\omega' + \omega} d\omega' - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1\right]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

ou ainda,

$$\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0}\right] = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \Re\left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1\right] \left[\frac{1}{\omega' + \omega} - \frac{1}{\omega' - \omega} \right] d\omega'$$

que fica

$$\Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] \left[\frac{\omega' - \omega - (\omega' + \omega)}{\omega'^2 - \omega^2} \right] d\omega'$$

e então,

$$\Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' \quad (22.172)$$

As equações 22.171 e 22.172 acima também são conhecidas como relações de dispersão de Kramers-Kronig. A partir delas, duas regras de soma podem ser derivadas. A primeira permite calcular a frequência de plasma ω_p , dada por 22.140, que é

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

ou, através de um rearranjo de termos, definimos ω_p como sendo

$$\omega_p^2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \omega^2 \left[1 - \frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] \right\}$$

Entretanto, lembrando as expansões 22.159 e 22.160, vemos que a parte imaginária de $\varepsilon(\omega)$ não contribui no limite, restando apenas a parte real, isto é,

$$\omega_p^2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \omega^2 \left[1 - \frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] \right\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \omega^2 \left[1 - \Re \left(\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right) \right] \right\}$$

Utilizando a equação 22.171, temos

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \omega^2 \left[1 - \Re \left(\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right) \right] \right\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \omega^2 \left[-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \Im \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} \right] d\omega' \right] \right\}$$

ou

$$\omega_p^2 = \frac{2}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\int_0^\infty \frac{\omega^2 \omega'}{\omega^2 (1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2})} \Im \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} \right] d\omega' \right]$$

que se simplifica para

$$\omega_p^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega' \Im \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} \right] d\omega' \quad (22.173)$$

que fornece a primeira regra de soma. A segunda regra de soma utiliza a equação 22.172, além da hipótese de que, a partir de um certo $\omega > \omega_0$ suficientemente grande, podemos escrever

$$\Re \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} - 1 \right] = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^4}\right)$$

Nesse caso, podemos reescrever a equação 22.172 como

$$\begin{aligned} \Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] &= -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\omega_0} \left[\frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' \\ &\quad - \frac{2\omega}{\pi} \int_{\omega_0}^\infty \left[\frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\omega_0} \left[\frac{1}{\omega^2(1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2})} \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' \\ &\quad - \frac{2\omega}{\pi} \int_{\omega_0}^\infty \left[\frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} \right] \left[-\frac{\omega_p^2}{\omega'^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega'^4}\right) \right] d\omega' \end{aligned}$$

ou ainda, desprezando os termos envolvendo $\mathcal{O}(1/\omega^4)$,

$$\begin{aligned} \Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] &= \frac{2}{\pi\omega} \int_0^{\omega_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}} \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' \\ &\quad + \frac{2\omega_p^2\omega}{\pi} \int_{\omega_0}^\infty \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} \quad (22.174) \end{aligned}$$

Na primeira integral, como ω é grande, podemos aproximar o denominador por sua série de Taylor, isto é,

$$\frac{2}{\pi\omega} \int_0^{\omega_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}} \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' =$$

$$\frac{2}{\pi\omega} \int_0^{\omega_0} \left[1 + \frac{\omega'^2}{\omega^2} + \dots \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega'$$

ou

$$\frac{2}{\pi\omega} \int_0^{\omega_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}} \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' =$$

$$\frac{2}{\pi\omega} \int_0^{\omega_0} \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' + \frac{2}{\pi\omega^3} \int_0^{\omega_0} \omega'^2 \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' + \dots$$

Como a segunda integral do lado direito resulta num número, podemos escrever

$$\frac{2}{\pi\omega} \int_0^{\omega_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}} \right] \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' =$$

$$\frac{2}{\pi\omega} \int_0^{\omega_0} \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

A segunda integral pode ser efetuada, com algum cuidado, e ela resulta na equação 22.176 (veja o exercício 22.7)

$$\oint_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} = \frac{1}{2\omega^3} \ln \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega_0\omega^2}$$

ou

$$\oint_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} = \frac{1}{2\omega^3} \ln \frac{\omega(1 + \frac{\omega_0}{\omega})}{\omega(1 - \frac{\omega_0}{\omega})} - \frac{1}{\omega_0\omega^2}$$

e assim,

$$\oint_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} = \frac{1}{2\omega^3} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{\omega_0\omega^2}$$

onde

$$x = \frac{\omega_0}{\omega}$$

O logaritmo pode ser expandido em série de Taylor, para dar

$$\ln \frac{1+x}{1-x} \simeq 2x + \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

ou

$$\ln \frac{1+x}{1-x} \simeq 2\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{2}{3}\frac{\omega_0^3}{\omega^3} + \dots$$

Então,

$$\oint_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} = \frac{1}{2\omega^3} \left[2\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{2}{3}\frac{\omega_0^3}{\omega^3} + \dots \right] - \frac{1}{\omega_0\omega^2}$$

ou

$$\oint_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_0}{\omega^4} - \frac{1}{\omega_0\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^6}\right)$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] = & \frac{2}{\pi\omega} \int_0^{\omega_0} \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right) + \frac{2\omega_p^2\omega}{\pi} \left[\frac{\omega_0}{\omega^4} - \frac{1}{\omega_0\omega^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^6}\right) \right] \end{aligned}$$

ou, realizando algumas simplificações,

$$\Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] = \frac{2}{\pi\omega} \left[\int_0^{\omega_0} \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' - \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

Lembrando que determinamos que a parte imaginária de $\varepsilon(\omega)$ se comporta da forma dada pela equação 22.160,

$$\Im \left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\epsilon_0} \right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

temos que o colchete na expressão acima se anula, ou seja,

$$\int_0^{\omega_0} \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} - 1 \right] d\omega' - \frac{\omega_p^2}{\omega_0} = 0$$

ou

$$\int_0^{\omega_0} \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} \right] d\omega' - \int_0^{\omega_0} d\omega' = \frac{\omega_p^2}{\omega_0}$$

ou ainda,

$$\int_0^{\omega_0} \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} \right] d\omega' - \omega_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0}$$

que pode ser escrito como

$$\frac{1}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} \Re \left[\frac{\varepsilon(\omega')}{\epsilon_0} \right] d\omega' = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \quad (22.175)$$

que é a segunda regra de soma, chamada também de relação de superconvergência. A relação 22.173 permanece válida para condutores, mas a 22.175 deve ser corrigida para incluir o pólo em $\omega = 0$. No próximo capítulo, veremos dois dos fenômenos mais importantes envolvendo ondas, a reflexão e a refração de ondas.

22.8 Exercícios

22.1 Mostre a segunda parte da equação 22.49,

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F}_0^* \mathcal{G}_0]$$

22.2 Mostre a segunda parte da equação 22.50,

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \Re[\mathcal{F}^* \mathcal{G}]$$

22.3 Demonstre a equação 22.96,

$$\mathcal{J}_0(\sqrt{i}x) = \text{ber } x - i \text{bei } x$$

usando as equações 22.93–22.95.

22.4 Demonstre a relação 22.107,

$$\int_0^{x_0} x \text{bei } x \, dx = -\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0 \text{ber}'\left(\frac{\sqrt{2}}{\zeta} \rho_0\right)$$

22.5 Usando as equações 22.94 e 22.95, mostre a equação 22.111,

$$\lim_{\substack{x_0 \rightarrow 0 \\ \text{(baixa frequência)}}} \frac{\text{ber } x_0 - i \text{bei } x_0}{\text{bei}' x_0 + i \text{ber}' x_0} = \frac{2}{x_0} = \frac{\sqrt{2}\zeta}{\rho_0}$$

22.6 O índice de refração de gás hidrogênio, em $T = 0^\circ\text{C}$ e $P = 1 \text{ atm}$, pode ser dado por

$$n_H = 1 + 1,360 \times 10^{-4} + \frac{1,05 \times 10^{-18}}{\lambda^2}$$

onde λ é dado em metros. Obtenha os coeficientes A e B na equação 22.130, o comprimento de onda λ_{res} e a frequência ν_{res} da ressonância, e verifique se ela cai na faixa de ultravioleta, conforme suposto na obtenção da fórmula de Cauchy. Em seguida, utilize a expressão 22.131, além do número de Avogadro, da equação de Clapeyron para gases ideais, da constante de Faraday (produto do número de Avogadro pela carga do elétron) e da massa molecular do hidrogênio para determinar a razão $\frac{e}{m}$ para o elétron.

22.7 Mostre que a integral

$$\oint_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)}$$

que aparece na equação 22.174, tem como resultado

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)} = \frac{1}{2\omega^3} \ln \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega_0\omega^2} \quad (22.176)$$

Para tanto, primeiro calcule

$$I_- = \int_{\omega_0}^{\omega - \delta} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)}$$

e depois,

$$I_+ = \int_{\omega + \delta}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 - \omega^2)}$$

Em seguida, tome o limite

$$I = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (I_- + I_+)$$

e se apóie também no fato de que, para $x, y \in R$,

$$\ln(x - y) = \begin{cases} \ln |x - y|, & x > y \\ \ln(y - x) + \pi i, & x < y \end{cases}$$

Note que $\omega_0 < \omega$ na integral.

Capítulo 23

Ondas Eletromagnéticas, II: Reflexão e Refração

Neste capítulo vamos estudar o que ocorre com as ondas eletromagnéticas quando elas passam de um meio para outro através de uma interface. Nesse caso, surgem os fenômenos de reflexão, quando uma parte da onda retorna para o meio de onde partiu, e refração (ou transmissão), quando uma parcela da onda passa para o outro meio, sofrendo eventualmente uma mudança na sua velocidade de propagação. O comportamento das ondas está sujeito a condições de contorno na interface, dadas pelas equações de Maxwell, e que estão descritas na forma mais geral pelas equações 19.28, repetidas abaixo:

$$(\vec{\mathcal{D}}_2 - \vec{\mathcal{D}}_1) \cdot \hat{n} = \sigma \quad (23.1a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n} = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n} \quad (23.1b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell} = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell} \quad (23.1c)$$

$$\hat{n} \times (\vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_1) = \vec{J}_\ell \quad (23.1d)$$

onde σ e $\vec{J}_\ell$ são as densidades superficial de carga e de corrente reais existentes na interface entre os meios ① e ②, $\hat{n}$ é um vetor normal à interface e $d\vec{\ell}$ é um vetor tangente à interface. Se os meios forem lineares, as condições acima podem ser reescritas como (veja as equações 19.29)

$$(\epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}_2 - \epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_1) \cdot \hat{n} = \sigma \quad (23.2a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n} = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n} \quad (23.2b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell} = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell} \quad (23.2c)$$

$$\hat{n} \times \left(\frac{\vec{\mathcal{B}}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{\mathcal{B}}_1}{\mu_1} \right) = \vec{J}_\ell \quad (23.2d)$$

e, se não houver densidades de carga e corrente na fronteira entre os dois meios, as condições de contorno apropriadas tornam-se

$$\epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \hat{n} = \epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot \hat{n} \quad (23.3a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n} = \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n} \quad (23.3b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell} = \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell} \quad (23.3c)$$

$$\hat{n} \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_1}{\mu_1} = \hat{n} \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_2}{\mu_2} \quad (23.3d)$$

Nosso interesse agora é estudar o que ocorre com as ondas eletromagnéticas na interface entre dois meios para várias situações físicas importantes, descritas a seguir.

23.1 Reflexão e Refração para Incidência Normal na Interface entre Dois Dielétricos

A primeira situação importante consiste em considerar o que ocorre com uma onda eletromagnética incidindo paralelamente ao vetor normal (incidência normal) à interface entre dois meios dielétricos lineares caracterizados pelas grandezas (ϵ_1, μ_1) (meio ①) e (ϵ_2, μ_2) (meio ②), conforme mostra a figura 23.1. A fronteira entre os meios não tem densidades de carga ou corrente reais, por hipótese. Para simplificar, vamos colocar a onda incidente propagando-se no sentido positivo do eixo z .

Lembrando que a onda incidente se propaga na direção z , ela é descrita, de acordo com os campos 22.39 e 22.40, mediante

$$\vec{\mathcal{E}}_i(z, t) = \mathcal{E}_{0i} \cos(k_1 z - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{i}}$$

e

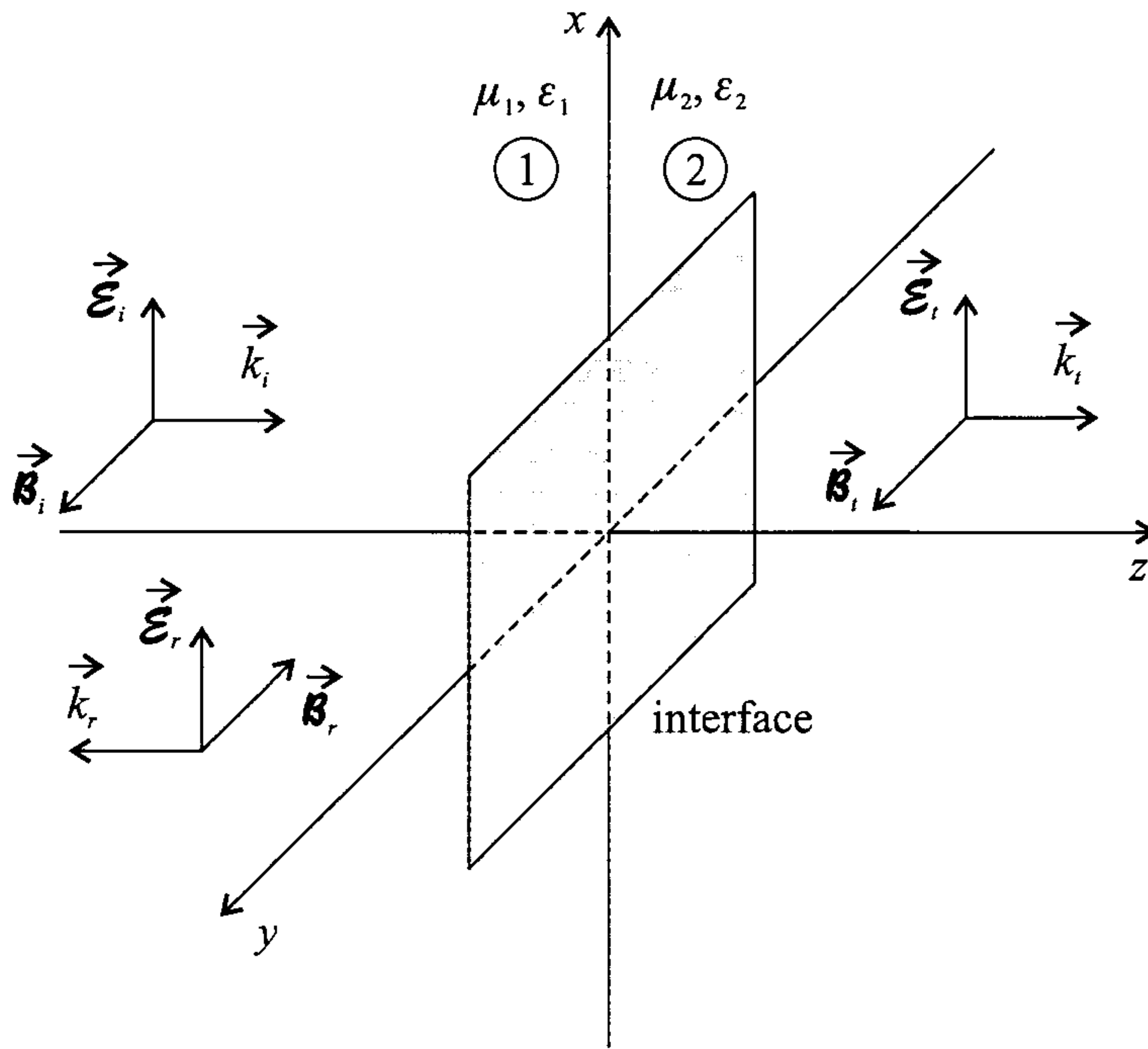


Figura 23.1: Onda eletromagnética em incidência normal à interface entre dois meios dielétricos lineares.

$$\vec{B}_i(z, t) = B_{0_i} \cos(k_1 z - \omega t + \delta) \hat{j} = \frac{|\hat{k}_1 \times \vec{E}_{0_i}|}{v_1} \cos(k_1 z - \omega t + \delta) \hat{j}$$

ou pelas suas extensões complexas

$$\vec{E}_i(z, t) = E_{0_i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{i} \quad (23.4a)$$

$$\vec{B}_i(z, t) = \frac{E_{0_i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{j} \quad (23.4b)$$

Note que a velocidade da onda é definida por meio de 22.36,

$$v = c \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}}$$

de modo que ela depende apenas das características do meio, não da onda. Assim, ao incidir na interface, a onda incidente dá origem a uma onda refletida, que se propaga no meio ① com a mesma velocidade v_1 , mas no sentido

negativo do eixo z , e a uma onda refratada, ou transmitida, que se propaga no meio ② com uma velocidade v_2 na direção z positiva. A onda refletida é descrita por

$$\vec{\mathcal{E}}_r(z, t) = \mathcal{E}_{0_r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \quad (23.5a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_r(z, t) = -\frac{\mathcal{E}_{0_r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (23.5b)$$

O sinal negativo em k_1 aparece porque a onda se propaga na direção z negativa. O sinal negativo em $\vec{\mathcal{B}}_r$ surge da inversão de sentido que ocorre com $\vec{\mathcal{B}}$ ao ser refletido. Note que um dos campos $\vec{\mathcal{E}}_r$ ou $\vec{\mathcal{B}}_r$ precisa inverter o seu sentido na reflexão, para que a onda inverta o sentido de propagação, lembrando que eles não são todos independentes entre si, já que as equações de Maxwell impõem a restrição 22.25,

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}$$

Na figura 23.1, supusemos que quem inverte o sentido é o campo magnético, e se isso não for correto, obteremos um módulo negativo, indicando que quem inverte é o campo elétrico. De fato, a inversão dependerá dos índices de refração do meio. A onda transmitida é descrita por

$$\vec{\mathcal{E}}_t(z, t) = \mathcal{E}_{0_t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \quad (23.6a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t(z, t) = \frac{\mathcal{E}_{0_t}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (23.6b)$$

e agora queremos saber como são os campos refletido e transmitido em termos dos campos incidentes. Na interface eles precisam satisfazer as condições de contorno 23.3. Como os campos não têm componentes normais à superfície, as equações 23.3a e 23.3b são imediatamente satisfeitas. Para a equação 23.3c, temos

$$[\vec{\mathcal{E}}_i(z=0, t) + \vec{\mathcal{E}}_r(z=0, t)] \cdot d\vec{\ell} = \vec{\mathcal{E}}_t(z=0, t) \cdot d\vec{\ell}$$

ou, usando as equações 23.4a, 23.5a e 23.6a, já eliminando o termo exponencial em t , e lembrando que, nesse caso, $d\vec{\ell} = dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}}$,

$$(\mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r}) \hat{\mathbf{i}} \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}}) = \mathcal{E}_{0_t} \hat{\mathbf{i}} \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}})$$

ou

$$\mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r} = \mathcal{E}_{0_t} \quad (23.7)$$

que é a primeira condição para as amplitudes dos campos. A segunda vem da equação 23.3d, ou seja, usando as expressões 23.4b, 23.5b e 23.6b,

$$\hat{n} \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_i(z=0, t) + \vec{\mathcal{B}}_r(z=0, t)}{\mu_1} = \hat{n} \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_t(z=0, t)}{\mu_2}$$

ou

$$\hat{k} \times \frac{\mathcal{E}_{0_i} - \mathcal{E}_{0_r}}{v_1 \mu_1} \hat{j} = \hat{k} \times \frac{\mathcal{E}_{0_t}}{v_2 \mu_2} \hat{j}$$

ou ainda,

$$-\frac{\mathcal{E}_{0_i} - \mathcal{E}_{0_r}}{v_1 \mu_1} \hat{i} = -\frac{\mathcal{E}_{0_t}}{v_2 \mu_2} \hat{i}$$

e então,

$$\mathcal{E}_{0_i} - \mathcal{E}_{0_r} = \frac{v_1 \mu_1}{v_2 \mu_2} \mathcal{E}_{0_t}$$

Definindo

$$\alpha = \frac{v_1 \mu_1}{v_2 \mu_2} = \frac{c v_1 \mu_1}{c v_2 \mu_2} = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} \quad (23.8)$$

temos

$$\mathcal{E}_{0_i} - \mathcal{E}_{0_r} = \alpha \mathcal{E}_{0_t}$$

que, juntamente com a expressão 23.7, forma o sistema de equações

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r} = \mathcal{E}_{0_t} \\ \mathcal{E}_{0_i} - \mathcal{E}_{0_r} = \alpha \mathcal{E}_{0_t} \end{cases}$$

cuja solução é,

$$\mathcal{E}_{0_r} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \mathcal{E}_{0_i} \quad (23.9)$$

e

$$\mathcal{E}_{0t} = \frac{2}{1 + \alpha} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.10)$$

Se considerarmos que para a maioria dos meios o valor da permeabilidade magnética é muito próximo ao valor do vácuo, temos $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, de modo que a expressão 23.8 torna-se

$$\alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (23.11)$$

Então, nesse limite, temos

$$\mathcal{E}_{0r} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \mathcal{E}_{0i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.12)$$

e

$$\mathcal{E}_{0t} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \mathcal{E}_{0i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.13)$$

Assim, quando o meio ② é opticamente mais denso que o meio ①, ou seja, quando $v_2 < v_1$ ou, de forma equivalente, $n_2 > n_1$, o campo elétrico da onda refletida sofre uma inversão de fase em relação ao campo da onda incidente, já que a expressão 23.12 torna-se negativa. Conseqüentemente, o campo magnético é refletido sem inversão de fase. O contrário ocorre quando o meio ② é opticamente menos denso do que o meio ①.

Já que existem duas ondas propagando-se a partir da interface, uma refletida e outra transmitida, cabe perguntar o que ocorre com a energia transportada pela onda incidente após a interação com a interface. O fluxo médio de energia é dado pelo vetor de Poynting médio, obtido por intermédio da expressão 22.53,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}_0 \times \vec{\mathcal{H}}_0^*] = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}_0^* \times \vec{\mathcal{H}}_0]$$

Assim, para a onda incidente temos

$$\langle \vec{S}_i \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\vec{\mathcal{E}}_{0i} \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_{0i}^*}{\mu_1} \right]$$

e, usando as expressões 23.4, obtemos

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_1} \Re \left[\varepsilon_{0_i} \hat{\mathbf{i}} \times \frac{\varepsilon_{0_i}^*}{v_1} \hat{\mathbf{j}} \right]$$

ou

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_i \rangle = \frac{1}{2v_1\mu_1} \Re[|\varepsilon_{0_i}|^2] \hat{\mathbf{k}}$$

e, finalmente,

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_i \rangle = \frac{|\varepsilon_{0_i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{\mathbf{k}} \quad (23.14)$$

De forma similar, o vetor de Poynting médio para a onda refletida é, usando as expressões 23.5,

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_r \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\vec{\mathcal{E}}_{0_r} \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_{0_r}^*}{\mu_1} \right]$$

ou

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_r \rangle = -\frac{1}{2\mu_1} \Re \left[\varepsilon_{0_r} \hat{\mathbf{i}} \times \frac{\varepsilon_{0_r}^*}{v_1} \hat{\mathbf{j}} \right]$$

ou ainda,

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_r \rangle = -\frac{1}{2v_1\mu_1} \Re[|\varepsilon_{0_r}|^2] \hat{\mathbf{k}}$$

e, finalmente,

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_r \rangle = -\frac{|\varepsilon_{0_r}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{\mathbf{k}} \quad (23.15)$$

Por fim, no meio ②, a onda transmitida tem o vetor de Poynting médio dado por

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_t \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\vec{\mathcal{E}}_{0_t} \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_{0_t}^*}{\mu_2} \right]$$

ou, usando as expressões 23.6,

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_2} \Re \left[\varepsilon_{0t} \hat{\mathbf{i}} \times \frac{\varepsilon_{0t}^*}{v_2} \hat{\mathbf{j}} \right]$$

ou ainda,

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2v_2\mu_2} \Re[|\varepsilon_{0t}|^2] \hat{\mathbf{k}}$$

e, finalmente,

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{|\varepsilon_{0t}|^2}{2v_2\mu_2} \hat{\mathbf{k}} \quad (23.16)$$

O *coeficiente de reflexão* R é definido como sendo a fração de energia que é refletida pela interface quando a onda incidente interage com ela, ou seja,

$$R = \frac{\langle \vec{S}_r \rangle \cdot (-\hat{n})}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{n}} \quad (23.17)$$

onde $\hat{n}$ é o versor normal à superfície. Assim, o coeficiente de reflexão fica, usando 23.14 e 23.15,

$$R = \frac{-\frac{|\varepsilon_{0r}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{\mathbf{k}} \cdot (-\hat{\mathbf{k}})}{\frac{|\varepsilon_{0i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}$$

ou

$$R = \frac{|\varepsilon_{0r}|^2}{|\varepsilon_{0i}|^2}$$

e, usando a equação 23.9, lembrando que α é real,

$$R = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \quad (23.18)$$

Lembrando a definição 22.42 para a impedância do meio,

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

vemos que podemos reescrever α como

$$\alpha = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} = \frac{\frac{c}{v_2} \mu_1}{\frac{c}{v_1} \mu_2}$$

ou

$$\alpha = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \mu_1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \mu_2}$$

ou ainda,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (23.19)$$

Assim, o coeficiente de reflexão R dado por 23.18 fica

$$R = \left(\frac{1 - \frac{Z_1}{Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \right)^2$$

ou

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (23.20)$$

Note, por essa expressão, que para uma onda não ser refletida é suficiente que os meios ① e ② tenham a mesma impedância, não necessitando que ϵ , μ ou n sejam os mesmos.

O *coeficiente de transmissão* T é definido como sendo a fração de energia que é transmitida através da interface, ou seja,

$$T = \frac{\langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{n}} \quad (23.21)$$

Portanto, usando as equações 23.14 e 23.16, obtemos

$$T = \frac{\frac{|\mathcal{E}_{0t}|^2}{2v_2\mu_2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{\frac{|\mathcal{E}_{0i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}}$$

ou

$$T = \frac{v_1 \mu_1 |\mathcal{E}_{0t}|^2}{v_2 \mu_2 |\mathcal{E}_{0i}|^2}$$

Utilizando agora as expressões 23.8 e 23.10, obtemos

$$T = \alpha \left(\frac{2}{1 + \alpha} \right)^2$$

ou

$$T = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad (23.22)$$

Em termos das impedâncias dos meios, obtemos, lembrando a equação 23.19,

$$T = \frac{4 \frac{Z_1}{Z_2}}{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)^2}$$

ou

$$T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Conforme já dissemos, para a maioria dos materiais podemos considerar $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, de modo que, pela equação 23.11,

$$\alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Então, nesse caso R torna-se

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (23.23)$$

enquanto T fica

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (23.24)$$

Note que, das equações 23.18 e 23.22, temos

$$R + T = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

ou

$$R + T = \frac{1 - 2\alpha + \alpha^2}{(1 + \alpha)^2} + \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

e então,

$$R + T = \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2} = 1$$

o que está de acordo com o fato de que a energia não fica armazenada na interface. Como exemplo, considerando que vidro comum tem um índice de refração em torno de 1,5 e que para o ar $n_{\text{ar}} \approx 1$, vemos que, quando luz incide numa direção normal à interface vinda do ar numa janela de vidro, temos $R = 0,04$ e $T = 0,96$ (em cada superfície), ou seja, a maior parte da luz é transmitida através do vidro, fato este bastante conhecido por nós.

Quando várias camadas de material dielétrico são justapostas, em cada interface devem ser consideradas as condições de contorno para os campos, fornecendo equações adicionais para a determinação dos campos. Utilizando uma combinação apropriada de espessuras, é possível eliminar, por exemplo, a onda transmitida, obtendo-se assim um espelho de alta qualidade. Vejamos agora o que ocorre quando a onda incide de forma oblíqua na interface.

23.2 Reflexão e Refração para Incidência Oblíqua na Interface entre Dois Dielétricos

Na seção anterior estudamos o que ocorre quando uma onda eletromagnética incide numa direção normal à interface entre dois meios dielétricos. Agora, vamos verificar o que ocorre quando a incidência ocorre obliquamente, sendo o caso de incidência normal um caso particular deste. Note que ainda não existem densidades de cargas ou correntes na interface. A figura 23.2 ilustra os vetores de onda para as ondas incidente, refletida e refratada (ou transmitida).

Da figura acima nota-se que, em princípio, os vetores de onda $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ e $\vec{k}_t$ poderiam ter qualquer orientação espacial uns em relação aos outros. No entanto, as condições de contorno 23.3 permitem apenas uma orientação. Os campos da onda incidente são dados por

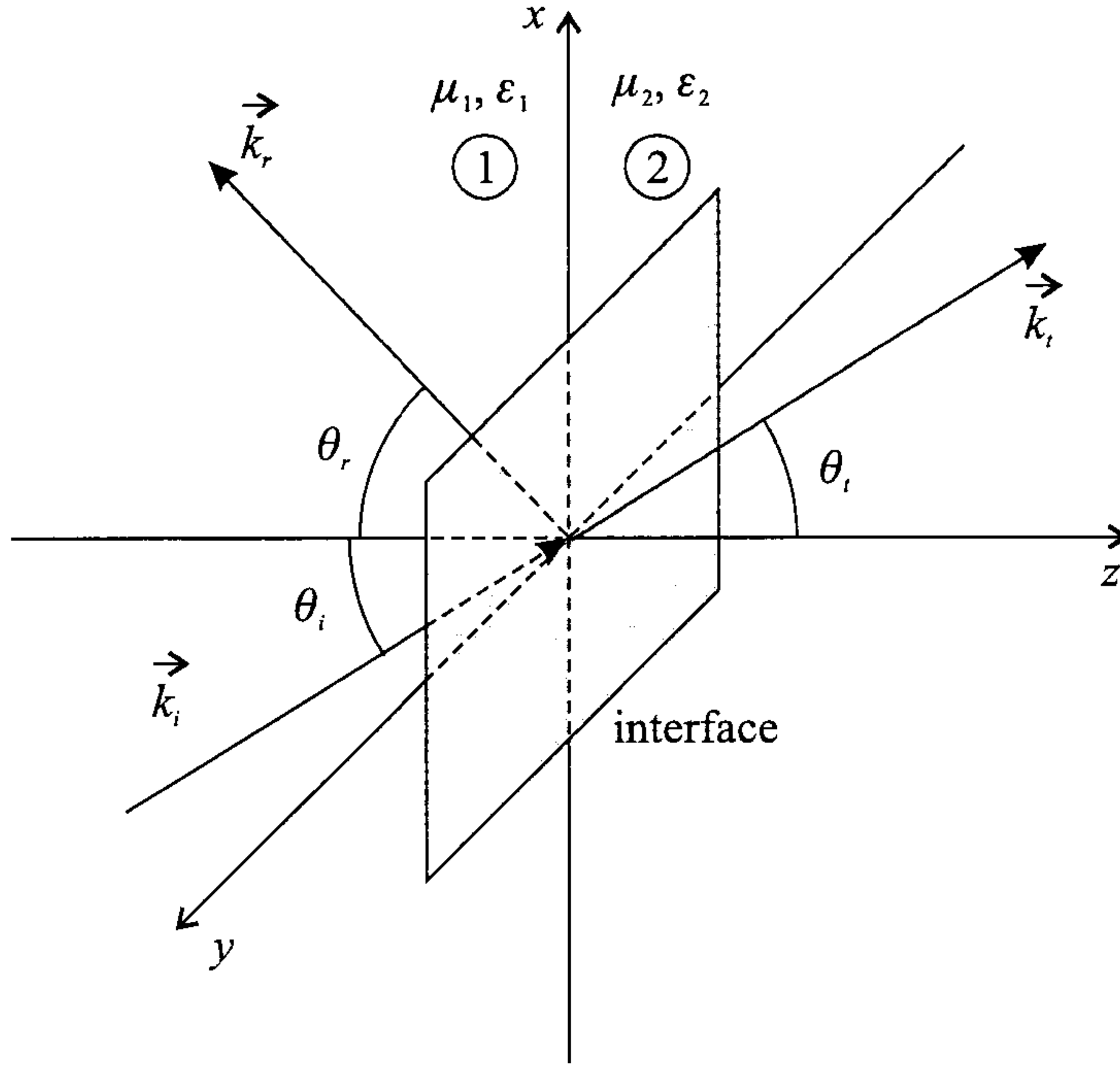


Figura 23.2: Vetores de onda para incidência oblíqua na interface entre dois dielétricos.

$$\vec{\mathcal{E}}_i(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (23.25a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_i(\vec{r}, t) = \frac{\hat{k}_i \times \vec{\mathcal{E}}_{0i}}{v_1} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (23.25b)$$

enquanto os campos da onda refletida são descritos por

$$\vec{\mathcal{E}}_r(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (23.26a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_r(\vec{r}, t) = \frac{\hat{k}_r \times \vec{\mathcal{E}}_{0r}}{v_1} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (23.26b)$$

Por fim, a onda transmitida é descrita por

$$\vec{\mathcal{E}}_t(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (23.27a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t(\vec{r}, t) = \frac{\hat{k}_t \times \vec{\mathcal{E}}_{0t}}{v_2} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (23.27b)$$

A frequência da onda não muda ao sofrer reflexão ou transmissão através da interface. Assim, utilizando a expressão 22.41, temos

$$k_i v_1 = k_r v_1 = k_t v_2 = \omega$$

ou

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t \quad (23.28)$$

Agora, para relacionar os vetores de propagação, notamos que as condições de contorno 23.3 partilham todas da mesma estrutura, a saber,

$$(\quad)e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + (\quad)e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\quad)e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad z = 0$$

onde os parênteses devem ser preenchidos apropriadamente, considerando cada condição de contorno específica. A questão aqui é que, se a relação acima deve ser válida para todos os valores de x , y e t , as exponenciais devem ser iguais em todos os valores dessas coordenadas. Elas já são iguais com relação ao tempo, o que é mais uma verificação do fato de a frequência das ondas ser a mesma. Para ser igual com relação às coordenadas espaciais, devemos ter

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}, \quad z = 0$$

ou, explicitamente,

$$xk_{i_x} + yk_{i_y} = xk_{r_x} + yk_{r_y} = xk_{t_x} + yk_{t_y}$$

para todos os valores de x e y . Então, se $x = 0$, temos

$$yk_{i_y} = yk_{r_y} = yk_{t_y} \quad \Rightarrow \quad k_{i_y} = k_{r_y} = k_{t_y}$$

Por outro lado, se $y = 0$, temos

$$xk_{i_x} = xk_{r_x} = xk_{t_x} \quad \Rightarrow \quad k_{i_x} = k_{r_x} = k_{t_x} \quad (23.29)$$

As condições acima implicam que $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ e $\vec{k}_t$ são coplanares, definindo o plano de incidência, que contém também o versor normal à interface. Por exemplo, se $\vec{k}_i$ está no plano xz , $k_{i_y} = 0$ e, pela relação obtida acima, $k_{r_y} = k_{t_y} = 0$, e $\vec{k}_r$ e $\vec{k}_t$ também estarão no plano xz . Como os vetores de propagação são coplanares, sempre podemos girar o sistema de eixos de modo que a situação

descrita há pouco ($\vec{k}_i$ no plano xz) seja verificada, o que simplifica as equações. Nesse caso, chamando de θ o ângulo entre $\vec{k}$ e a normal à interface, que aqui corresponde ao versor $\hat{k}$, podemos reescrever a equação 23.29 como

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

ou, considerando que

$$\text{sen } \theta = \frac{k_x}{k}$$

temos

$$k_i \text{ sen } \theta_i = k_r \text{ sen } \theta_r = k_t \text{ sen } \theta_t$$

Lembrando agora a expressão 23.28,

$$k_i = k_r = \frac{v_2}{v_1} k_t = \frac{n_1}{n_2} k_t$$

obtemos, para o ângulo de reflexão,

$$\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r$$

ou

$$\theta_i = \theta_r \quad (23.30)$$

isto é, o ângulo de incidência e o de reflexão são iguais, o que é conhecido como a lei de reflexão. Para o ângulo de refração, ou transmissão, temos

$$\frac{n_1}{n_2} \text{ sen } \theta_i = \text{sen } \theta_t$$

ou

$$n_1 \text{ sen } \theta_i = n_2 \text{ sen } \theta_t \quad (23.31)$$

que é conhecida como lei de refração ou lei de Snell. Quando $n_2 > n_1$, $\theta_t < \theta_i$, e o vetor de onda da onda transmitida se aproxima da direção normal ¹.

¹ Lembrando que $\theta = 0$ corresponde ao caso discutido na seção anterior, de incidência normal.

Apesar de terem sido demonstradas para ondas eletromagnéticas, as leis acima são válidas mesmo para outros tipos de ondas, como ondas sonoras e ondas na água. As condições de contorno específicas para ondas eletromagnéticas, obtidas das equações de Maxwell, não foram ainda aplicadas, e este é o nosso próximo passo. Como uma onda polarizada numa direção qualquer pode ser considerada como uma combinação linear de ondas polarizadas nas direções x e y , é suficiente estudarmos dois casos gerais relacionados à polarização do campo elétrico.

Antes de passar à discussão seguinte, é interessante introduzir o conceito de comprimento óptico, dado por

$$L_o = \int_A^B n(s) ds \quad (23.32)$$

onde A e B são dois pontos no espaço e $n(s)$ é o índice de refração, que pode eventualmente ser uma função da posição s . O *princípio de Fermat* estabelece que a radiação sempre percorre um caminho que extremiza (em geral ele minimiza) o caminho óptico entre dois pontos, ou seja, um caminho no qual a variação de L_o , δL_o , é nula. Assim, num meio homogêneo e isotrópico, a radiação percorre uma linha reta entre dois pontos, que é o menor caminho entre esses pontos. Usando esse princípio, é possível obter as leis de reflexão e refração. Iniciamos considerando a figura 23.3. Nessa figura, temos, num mesmo meio, de índice de refração constante n , 2 pontos fixos A e B , de coordenadas $A(x_A, y_A, 0)$ e $B(x_B, y_B, 0)$. Há uma superfície no plano xz ($y = 0$) que separa este meio de outro, localizado na região $y < 0$, que não é relevante no momento, e nessa superfície, num ponto $C(x, 0, z)$, ocorre a incidência da radiação emitida pelo ponto A e que se dirige para o ponto B . Os ângulos de incidência e de reflexão são indicados por θ_i e θ_r , respectivamente, e definimos também os ângulos auxiliares α_i e α_r . Para evitar que a radiação siga diretamente de A para B , uma parede P opaca é colocada entre esses dois pontos. Assim, para ir de A a B , é necessário que ocorra uma reflexão no ponto C , cujas coordenadas devem ser tais que façam com que

$$\delta L_o = \frac{\partial L_o}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L_o}{\partial z} \delta z$$

se anule e tenhamos um extremo de L_o , como requer o princípio de Fermat. Como δx e δz são ortogonais, cada uma das derivadas deve se anular independentemente uma da outra.

Para calcular L_o , devemos considerar dois trajetos, o primeiro de A até C e o segundo de C até B . Nos dois trajetos, n é constante e precisamos apenas saber a distância entre os pontos para usar a equação 23.32, que fica

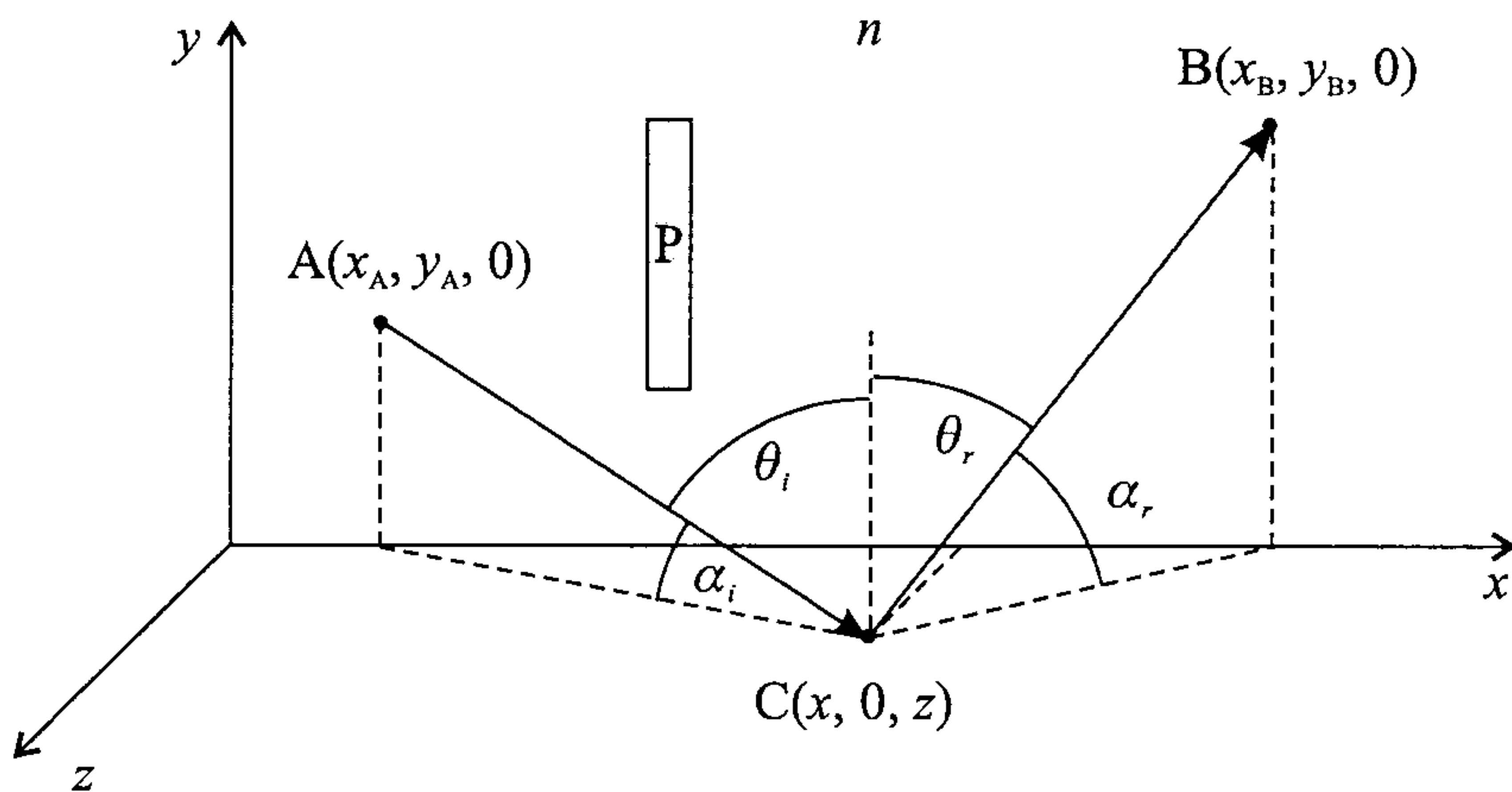


Figura 23.3: Diagrama para obtenção das leis de reflexão pelo princípio de Fermat.

$$L_o = n \int_A^C ds + n \int_C^B ds = n(d_{AC} + d_{CB})$$

No primeiro trajeto, temos

$$d_{AC} = \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}$$

enquanto no segundo obtemos

$$d_{CB} = \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2}$$

e assim, achamos

$$L_o = n \left[\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2} + \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2} \right] \quad (23.33)$$

Façamos agora a derivada com relação a z , que fica

$$\frac{\partial L_o}{\partial z} = n \left[\frac{z}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2}} \right]$$

ou

$$\frac{\partial L_o}{\partial z} = nz \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2}} \right]$$

Essa derivada tem que se anular nos extremos de L_o , de modo que devemos ter

$$nz \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2}} \right] = 0$$

ou, como n não é nulo,

$$z \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2}} \right] = 0$$

Como o termo entre colchetes consiste na soma de duas frações que envolvem denominadores com raízes quadradas, elas são sempre estritamente positivas, de modo que o termo nunca pode se anular. Sendo assim, só resta a possibilidade de que $z = 0$, ou seja, o ponto C está no mesmo plano que os pontos A e B, que também contém a normal à superfície em $y = 0$. Assim, achamos que os raios incidente e refletido e a normal são coplanares, bem como os vetores de onda $\vec{k}_i$ e $\vec{k}_r$. Substituindo o valor de z na expressão 23.33, obtemos

$$L_o = n \left[\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2} + \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2} \right]$$

Devemos calcular agora a derivada em relação a x , que também deve ser nula nos extremos de L_o , ou seja,

$$\frac{\partial L_o}{\partial x} = n \left[\frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} - \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} \right] = 0$$

de modo que

$$\frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Agora, observando a figura 23.3, lembrando que $z = 0$, vemos que

$$\cos \alpha_i = \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} \quad \cos \alpha_r = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

ou seja,

$$\cos \alpha_i = \cos \alpha_r$$

ou ainda,

$$\alpha_i = \alpha_r$$

Como $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, temos, finalmente,

$$\theta_i = \theta_r$$

ou seja, o ângulo de incidência é igual ao de reflexão, conforme a lei de reflexão 23.30 já vista anteriormente. Passemos agora à refração, ou transmissão, entre dois meios. Vamos considerar inicialmente a figura 23.4.

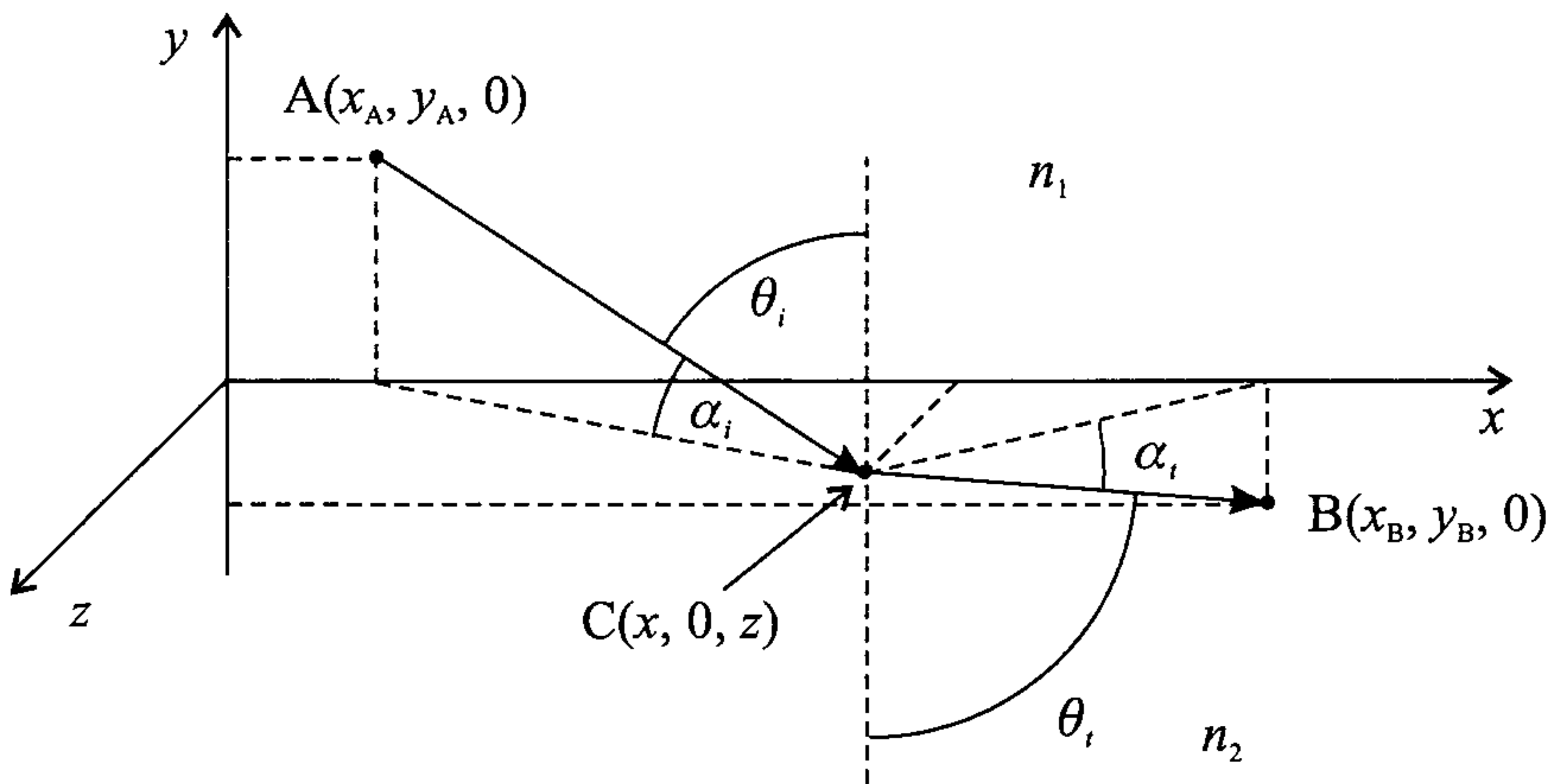


Figura 23.4: Diagrama para obtenção das leis de refração pelo princípio de Fermat.

Na figura novamente vemos dois pontos fixos $A(x_A, y_A, 0)$ e $B(x_B, y_B, 0)$, que são os pontos de saída e chegada da radiação, e um ponto $C(x, 0, z)$ na interface entre os dois meios ① ($y > 0$) e ② ($y < 0$), descritos por n_1 e n_2 (constantes). Os ângulos de incidência e transmissão são representados por θ_i e θ_t , e temos agora novamente dois ângulos auxiliares α_i e α_t . Assim, o comprimento óptico de A até B fica

$$L_o = n_1 \int_A^C ds + n_2 \int_C^B ds = n_1 d_{AC} + n_2 d_{CB}$$

Novamente, no primeiro trajeto temos

$$d_{AC} = \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}$$

e, no segundo, ficamos com

$$d_{CB} = \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2}$$

e assim, achamos

$$L_o = n_1 \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2} \quad (23.34)$$

Fazendo a derivada com relação a z e lembrando que ela deve ser nula, temos

$$\frac{\partial L_o}{\partial z} = n_1 \frac{z}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}} + n_2 \frac{z}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2}} = 0$$

ou

$$z \left[\frac{n_1}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2 + z^2}} + \frac{n_2}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2 + z^2}} \right] = 0$$

Novamente, o termo entre colchetes nunca se anula, de modo que devemos ter $z = 0$, e os raios incidente, transmitido (ou refratado) e a normal à interface pertencem todos a um mesmo plano, assim como os vetores $\vec{k}_i$ e $\vec{k}_t$. Substituindo o valor de z em 23.34, obtemos

$$L_o = n_1 \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

e a derivada em relação a x fica

$$\frac{\partial L_o}{\partial x} = n_1 \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} - n_2 \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}} = 0$$

de modo que

$$n_1 \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} = n_2 \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Agora, observando a figura 23.4, e lembrando que $z = 0$, vemos que

$$\cos \alpha_i = \frac{x - x_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}} \quad \cos \alpha_t = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

ou seja,

$$n_1 \cos \alpha_i = n_2 \cos \alpha_t$$

Como $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \cos \alpha &= \sin \theta \end{aligned}$$

e então,

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

que é a lei de Snell dada pela expressão 23.31, obtida anteriormente. A demonstração de que o caminho seguido acima é um mínimo de L_o envolve o cálculo das derivadas segundas, e ela fica como exercício (veja o exercício 23.1).

23.2.1 Campo Elétrico Paralelo ao Plano de Incidência

O primeiro caso importante que vamos estudar consiste naquele em que a onda tem o campo elétrico polarizado num plano paralelo ao plano de incidência. A figura 23.5 ilustra essa situação. Da figura, vemos que os campos elétricos pertencem ao plano xz enquanto o campo magnético orienta-se na direção y . Tendo isso em mente, vamos começar a aplicar as condições de contorno 23.3, lembrando que os fatores exponenciais que aparecem nos campos se cancelam, conforme a discussão anterior. Da equação 23.3a, temos

$$\epsilon_1(\vec{\mathcal{E}}_{0_i} + \vec{\mathcal{E}}_{0_r}) \cdot \hat{\mathbf{k}} = \epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}_{0_t} \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\epsilon_1(-\mathcal{E}_{0_i} \sin \theta_i + \mathcal{E}_{0_r} \sin \theta_r) = -\epsilon_2 \mathcal{E}_{0_t} \sin \theta_t$$

e, usando as leis 23.30 e 23.31, obtemos

$$\epsilon_1(-\mathcal{E}_{0_i} \sin \theta_i + \mathcal{E}_{0_r} \sin \theta_i) = -\epsilon_2 \mathcal{E}_{0_t} \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

e então,

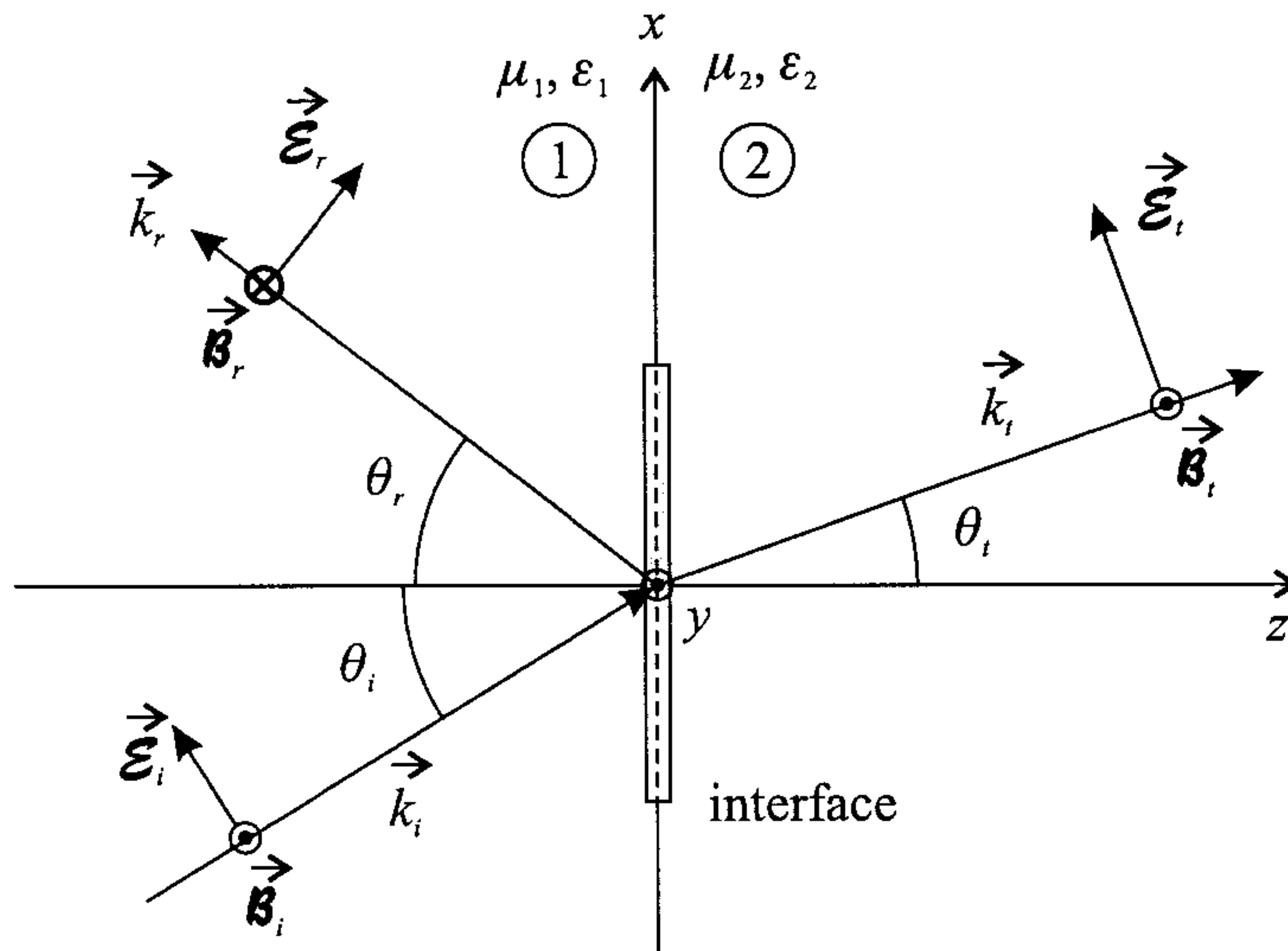


Figura 23.5: Vetores de onda para incidência oblíqua na interface entre dois dielétricos.

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0r} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{n_1}{n_2} \mathcal{E}_{0t}$$

ou ainda, como $v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$, ou $\epsilon = \frac{1}{v^2\mu}$,

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0r} = \frac{\frac{1}{v_2^2\mu_2}}{\frac{1}{v_1^2\mu_1}} \frac{n_1}{n_2} \mathcal{E}_{0t}$$

e então, lembrando que $n = \frac{c}{v}$,

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0r} = \frac{v_1^2\mu_1}{v_2^2\mu_2} \frac{\frac{c}{v_1}}{\frac{c}{v_2}} \mathcal{E}_{0t}$$

ou

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0r} = \frac{v_1\mu_1}{v_2\mu_2} \mathcal{E}_{0t}$$

A equação 23.8 define

$$\alpha = \frac{v_1 \mu_1}{v_2 \mu_2} = \frac{c v_1 \mu_1}{c v_2 \mu_2} = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2}$$

Então,

$$\mathcal{E}_{0_i} - \mathcal{E}_{0_r} = \alpha \mathcal{E}_{0_t} \quad (23.35)$$

que é a primeira equação necessária. A condição de contorno 23.3b não nos ajuda, porque $\vec{\mathcal{B}}$ não tem componente em z . A próxima condição é dada pela expressão 23.3c, que fica

$$(\vec{\mathcal{E}}_{0_i} + \vec{\mathcal{E}}_{0_r}) \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}}) = \vec{\mathcal{E}}_{0_t} \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}})$$

ou

$$\mathcal{E}_{0_i} \cos \theta_i + \mathcal{E}_{0_r} \cos \theta_r = \mathcal{E}_{0_t} \cos \theta_t$$

ou ainda, como $\theta_i = \theta_r$,

$$\mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r} = \mathcal{E}_{0_t} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

Definindo

$$\beta = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad (23.36)$$

achamos

$$\mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r} = \beta \mathcal{E}_{0_t} \quad (23.37)$$

que, juntamente com a equação 23.35, formam o sistema de equações

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{0_i} - \mathcal{E}_{0_r} = \alpha \mathcal{E}_{0_t} \\ \mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r} = \beta \mathcal{E}_{0_t} \end{cases}$$

cuja solução é

$$\mathcal{E}_{0_r} = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \mathcal{E}_{0_i} \quad (23.38)$$

e

$$\mathcal{E}_{0t} = \frac{2}{\beta + \alpha} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.39)$$

Essas equações são conhecidas como equações de Fresnel para a polarização de $\vec{\mathcal{E}}$ no plano de incidência. A onda transmitida está sempre em fase com a onda incidente, mas quando $\beta < \alpha$ a onda refletida tem uma defasagem de 180° em relação à onda incidente. Note que a quarta condição de contorno, dada pela relação 23.3d, não fornece uma equação adicional, ela apenas reproduz a expressão 23.35. Além disso, as amplitudes das ondas refletida e transmitida dependem do ângulo de incidência, já que, pela expressão 23.36, temos

$$\beta = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{\cos \theta_i}$$

ou, utilizando a lei de Snell 23.31 para reescrever $\sin \theta_t$, achamos

$$\beta = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i} \quad (23.40)$$

Quando $\theta_i = 0$, ou seja, quando temos uma incidência normal, $\beta = 1$, e recuperamos o caso discutido na seção anterior. Quando a onda tem uma incidência rasante, ou seja, $\theta_i \rightarrow 90^\circ$, β diverge e a onda é completamente refletida, fato que ocorre, por exemplo, numa estrada no final da tarde ou à noite, principalmente se estiver molhada.

Analisando a expressão 23.38, vemos que, para determinados valores dos parâmetros α e β o campo refletido $\vec{\mathcal{E}}_r$ pode se anular. Isso acontece quando $\beta = \alpha$, ou seja,

$$\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_B}}{\cos \theta_B} = \alpha$$

ou então,

$$\frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_B}{\cos^2 \theta_B} = \alpha^2$$

ou

$$\frac{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_B}{1 - \sin^2 \theta_B} = \alpha^2$$

que pode ser reescrita como

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_B = \alpha^2 - \alpha^2 \sin^2 \theta_B$$

ou

$$\left[\alpha^2 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \right] \sin^2 \theta_B = \alpha^2 - 1$$

ou ainda,

$$\sin^2 \theta_B = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2} \quad (23.41)$$

O ângulo θ_B definido pela expressão acima é conhecido como *ângulo de Brewster*². Quando uma onda linearmente polarizada incide com um ângulo igual a θ_B , se ela for polarizada de modo que o campo elétrico esteja numa direção paralela relativamente ao plano de incidência, a onda será totalmente transmitida, não havendo onda refletida. Conforme veremos na seção 23.2.2, se a onda tem polarização perpendicular ao plano de incidência, ocorre reflexão em qualquer ângulo, não havendo um ângulo de Brewster para essa situação. Assim, quando uma onda não polarizada incide numa superfície com ângulo θ_B , a onda refletida é polarizada na direção perpendicular à superfície, o que é conhecido como polarização por reflexão. Em particular, quando estamos no limite em que $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$, $\alpha = \frac{n_2}{n_1}$ e o ângulo de Brewster 23.41 fica

$$\sin^2 \theta_B = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}$$

ou

$$\sin^2 \theta_B = \frac{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2}}{\frac{n_1^4 - n_2^4}{n_1^2 n_2^2}}$$

² Descoberto experimentalmente pelo físico escocês Sir David Brewster, em 1811, que também inventou o caleidoscópio.

ou ainda,

$$\operatorname{sen}^2 \theta_B = n_2^2 \frac{n_2^2 - n_1^2}{(n_1^2 - n_2^2)(n_1^2 + n_2^2)}$$

e então,

$$\operatorname{sen}^2 \theta_B = \frac{n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \quad (23.42)$$

Por outro lado, temos também

$$1 - \cos^2 \theta_B = \frac{n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$$

ou

$$\cos^2 \theta_B = 1 - \frac{n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$$

ou ainda,

$$\cos^2 \theta_B = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2} \quad (23.43)$$

de modo que, dividindo 23.42 por 23.43, achamos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \theta_B}{\cos^2 \theta_B} = \frac{\frac{n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}}{\frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}}$$

ou

$$\operatorname{tg}^2 \theta_B = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

e finalmente,

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (23.44)$$

É interessante mostrar que, nesse limite, o ângulo entre o feixe incidente e o transmitido vale 90° . Para ver isso, vamos considerar a lei de Snell 23.31 e

fazer $\theta_i = \theta_B$, ou seja,

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_{t_B}$$

onde θ_{t_B} é o ângulo da onda transmitida correspondente à onda incidente com ângulo de Brewster. Usando a equação 23.44, temos

$$\sin \theta_B = \operatorname{tg} \theta_B \sin \theta_{t_B}$$

ou

$$\sin \theta_B = \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B} \sin \theta_{t_B}$$

de modo que

$$\cos \theta_B = \sin \theta_{t_B} \quad (23.45)$$

Além disso, temos que θ_B é dado por $\beta = \alpha$, ou

$$\frac{\cos \theta_{t_B}}{\cos \theta_B} = \frac{n_2}{n_1}$$

ou então,

$$\cos \theta_{t_B} = \operatorname{tg} \theta_B \cos \theta_B$$

de modo que

$$\cos \theta_{t_B} = \sin \theta_B \quad (23.46)$$

Das relações 23.45 e 23.46, nota-se que os ângulos θ_B e θ_{t_B} são complementares, ou seja, $\theta_B + \theta_{t_B} = \frac{\pi}{2}$. Para uma onda passando do ar ($n_1 \approx 1$) para vidro ($n_2 \approx 1,5$), temos $\theta_B \approx 56^\circ$, enquanto do ar para água ($n_2 \approx 1,33$), $\theta_B \approx 53^\circ$.

Uma explicação simples para a polarização por reflexão quando a onda incide na interface com o ângulo de Brewster consiste em considerar que os responsáveis pela onda refletida e transmitida são os elétrons da interface que são submetidos a forças quando os campos interagem com eles. Considerando apenas o campo elétrico, que é o responsável pela transferência de energia entre a onda e o meio, quando ele age sobre os elétrons, estes começam a oscilar, estando então acelerados.

Nessa situação, conforme veremos no capítulo 24, os elétrons emitem radiação. Essa radiação exibe uma dependência angular tal que na direção da aceleração não ocorre emissão. Assim, quando um campo elétrico paralelo ao plano de incidência incide na interface com o ângulo de Brewster, ele atua sobre os elétrons e produz um movimento “diagonal” que é responsável pela onda transmitida. Porém, como $\theta_B + \theta_{t_B} = \frac{\pi}{2}$ e o ângulo da onda refletida também seria θ_B , a onda seria refletida em ângulo reto com a onda transmitida, numa direção que é justamente a direção de vibração dos elétrons. Nessa direção eles não podem emitir radiação, o que faz com que a onda refletida não seja observada. Esse problema não ocorre quando o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência, já que, nesse caso, haverá movimento dos elétrons numa direção perpendicular ao plano de incidência, o que impede apenas emissão nessa direção. Porém, já vimos que as ondas refletida e transmitida estão no plano de incidência, e os elétrons podem emitir em todas as direções pertencentes a esse plano.

Os coeficientes de reflexão e transmissão dados pelas expressões 23.17 e 23.21 e os vetores de Poynting podem ser obtidos das equações 23.14, 23.15 e 23.16, lembrando que agora o vetor de onda não está mais na direção z . Assim, temos

$$\langle \vec{S}_i \rangle = \frac{|\mathcal{E}_{0i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \quad (23.47)$$

para a onda incidente,

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{|\mathcal{E}_{0r}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \quad (23.48)$$

para a onda refletida ³ e

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{|\mathcal{E}_{0t}|^2}{2v_2\mu_2} \hat{k}_r \quad (23.49)$$

para a onda transmitida. Os coeficientes para a onda com polarização paralela (sempre com relação ao campo elétrico) ao plano de incidência ficam, então,

$$R_{\parallel} = \frac{\langle \vec{S}_r \rangle \cdot (-\hat{n})}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{n}}$$

ou

³ Note que, com relação à expressão 23.15, há um sinal negativo a menos na expressão acima. Você é capaz de explicar o porquê?

$$R_{\parallel} = \frac{\frac{|\mathcal{E}_{0r}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \cdot (-\hat{\mathbf{k}})}{\frac{|\mathcal{E}_{0i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}}$$

e então (veja a figura 23.5),

$$R_{\parallel} = \frac{|\mathcal{E}_{0r}|^2 \cos \theta_r}{|\mathcal{E}_{0i}|^2 \cos \theta_i}$$

e, usando a lei de reflexão 23.30 e a equação 23.38, obtemos

$$R_{\parallel} = \left[\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right]^2 \quad (23.50)$$

O coeficiente de transmissão torna-se

$$T_{\parallel} = \frac{\langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{n}}$$

ou

$$T_{\parallel} = \frac{\frac{|\mathcal{E}_{0t}|^2}{2v_2\mu_2} \hat{k}_r \cdot \hat{\mathbf{k}}}{\frac{|\mathcal{E}_{0i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}}$$

ou ainda,

$$T_{\parallel} = \frac{v_1\mu_1}{v_2\mu_2} \frac{|\mathcal{E}_{0t}|^2 \cos \theta_t}{|\mathcal{E}_{0i}|^2 \cos \theta_i}$$

e, usando as expressões 23.8, 23.36 e 23.39, achamos

$$T_{\parallel} = \frac{4\alpha\beta}{(\beta + \alpha)^2} \quad (23.51)$$

Note que, quando $\theta_i = \theta_B$, $\alpha = \beta$ e $R_{\parallel} = 0$ e $T_{\parallel} = 1$. Para qualquer ângulo, $R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$, e a energia que chega na interface é igual à energia que sai dela.

23.2.2 Campo Elétrico Perpendicular ao Plano de Incidência

Nosso objetivo agora é verificar o que ocorre quando o campo elétrico incide numa superfície com uma direção perpendicular ao plano de incidência, conforme mostra a figura 23.6.

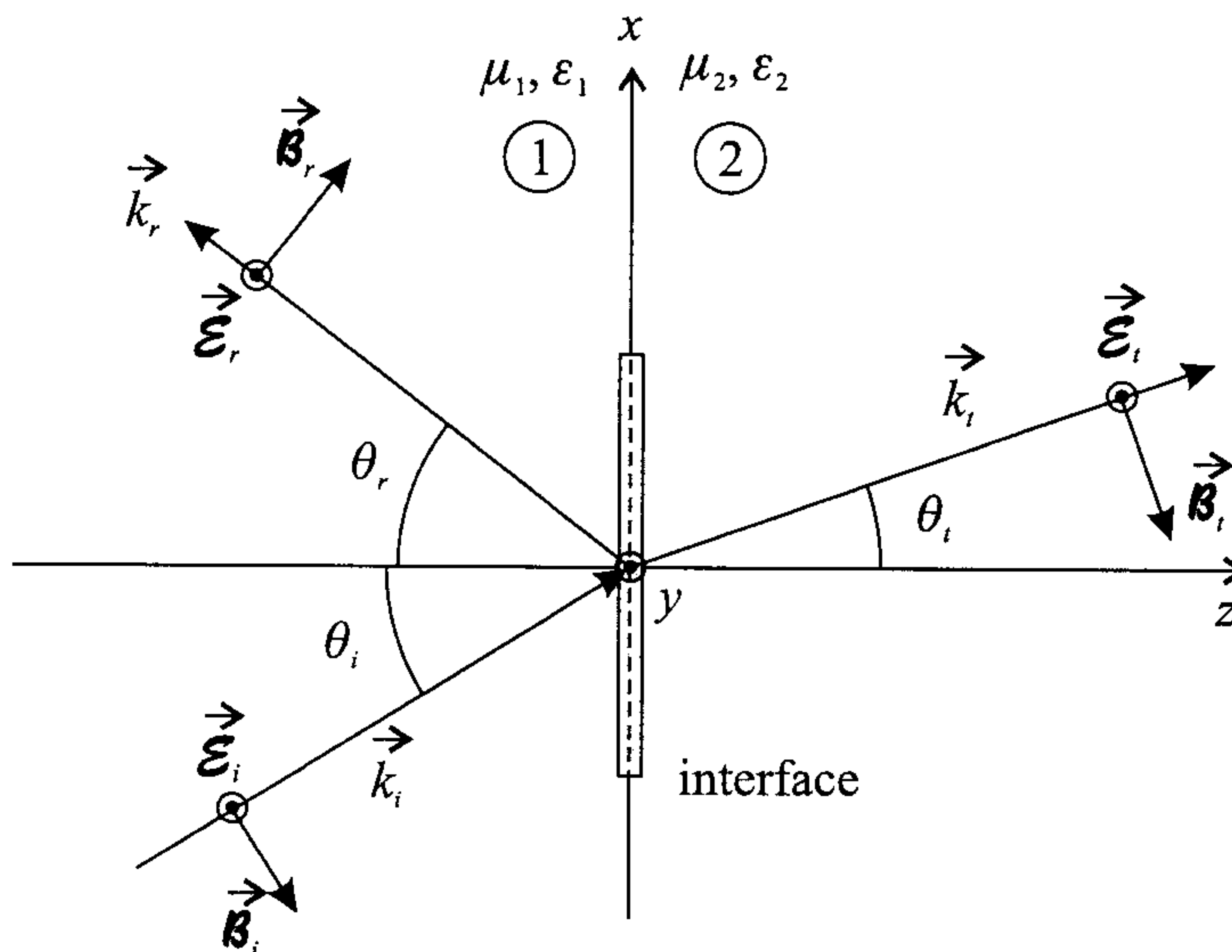


Figura 23.6: Vetores de onda para incidência oblíqua na interface entre dois dielétricos.

Note, na figura, que os campos elétricos estão orientados na direção y , ao passo que os campos magnéticos pertencem ao plano xz . Assim, a primeira condição de contorno, dada pela expressão 23.3a, não nos dá nenhuma informação, já que os campos elétricos não têm nenhuma componente normal à interface. A equação 23.3b fornece

$$(\vec{B}_{0i} + \vec{B}_{0r}) \cdot \hat{k} = \vec{B}_{0t} \cdot \hat{k}$$

ou, usando as expressões 23.25b, 23.26b e 23.27b, temos

$$\left(\frac{\hat{k}_i \times \vec{E}_{0i}}{v_1} + \frac{\hat{k}_r \times \vec{E}_{0r}}{v_1} \right) \cdot \hat{k} = \frac{\hat{k}_t \times \vec{E}_{0t}}{v_2} \cdot \hat{k}$$

ou

$$\frac{1}{v_1} \left[\frac{\vec{k}_i \times \mathcal{E}_{0i} \hat{\mathbf{j}}}{k_i} + \frac{\vec{k}_r \times \mathcal{E}_{0r} \hat{\mathbf{j}}}{k_r} \right] \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{\vec{k}_t \times \mathcal{E}_{0t} \hat{\mathbf{j}}}{k_r v_2} \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

Da figura, temos

$$\vec{k}_i = k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{i}} + k_i \cos \theta_i \hat{\mathbf{k}} \quad (23.52a)$$

$$\vec{k}_r = k_r \sin \theta_r \hat{\mathbf{i}} - k_r \cos \theta_r \hat{\mathbf{k}} \quad (23.52b)$$

$$\vec{k}_t = k_t \sin \theta_t \hat{\mathbf{i}} + k_t \cos \theta_t \hat{\mathbf{k}} \quad (23.52c)$$

Como $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}}$, interessa-nos apenas a componente $\hat{\mathbf{i}}$ dos vetores acima, de modo que achamos, após efetuar o produto escalar,

$$\frac{1}{v_1} \left[\frac{k_i \sin \theta_i \mathcal{E}_{0i}}{k_i} + \frac{k_r \sin \theta_r \mathcal{E}_{0r}}{k_r} \right] = \frac{k_t \sin \theta_t \mathcal{E}_{0t}}{k_r v_2}$$

ou, como $\theta_i = \theta_r$,

$$\mathcal{E}_{0i} + \mathcal{E}_{0r} = \frac{v_1 \sin \theta_t}{v_2 \sin \theta_i} \mathcal{E}_{0t}$$

Lembrando agora a lei de Snell 23.31, temos

$$\mathcal{E}_{0i} + \mathcal{E}_{0r} = \frac{v_1 n_1}{v_2 n_2} \mathcal{E}_{0t}$$

ou, como $n = \frac{c}{v}$, de modo que $nv = c$, temos

$$\mathcal{E}_{0i} + \mathcal{E}_{0r} = \mathcal{E}_{0t} \quad (23.53)$$

que é a primeira equação necessária para obter os campos refletido e transmitido. Ela também pode ser obtida se considerarmos a condição de contorno 23.3c para o campo elétrico. Assim, para obter a segunda equação necessária, vamos considerar a equação 23.3d para o campo magnético, ou seja,

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{\vec{\mathcal{B}}_{0i}}{\mu_1} + \frac{\vec{\mathcal{B}}_{0r}}{\mu_1} \right] = \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\vec{\mathcal{B}}_{0t}}{\mu_2}$$

ou, em termos dos campos elétricos (equações 23.25b, 23.26b e 23.27b), temos

$$\frac{1}{\mu_1} \hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{\hat{k}_i \times \vec{\mathcal{E}}_{0i}}{v_1} + \frac{\hat{k}_r \times \vec{\mathcal{E}}_{0r}}{v_1} \right] = \frac{1}{\mu_2} \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\hat{k}_t \times \vec{\mathcal{E}}_{0t}}{v_2}$$

Observando agora as expressões 23.52 para os vetores de onda, notamos que apenas as suas componentes em z serão importantes, de modo que temos

$$\frac{1}{v_1\mu_1} \hat{\mathbf{k}} \times \left[-\frac{k_i \cos \theta_i \mathcal{E}_{0i} \hat{\mathbf{i}}}{k_i} + \frac{k_r \cos \theta_r \mathcal{E}_{0r} \hat{\mathbf{i}}}{k_r} \right] = \frac{1}{v_2\mu_2} \hat{\mathbf{k}} \times \left[-\frac{k_t \cos \theta_t \mathcal{E}_{0t} \hat{\mathbf{i}}}{k_t} \right]$$

ou

$$\frac{1}{v_1\mu_1} \left[-\cos \theta_i \mathcal{E}_{0i} + \cos \theta_r \mathcal{E}_{0r} \right] \hat{\mathbf{j}} = -\frac{1}{v_2\mu_2} \cos \theta_t \mathcal{E}_{0t} \hat{\mathbf{j}}$$

ou ainda, lembrando que $\theta_i = \theta_r$,

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0r} = \frac{v_1\mu_1 \cos \theta_t}{v_2\mu_2 \cos \theta_i} \mathcal{E}_{0t}$$

Agora, usando as equações 23.8 e 23.36, temos

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0r} = \alpha\beta \mathcal{E}_{0t}$$

a qual, juntamente com a expressão 23.53, forma o sistema de equações

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{0i} + \mathcal{E}_{0r} = \mathcal{E}_{0t} \\ \mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0r} = \alpha\beta \mathcal{E}_{0t} \end{cases}$$

que resulta em

$$\mathcal{E}_{0r} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.54)$$

e

$$\mathcal{E}_{0t} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.55)$$

Os vetores de Poynting são análogos aos expressos pelas equações 23.47, 23.48 e 23.49, de modo que temos, para a onda incidente,

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_i \rangle = \frac{|\mathcal{E}_{0i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \quad (23.56)$$

Para a onda refletida, ficamos com

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{|\mathcal{E}_{0r}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \quad (23.57)$$

e, para a onda transmitida,

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{|\mathcal{E}_{0t}|^2}{2v_2\mu_2} \hat{k}_r \quad (23.58)$$

Os coeficientes para a onda com polarização perpendicular (sempre com relação ao campo elétrico) ao plano de incidência ficam, então,

$$R_{\perp} = \frac{\langle \vec{S}_r \rangle \cdot (-\hat{n})}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{n}}$$

ou

$$R_{\perp} = \frac{\frac{|\mathcal{E}_{0r}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \cdot (-\hat{\mathbf{k}})}{\frac{|\mathcal{E}_{0i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}}$$

e então,

$$R_{\perp} = \frac{|\mathcal{E}_{0r}|^2 \cos \theta_r}{|\mathcal{E}_{0i}|^2 \cos \theta_i}$$

ou ainda, usando a expressão 23.54,

$$R_{\perp} = \left[\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right]^2 \quad (23.59)$$

O coeficiente de transmissão torna-se

$$T_{\perp} = \frac{\langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{n}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{n}}$$

ou

$$T_{\perp} = \frac{\frac{|\mathcal{E}_{0t}|^2}{2v_2\mu_2} \hat{k}_r \cdot \hat{\mathbf{k}}}{\frac{|\mathcal{E}_{0i}|^2}{2v_1\mu_1} \hat{k}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}}$$

ou ainda,

$$T_{\perp} = \frac{v_1 \mu_1 |\mathcal{E}_{0t}|^2 \cos \theta_t}{v_2 \mu_2 |\mathcal{E}_{0i}|^2 \cos \theta_i}$$

e assim, usando as expressões 23.8, 23.36 e 23.55, achamos

$$T_{\perp} = \frac{4\alpha\beta}{(1 + \alpha\beta)^2} \quad (23.60)$$

donde se deduz facilmente que $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$, como deve ser. Além disso, lembrando que no ângulo de Brewster temos $\alpha = \beta$, vemos que em θ_B existe onda refletida e transmitida no caso do campo elétrico ter uma polarização perpendicular ao plano de incidência, ao contrário do que ocorre quando o campo elétrico é paralelo a este plano. Considerando uma interface entre ar ($n = 1$) e água $n = 1,33$ ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$), podemos comparar os coeficientes de reflexão para as polarizações paralela e perpendicular ao plano de incidência. O resultado é apresentado na figura 23.7. Na figura, R_M indica o coeficiente de reflexão médio, ou seja,

$$R_M = \frac{R_{\perp} + R_{\parallel}}{2} \quad (23.61)$$

que é o coeficiente de reflexão de uma onda não polarizada. Note que sempre ocorre $R_{\perp} \geq R_{\parallel}$. A igualdade acontece quando $\theta_i = 0^\circ$ (incidência normal) ou $\theta_i = 90^\circ$ (incidência rasante, toda a luz é refletida, independente da polarização). Assim, toda onda refletida tem sempre um grau de polarização na direção perpendicular ao plano de incidência. Podemos definir esse grau de polarização por meio de

$$\mathbb{P}(\theta_i) = \frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{R_{\perp} + R_{\parallel}} \quad (23.62)$$

Assim, $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(90) = 0$, $\mathbb{P}(\theta_B) = 1$ e $\mathbb{P}(\theta_i) \geq 0$. Note que, como a luz refletida é sempre parcialmente polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência, a luz transmitida é sempre parcialmente polarizada na direção paralela a este plano.

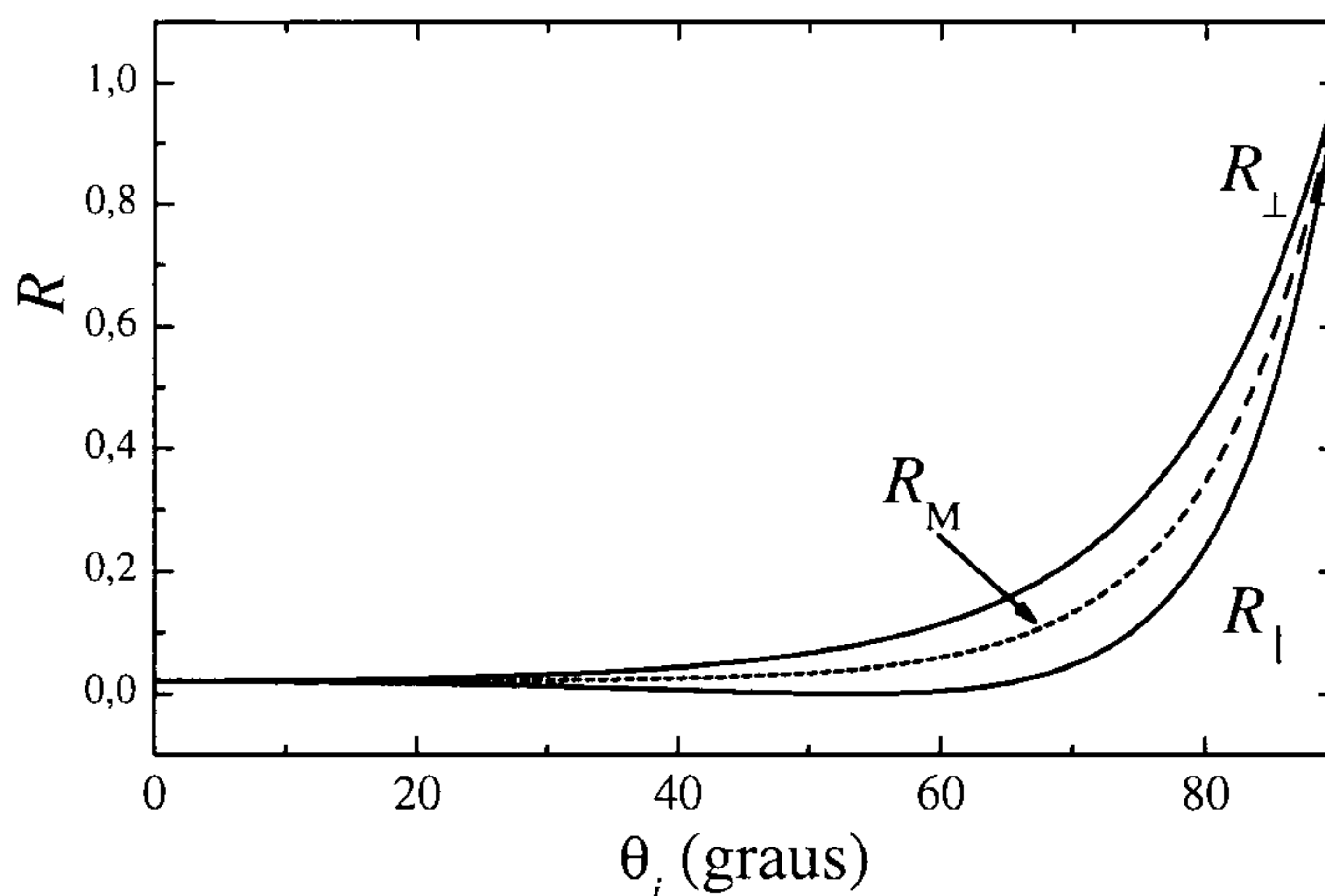


Figura 23.7: Coeficientes de reflexão para uma interface ar-água.

23.2.3 Reflexão Interna Total

Quando uma onda eletromagnética passa de um meio opticamente menos denso para um mais denso, ou seja, quando $n_1 < n_2$, sempre uma parcela da onda é transmitida através da interface, exceto, é claro, quando ocorre incidência rasante ($\theta_i = 0^\circ$). Isso pode ser constatado também se considerarmos que o parâmetro β , dado pela expressão 23.40,

$$\beta = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i}$$

é sempre real, para qualquer ângulo de incidência θ_i , já que $n_1 < n_2$ e o valor máximo de $\sin^2 \theta$ é 1⁴. Por outro lado, quando a onda passa de um meio opticamente mais denso para um menos denso, como da água ou do vidro para o ar, temos $n_1 > n_2$, e nesse caso uma situação fisicamente diferente pode ocorrer. Considerando novamente a expressão 23.40, vemos que, se o ângulo de incidência for próximo de 0° , $\beta \approx 1$. À medida que o ângulo aumenta, o termo dentro da raiz quadrada diminui, chegando eventualmente a zero no ângulo crítico θ_c , quando então $\beta = 0$. Podemos determinar θ_c mediante

⁴ Note que os coeficientes de reflexão e de transmissão, que são grandezas reais, dependem de β e de α , o qual é sempre real (veja a equação 23.8).

$$\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c}}{\cos \theta_c} = 0$$

ou

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c = 0$$

ou ainda,

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

o que fornece, para o ângulo crítico,

$$\theta_c = \arcsen \frac{n_2}{n_1} \quad (23.63)$$

O ângulo que a onda transmitida faz com a direção normal à interface quando $\theta_i = \theta_c$ é dado pela lei de Snell, isto é,

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin \theta_t$$

ou, usando a equação 23.63,

$$\sin \theta_t = 1$$

de modo que $\theta_t = 90^\circ$, e assim, a onda transmitida sai rasante à interface. Se o ângulo de incidência for aumentado ainda mais, β torna-se imaginário, assim como θ_t , e a onda transmitida deixa de existir. Ocorre o fenômeno de *reflexão interna total*, já que existe apenas a onda refletida. Para estudar melhor esse caso, vamos considerar

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}$$

Usando a lei de Snell 23.31, temos

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}$$

e, lembrando o ângulo crítico 23.63,

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_c}}$$

Quando $\theta_i > \theta_c$, $\cos \theta_t$ torna-se um número imaginário puro. Vamos escrever então

$$\cos \theta_t = iH, \quad \theta_i > \theta_c \quad (23.64)$$

onde

$$H = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_c} - 1}, \quad \theta_i > \theta_c \quad (23.65)$$

Agora, vamos lembrar que o campo elétrico para a onda transmitida é dado pela equação 23.27a,

$$\vec{\mathcal{E}}_t(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Usando o sistema de coordenadas da figura 23.5, temos

$$\vec{k}_t = k_t \cos \theta_t \hat{\mathbf{k}} + k_t \sin \theta_t \hat{\mathbf{i}} \quad (23.66)$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{E}}_t(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i(zk_t \cos \theta_t + xk_t \sin \theta_t - \omega t)} \quad (23.67)$$

Lembrando que, pela lei de Snell,

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

e utilizando a equação 23.63 para o ângulo crítico, temos

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} = M \quad (23.68)$$

onde M é um número real, maior do que um. Voltando agora à equação 23.67 e usando 23.64, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}_t(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i(izHk_t + xMk_t - \omega t)}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_t(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{-zHk_t} e^{i(xMk_t - \omega t)} \quad (23.69)$$

ou seja, a onda propaga-se paralelamente à interface e é atenuada na direção z , ao entrar no meio ②. A velocidade (de fase) da onda ao se propagar pela interface é obtida comparando-se a expressão acima com a equação 22.8, de modo que, por meio de 22.7, temos

$$\omega = vMk_t$$

ou

$$v = \frac{\omega}{Mk_t} = \frac{\omega \sin \theta_c}{k_t \sin \theta_i} = \frac{1}{v_2} \frac{n_2}{n_1 \sin \theta_i} = \frac{c}{n_1 \sin \theta_i}, \quad \theta_i > \theta_c$$

ou seja, a velocidade da onda na interface depende do ângulo de incidência. Considerando o caso em que o campo elétrico é paralelo ao plano de incidência ⁵, a amplitude do campo elétrico refletido pode ser determinada a partir da expressão 23.38,

$$\mathcal{E}_{0r} = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \mathcal{E}_{0i}$$

lembrando que, nesse caso, β , dado por 23.36, torna-se

$$\beta = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{iH}{\cos \theta_i}$$

onde usamos a expressão 23.64 para o ângulo de refração. Além disso, α , definido pela equação 23.8, fica

$$\alpha = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \theta_c$$

sendo que usamos a definição 23.63 para o ângulo crítico. Então, temos

$$\mathcal{E}_{0r} = \frac{\frac{iH}{\cos \theta_i} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \theta_c}{\frac{iH}{\cos \theta_i} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \theta_c} \mathcal{E}_{0i} = -\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \theta_c - \frac{iH}{\cos \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \theta_c + \frac{iH}{\cos \theta_i}} \mathcal{E}_{0i}$$

⁵ O caso em que o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência é visto no exercício 23.4.

ou, multiplicado pelo complexo conjugado do denominador,

$$\mathcal{E}_{0r} = -\frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \theta_c - \frac{iH}{\cos \theta_i}\right)^2}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c + \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}} \mathcal{E}_{0i}$$

ou ainda,

$$\mathcal{E}_{0r} = -\frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c - 2iH \operatorname{tg} \theta_c \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c + \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.70)$$

Agora, interessa-nos a amplitude real, de modo que vamos multiplicar a expressão acima pelo complexo conjugado, ou seja,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{0r}|^2 = & \left[-\frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c - 2iH \operatorname{tg} \theta_c \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c + \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}} \mathcal{E}_{0i} \right] \\ & \times \left[-\frac{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c + 2iH \operatorname{tg} \theta_c \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c + \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}} \mathcal{E}_{0i}^* \right] \end{aligned}$$

ou ainda,

$$|\mathcal{E}_{0r}|^2 = \frac{\left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c - \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}\right]^2 + 4H^2 \operatorname{tg}^2 \theta_c \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c + \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}\right]^2} |\mathcal{E}_{0i}|^2$$

e então,

$$|\mathcal{E}_{0r}|^2 = \frac{\left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c + \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}\right]^2}{\left[\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c + \frac{H^2}{\cos^2 \theta_i}\right]^2} |\mathcal{E}_{0i}|^2$$

de modo que

$$|\mathcal{E}_{0r}|^2 = |\mathcal{E}_{0i}|^2$$

e a amplitude do campo refletido é igual à amplitude do campo incidente, donde a denominação reflexão total. É interessante notar que, pela solução 23.69 para o campo elétrico,

$$\vec{\mathcal{E}}_t(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{-zHk_t} e^{i(xMk_t - \omega t)}$$

deveria haver uma onda atenuada no meio ②, por causa do fator e^{-zHk_t} . Vamos calcular o fluxo médio de energia transportada através da interface por meio do vetor de Poynting médio dado pela expressão 22.53, ou seja,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re [\vec{\mathcal{E}}_0 \times \vec{\mathcal{H}}_0^*] = \frac{1}{2} \Re [\vec{\mathcal{E}}_0^* \times \vec{\mathcal{H}}_0]$$

Assim, para a onda transmitida, temos

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\vec{\mathcal{E}}_{0_t} \times \frac{\vec{B}_{0_t}^*}{\mu_2} \right]$$

ou, lembrando a restrição 22.25,

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_2 k_t v_2} \Re [\vec{\mathcal{E}}_{0_t} \times \vec{k}_t^* \times \vec{\mathcal{E}}_{0_t}^*]$$

ou ainda, usando 1.19a,

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_2 k_t v_2} \Re [(\vec{\mathcal{E}}_{0_t} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{0_t}^*) \vec{k}_t^* - (\vec{\mathcal{E}}_{0_t} \cdot \vec{k}_t^*) \vec{\mathcal{E}}_{0_t}^*]$$

Considerando que a onda é transversal,

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_2 k_t v_2} \Re [|\vec{\mathcal{E}}_{0_t}|^2 \vec{k}_t^*]$$

Agora, devemos lembrar que o vetor de onda $\vec{k}_t$ da onda transmitida é dado pela expressão 23.66,

$$\vec{k}_t = k_t \cos \theta_t \hat{\mathbf{k}} + k_t \sin \theta_t \hat{\mathbf{i}}$$

e que, por 23.64 e 23.68, temos

$$\cos \theta_t = iH, \quad \theta_i > \theta_c$$

e

$$M = \sin \theta_t$$

de modo que $\cos \theta_t$ é um número imaginário puro, mas $\sin \theta_t$ é real. Então,

$$\vec{k}_t^* = -iHk_t \hat{\mathbf{k}} + Mk_t \hat{\mathbf{i}}$$

e o fluxo médio de energia através da interface é dado por

$$\langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{n} = \frac{1}{2\mu_2 k_t v_2} \Re[|\vec{\mathcal{E}}_{0t}|^2 (-iHk_t \hat{\mathbf{k}} + Mk_t \hat{\mathbf{i}})] \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\langle \vec{S}_t \rangle \cdot \hat{n} = \frac{1}{2\mu_2 k_t v_2} |\vec{\mathcal{E}}_{0t}|^2 Mk_t \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Assim, não há transferência de energia através da interface, ainda que a onda penetre nela e seja atenuada. A explicação para esse aparente paradoxo consiste em considerar que, assim que a onda incide na interface, ela penetra no material e gera campos transientes, ocorrendo então uma pequena transferência de energia entre a onda e o meio ②. Mas, uma vez que a situação de equilíbrio entre esses campos e os da onda incidente seja alcançada, não ocorre mais fluxo de energia de um meio para o outro, em acordo com os resultados descritos acima. Note que esses resultados são para meios que podem ser considerados infinitos, como os que estamos tratando. Quando os meios são finitos, então há uma pequena transferência de energia para o meio ②. Essa transferência pode ser demonstrada de um modo bastante interessante. Considere dois prismas colocados como mostra a figura 23.8.

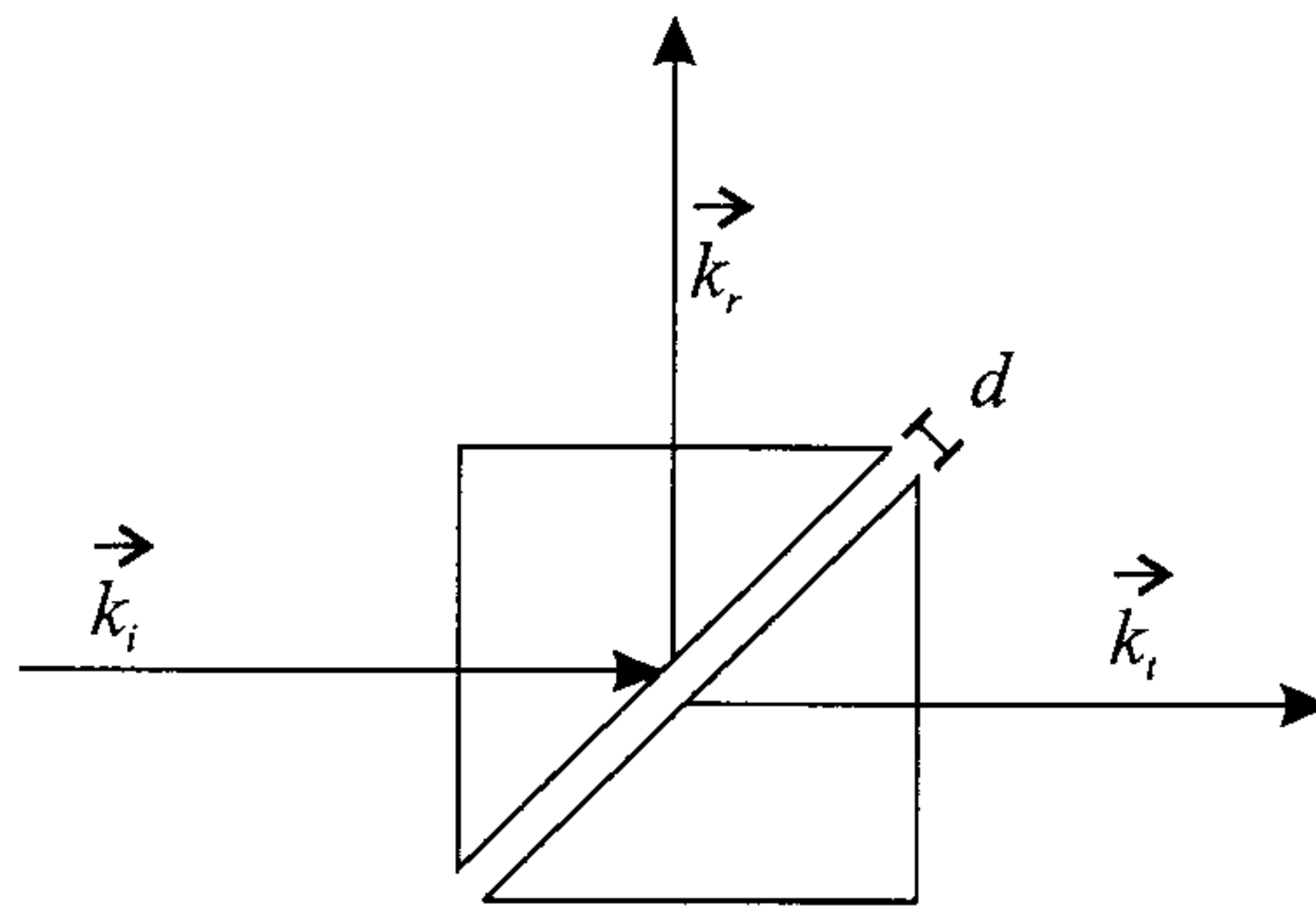


Figura 23.8: Demonstração da reflexão interna total frustrada.

Quando o ângulo de incidência θ_i é maior ou igual ao ângulo crítico θ_c e a distância d entre os prismas é maior que o comprimento de onda da onda

incidente, ocorre reflexão interna total. Porém, se $d \leq \lambda$, a onda transmitida ao meio entre os prismas é atenuada, mas uma pequena parcela dela atinge o segundo prisma, produzindo uma onda nesse meio. Ocorre a *reflexão interna total frustrada*, um análogo do *efeito túnel* que ocorre em Mecânica Quântica quando uma partícula atravessa uma barreira de potencial que seria classicamente intransponível pois a sua energia cinética deveria se tornar negativa para que a energia mecânica da partícula se mantenha constante.

Outro efeito interessante relacionado à reflexão interna total é conhecido como *efeito Goos-Hänchen*. Como a onda refletida penetra no material por uma distância pequena mais finita, a onda refletida apresenta um desvio lateral em relação à onda incidente, como se ela fosse refletida, na verdade, por um plano situado dentro do meio ② a uma distância igual à profundidade de penetração ζ , conforme ilustra a figura 23.9.

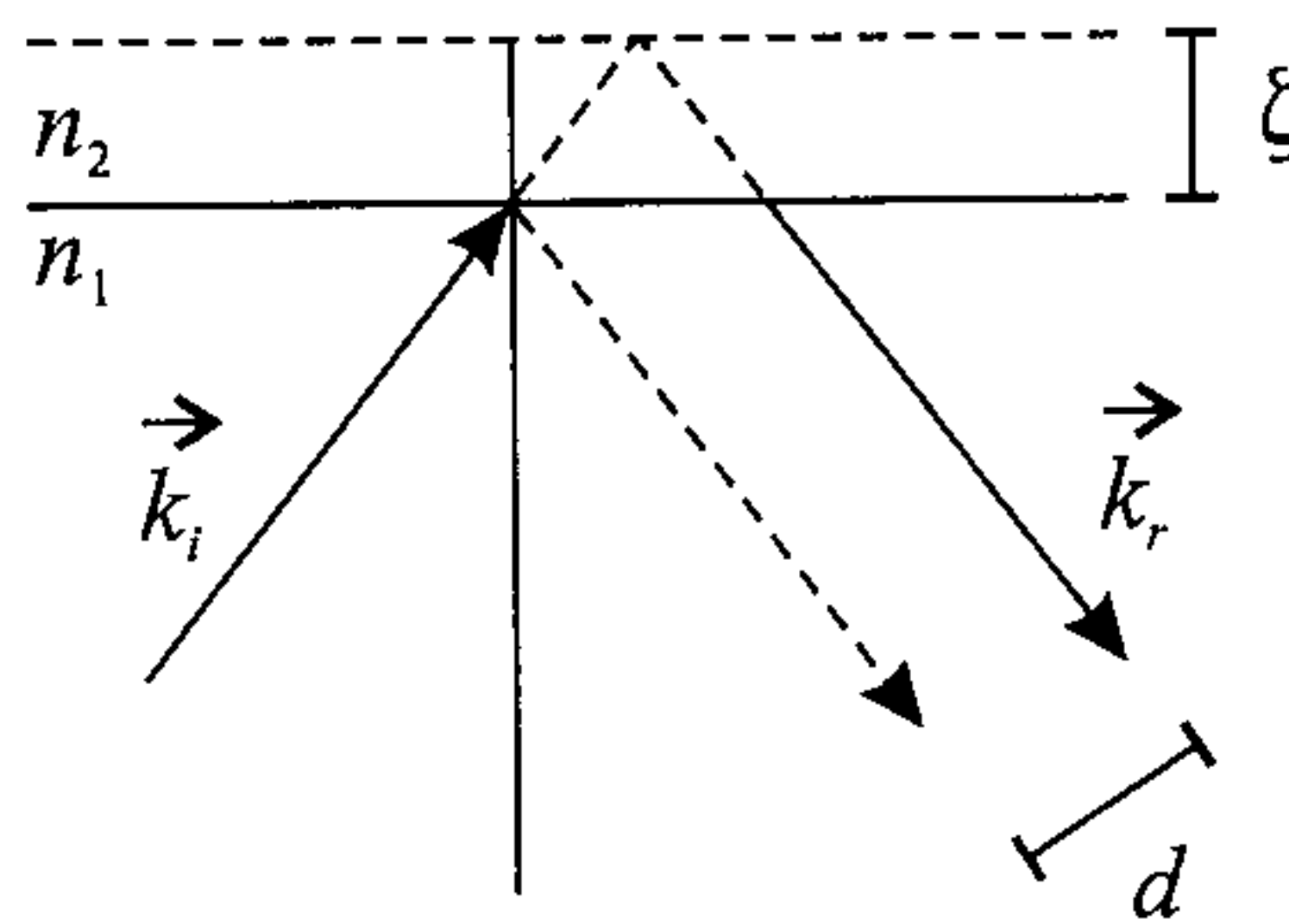


Figura 23.9: Ilustração do efeito Goos-Hänchen.

Um cálculo aproximado para o desvio Goos-Hänchen d resulta em $d \approx 2\zeta \sin \theta_i$. Entretanto, quando as polarizações são levadas em conta, esse resultado se modifica, resultando, em primeira aproximação, nas seguintes expressões:

$$d_{\perp} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}} \quad (23.71)$$

para a polarização onde o campo elétrico está paralelo ao plano de incidência e

$$d_{\parallel} = \frac{d_{\perp} \sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta_i - \cos^2 \theta_i \sin^2 \theta_c} \quad (23.72)$$

para a outra polarização. λ é o comprimento de onda no meio que tem o maior índice de refração.

Ainda tratando da reflexão interna total, é importante notar que, consi-

derando a equação 23.70, há uma diferença de fase entre o campo incidente e o campo refletido, e essa diferença depende do estado de polarização da onda incidente. Como consequência, é possível alterar o estado de polarização de uma onda incidindo num material mediante o uso apropriado de reflexões totais. O prisma de Fresnel é um sistema óptico que se baseia nesse princípio. Quando uma onda não-polarizada incide nele, ou seja, quando uma onda na qual a componente de polarização paralela ao plano de incidência tem mesma intensidade que a componente de polarização perpendicular a ele, ocorrem duas reflexões totais girando as polarizações de 45° em sentidos opostos, de modo que a onda transmitida sai com uma polarização circular. Outras aplicações da reflexão total incluem as fibras ópticas, usadas em telecomunicações para envio de sinais sem perdas apreciáveis, e os conectores ópticos entre cintiladores (excitados pela passagem de partículas carregadas) e fotomultiplicadoras (que convertem a luz em sinais elétricos para posterior interpretação). Vejamos agora o comportamento das ondas quando um dos meios é um bom condutor, e não um dielétrico, como nos casos anteriores.

23.3 Reflexão e Refração numa Interface entre um Dielétrico e um Condutor

Quando uma onda incide numa interface entre dois meios dielétricos, uma parte dela é refletida e outra é transmitida, ocorrendo alterações na amplitude e velocidade das ondas, com a manutenção do mesmo caráter oscilante ⁶. No entanto, conforme vimos na seção 22.4, ondas propagando-se em materiais bons condutores são sempre amortecidas, de modo que a elas estão associados vetores de onda e índices de refração complexos. Sendo assim, quando uma onda incide de um meio ① dielétrico num meio ② condutor, podemos esperar que grande parte da onda seja refletida de volta para o meio ① e apenas uma pequena parte dela se propague de forma amortecida em ②. Nosso objetivo agora é justamente verificar quantitativamente essas previsões, iniciando com o caso de incidência normal.

⁶ Exceto quando ocorre reflexão total, quando então a onda transmitida é amortecida.

23.3.1 Incidência Normal

Quando temos uma incidência normal de um meio dielétrico para um condutor, a onda incidente pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{E}}_i(z, t) = \mathcal{E}_{0_i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \quad (23.73a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_i(z, t) = \frac{\mathcal{E}_{0_i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (23.73b)$$

enquanto a onda refletida torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}_r(z, t) = \mathcal{E}_{0_r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \quad (23.74a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_r(z, t) = -\frac{\mathcal{E}_{0_r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (23.74b)$$

A onda transmitida, lembrando que ela é amortecida, de modo que está ligada a um vetor de onda complexo $k_2 = k_2 + i\kappa_2$, pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{E}}_t(z, t) = \mathcal{E}_{0_t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \quad (23.75a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t(z, t) = \frac{k_2 \mathcal{E}_{0_t}}{\omega} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (23.75b)$$

onde usamos também a equação 22.24,

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k}{\omega} \hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}$$

lembrando que a onda é transversal. Devemos agora considerar as condições de contorno dadas pelas expressões 23.2. Como os campos elétricos não têm componentes normais à interface, pela expressão 23.2a temos que $\sigma = 0$, ou seja, não há carga livre na interface. Como os campos magnéticos também não têm componentes normais à interface, a equação 23.2b não fornece nenhum dado adicional. Da equação 23.2c, temos

$$(\mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r}) \hat{\mathbf{i}} \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}}) = \mathcal{E}_{0_t} \hat{\mathbf{i}} \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}})$$

ou,

$$\mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r} = \mathcal{E}_{0_t} \quad (23.76)$$

que é a primeira equação que utilizaremos. A segunda vem da condição de contorno 23.2d, considerando $\vec{J}_\ell = 0$ na interface,

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{k_2 \mathcal{E}_{0t}}{\omega \mu_2} - \left(\frac{\mathcal{E}_{0i}}{v_1 \mu_1} - \frac{\mathcal{E}_{0t}}{v_1 \mu_1} \right) \right] \hat{\mathbf{j}} = 0$$

ou

$$\frac{1}{v_1 \mu_1} (\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0t}) = \frac{k_2 \mathcal{E}_{0t}}{\omega \mu_2}$$

ou ainda,

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0t} = \frac{k_2 v_1 \mu_1}{\omega \mu_2} \mathcal{E}_{0t}$$

Agora, pela equação 22.77,

$$k = n \frac{\omega}{c}$$

podemos associar a k_2 um índice de refração complexo, ou seja,

$$n_2 = \frac{k_2 c}{\omega}$$

de modo que

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0t} = \frac{n_2 v_1 \mu_1}{c \mu_2} \mathcal{E}_{0t}$$

ou

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0t} = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2} \mathcal{E}_{0t}$$

Observando agora a equação 23.8,

$$\alpha = \frac{v_1 \mu_1}{v_2 \mu_2} = \frac{c v_1 \mu_1}{c v_2 \mu_2} = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2}$$

vemos que, se considerarmos α como sendo complexo, podemos reescrever a equação para os campos como sendo

$$\mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0t} = \alpha \mathcal{E}_{0t}$$

de modo que temos o sistema de equações

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{0i} + \mathcal{E}_{0r} = \mathcal{E}_{0t} \\ \mathcal{E}_{0i} - \mathcal{E}_{0r} = \alpha \mathcal{E}_{0t} \end{cases}$$

cujas soluções são

$$\mathcal{E}_{0r} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.77)$$

e

$$\mathcal{E}_{0t} = \frac{2}{1 + \alpha} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.78)$$

que são formalmente idênticas às expressões 23.77 e 23.78, que foram obtidas para o caso de uma interface entre dois meios dielétricos, lembrando que agora α é complexo, sendo dado por

$$\alpha = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2}$$

Como $k_2 = k_2 + i\kappa_2$ e, pela equação 22.78, a qual é válida para bons condutores,

$$k = \kappa = \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2}}$$

temos, para o índice de refração,

$$n_2 = (1 + i) \frac{k_2 c}{\omega} = c(1 + i) \sqrt{\frac{\mu_2}{2\omega}}$$

Note que, considerando valores usuais de condutividade para bons condutores (veja, por exemplo, a tabela 12.1), temos $\mu_2 \approx 1$, de modo que, como $c = 3 \times 10^8$ m/s, se considerarmos frequências de onda até a faixa do visível ($\nu \approx 10^{14}$ Hz), o índice de refração n_2 será grande quando comparado com a unidade. Para simplificar a análise, vamos considerar que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, ou seja, nenhum dos meios é magnético, de modo que temos

$$\alpha = \frac{n_2}{n_1}$$

Nesse caso, as expressões 23.77 e 23.78 ficam

$$\mathcal{E}_{0r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.79)$$

e

$$\mathcal{E}_{0t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathcal{E}_{0i} \quad (23.80)$$

e então, como $n_2 \gg 1$, a maior parte da onda incidente será refletida (com uma certa defasagem em relação à onda incidente), e uma parte muito pequena será absorvida ou transmitida. Os coeficientes de reflexão e transmissão ficam como exercício (veja o exercício 23.5). Considerando que $R \approx 1$ nesse caso, temos no meio ① duas ondas para o campo elétrico, dadas por

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_i(z, t) &= \mathcal{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathcal{E}}_r(z, t) &\approx -\mathcal{E}_{0i} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

de modo que o campo total é dado por

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_i(z, t) + \vec{\mathcal{E}}_r(z, t)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) \approx \mathcal{E}_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}} - \mathcal{E}_{0i} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{i}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) \approx \mathcal{E}_{0i} e^{-i\omega t} (e^{ik_1 z} - e^{-ik_1 z}) \hat{\mathbf{i}}$$

que pode ser reescrita se lembrarmos a definição do seno em termos das exponenciais complexas, de modo que

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) \approx 2i\mathcal{E}_{0i} e^{-i\omega t} \sin k_1 z \hat{\mathbf{i}}$$

ou, considerando agora a parte real, para obter o campo real, achamos

$$\mathcal{E}(z, t) \approx 2\mathcal{E}_{0i} \sin \omega t \sin k_1 z \hat{\mathbf{i}} \quad (23.81)$$

Note que essa onda é, na verdade, uma onda estacionária, não uma onda que se propaga pelo espaço indefinidamente. Os mínimos, ou nodos, da onda são obtidos quando

$$\text{sen } k_1 z_n = 0$$

ou

$$k_1 z_n = l\pi$$

onde l é um número inteiro. Como

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

ou

$$k_1 = \frac{n_1 \omega}{c}$$

ou ainda,

$$k_1 = \frac{2\pi n_1}{\lambda}$$

onde λ é o comprimento de onda no vácuo, temos

$$\frac{2\pi n_1}{\lambda} z_n = l\pi$$

ou

$$z_n = l \frac{\lambda}{2n_1} \quad (23.82)$$

ou seja, os nodos são separados por uma distância dada por $\frac{\lambda}{2n_1}$. Os nodos e a onda estacionária obtida acima podem ser detectados experimentalmente mediante o uso de chapas fotográficas. Uma dessas experiências foi proposta por Wiener e será descrita a seguir.

Nos nodos da onda eletromagnética estacionária que surge quando ocorre reflexão por uma interface entre um material condutor e um isolante, a intensidade do campo elétrico é nula. Como o campo elétrico é muito mais intenso do que o campo magnético num dielétrico, nas regiões dos nodos de $\vec{\mathcal{E}}$ a interação da onda com a matéria é mínima, e ela é dada apenas pela parte magnética da onda. Para verificar isso, vamos considerar uma experiência realizada por Otto Wiener em 1889. Ele usou como radiação incidente a linha

D do sódio, de comprimento de onda bem definido e dado por $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ (ou 589 nm). A radiação foi utilizada numa incidência normal sobre uma superfície altamente refletora, como mostra a figura 23.10.

Para detectar o campo elétrico, um filme fotográfico muito fino e transparente, de espessura da ordem de $\frac{\lambda}{30}$, foi colocado de forma inclinada, conforme mostra a figura 23.10. O ângulo de inclinação θ_W é muito pequeno, sendo de $4'$ na experiência realizada por Wiener.

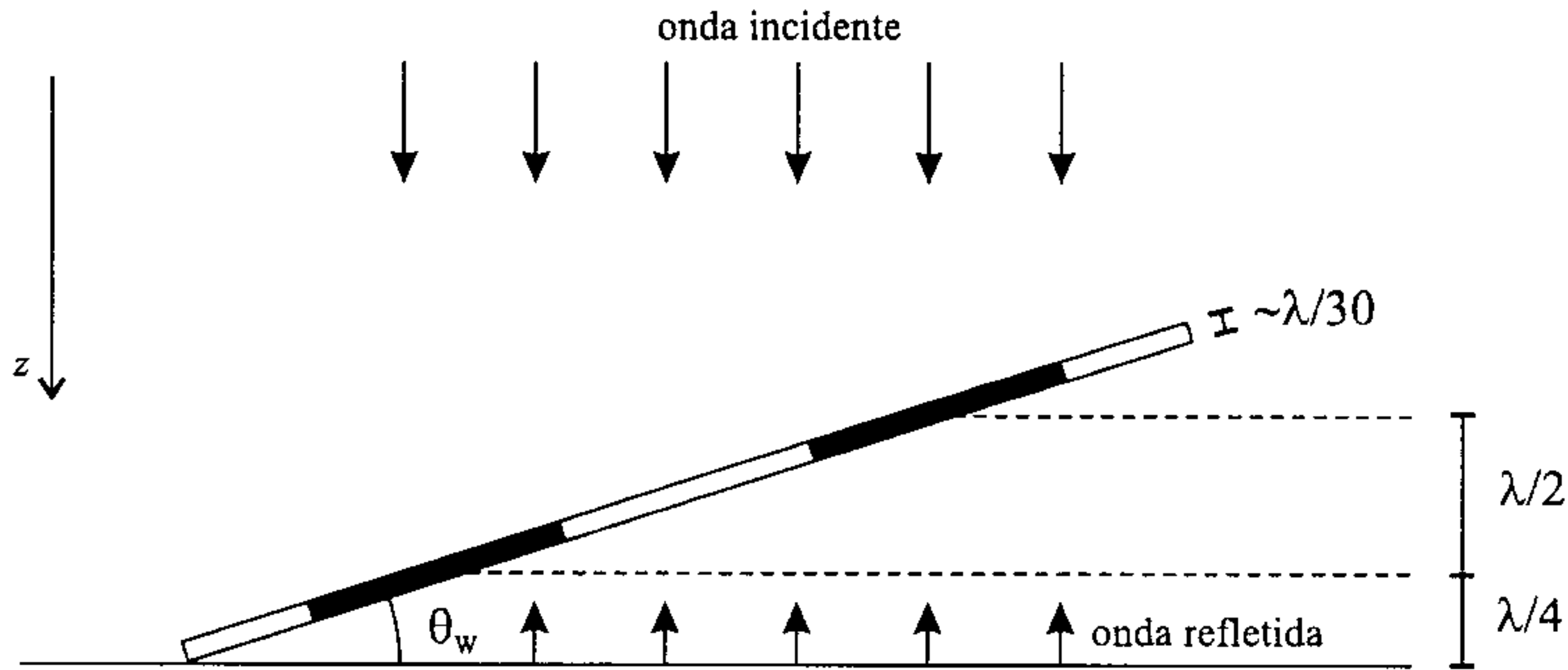


Figura 23.10: Montagem da experiência de Wiener.

Após a realização da experiência, o que se observa é que ocorrem regiões claras e escuras no filme fotográfico, separadas por uma distância aproximadamente constante. Nas regiões claras praticamente não houve interação da onda com o filme, ao passo que, nas escuras, um máximo de interação ocorre. Conforme mostra a figura, a primeira região clara ocorre na interface e a segunda a uma distância $\frac{\lambda}{2}$ acima da interface. Recordando a expressão 23.82,

$$z_n = l \frac{\lambda}{2n_1}$$

vemos que as posições claras são justamente os nodos do campo elétrico da onda estacionária que se forma. Além disso, a primeira região escura ocorre a uma distância $\frac{\lambda}{4}$ acima da superfície, e essa posição é um máximo do campo elétrico, como pode ser visto se considerarmos a expressão 23.81,

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) \approx 2\mathcal{E}_{0_i} \sin \omega t \sin k_1 z \hat{\mathbf{i}}$$

e notarmos que, para termos um máximo, é preciso que

$$\text{sen } k_1 z_{\text{max}} = 1$$

ou

$$k_1 z_{\text{max}} = \frac{(2l + 1)\pi}{2}$$

ou ainda,

$$\frac{2\pi n_1}{\lambda} z_{\text{max}} = \frac{(2l + 1)\pi}{2}$$

de modo que

$$z_{\text{max}} = \frac{2l + 1}{4} \frac{\lambda}{n_1}$$

e o primeiro máximo ocorre em $\frac{\lambda}{4}$, considerando que $n_1 = 1$ (ar). Portanto, o responsável pela interação da onda com o filme fotográfico é o campo elétrico, que algumas vezes também é chamado de vetor de luz, pelo fato de a interação estar relacionada com a luz. Os nodos de $\vec{\mathcal{E}}$ correspondem aos máximos de $\vec{\mathcal{B}}$, e vice-versa, mas, como a intensidade de $\vec{\mathcal{B}}$ é muito menor do que a de $\vec{\mathcal{E}}$, apenas $\vec{\mathcal{E}}$ interage apreciavelmente com a matéria. Essa experiência ajudou a mostrar que a luz era também uma onda eletromagnética, e ela foi realizada logo após as experiências de Hertz. Vejamos agora o que ocorre numa incidência oblíqua.

23.3.2 Incidência Oblíqua

Quando temos uma incidência oblíqua, como a apresentada na figura 23.11, o feixe refratado ou transmitido ainda está sujeito a uma lei de Snell, só que, como já vimos no caso anterior, o índice de refração do meio condutor (meio ②) é uma grandeza complexa, assim como o vetor de onda $\vec{k}_2$. O campo elétrico transmitido pode ser escrito como

$$\vec{\mathcal{E}}_t(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0_t} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

onde

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_2 + i\vec{\kappa}_2$$

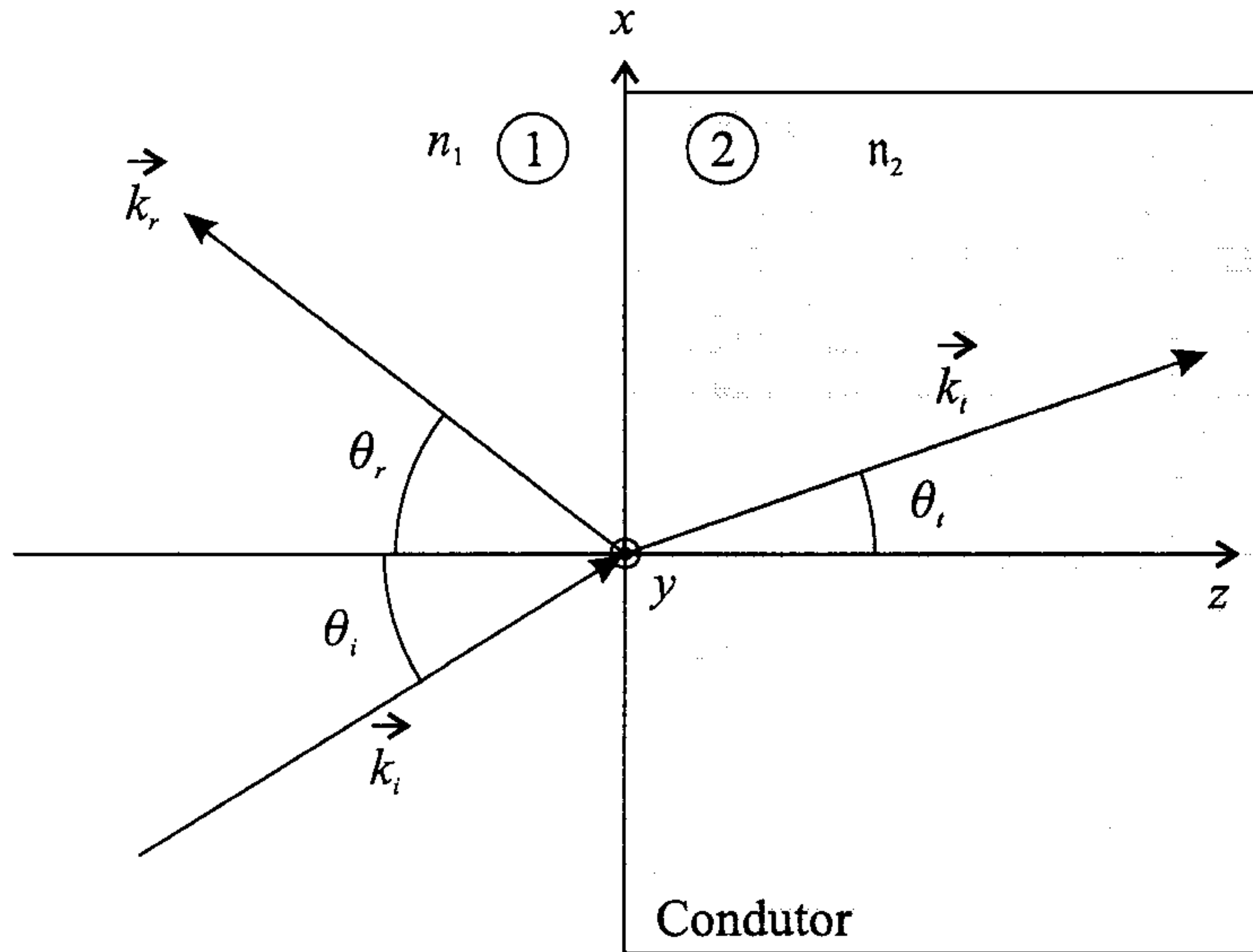


Figura 23.11: Diagrama para a incidência oblíqua num condutor.

e temos também a relação

$$n_2 = \frac{c}{\omega} k_2$$

para o índice de refração complexo. Nesse caso, a lei de Snell fica, formalmente,

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \vartheta_t$$

onde ϑ_t é, agora, um ângulo complexo, já que n_2 é complexo. Note que ϑ_t não tem o mesmo significado geométrico que θ_t . Vamos escrever o índice de refração como

$$n_2 = n_2 + i\kappa_2 \quad (23.83)$$

onde n_2 é o índice de refração real usual e κ_2 é a parte imaginária, ligada ao amortecimento da onda. Assim, obtemos

$$k_2 = n_2 \frac{\omega}{c} = (n_2 + i\kappa_2) \frac{\omega}{c}$$

Agora, calculamos

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k_2 \sin \vartheta_t x + k_2 \cos \vartheta_t z$$

ou

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = (n_2 + in_2) \frac{\omega}{c} (x \sin \vartheta_t + z \cos \vartheta_t) \quad (23.84)$$

Restringindo-nos a $n_1 = 1$, podemos escrever, da lei de Snell,

$$\sin \vartheta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_2} = \frac{\sin \theta_i}{n_2 + in_2} = \frac{n_2 - in_2}{n_2^2 + n_2^2} \sin \theta_i \quad (23.85)$$

onde usamos a equação 23.83. Além disso, considerando que ϑ_t é complexo, podemos escrever também

$$\cos \vartheta_t = re^{i\phi} = R(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (23.86)$$

Substituindo agora as equações 23.85 e 23.86 em 23.84, achamos

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = (n_2 + in_2) \frac{\omega}{c} \left[x \frac{n_2 - in_2}{n_2^2 + n_2^2} \sin \theta_i + z R(\cos \phi + i \sin \phi) \right]$$

ou

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{c} \left[x \sin \theta_i + z R(n_2 \cos \phi + in_2 \cos \phi + in_2 \sin \phi - n_2 \sin \phi) \right]$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \vec{k}_2 \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{c} \left[x \sin \theta_i + z R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi) \right] \\ + i \frac{\omega z R}{c} (n_2 \cos \phi + n_2 \sin \phi) \end{aligned} \quad (23.87)$$

Note que, na expressão acima, separamos os fatores numa parte real e numa parte imaginária. Lembrando que

$$\vec{\mathcal{E}}_t(z, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0t} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

veremos que a parte imaginária da equação 23.87 dá origem a um decaimento amortecido da onda, descrito pelo fator

$$\exp \left\{ -\frac{\omega R}{c} (n_2 \cos \phi + n_2 \sin \phi) z \right\} \quad (23.88)$$

o qual depende apenas da coordenada z , não sendo função de x ou y , de modo que, mesmo a onda penetrando obliquamente no condutor, ela é amortecida na direção normal à interface entre os dois meios, isto é, os planos em que $z = \text{constante}$ (paralelos, portanto, à interface entre os meios) são planos de amplitude constante. Por outro lado, os planos de fase constante não são paralelos à interface, já que, para obter esses planos, devemos considerar a parte real da equação 23.87, isto é,

$$\frac{\omega}{c} \left[x \sin \theta_i + z R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi) \right] = \text{constante}$$

Esta equação depende tanto de z como de x e ela descreve planos perpendiculares à direção de $\vec{k}_2$ (ou $\vec{k}_t$). Considerando novamente a parte real da equação 23.87, podemos escrevê-la na forma

$$\begin{aligned} \Re[\vec{k}_2 \cdot \vec{r}] &= \frac{\omega}{c} \left[x \sin \theta_i + z R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi) \right] = \\ &= \frac{\omega}{c} \left[x \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}} \sin \theta_i + z R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi) \frac{\mathcal{N} \cos \theta_t}{\mathcal{N} \cos \theta_t} \right] \end{aligned}$$

Agora, se considerarmos um índice de refração real *efetivo* $\mathcal{N}$, teremos uma lei de Snell

$$\sin \theta_i = \mathcal{N} \sin \theta_t$$

de modo que podemos escrever

$$\Re[\vec{k}_2 \cdot \vec{r}] = \frac{\omega}{c} \mathcal{N} \left[x \sin \theta_t + \frac{R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi)}{\mathcal{N} \cos \theta_t} z \cos \theta_t \right] \quad (23.89)$$

Se o vetor de onda da onda transmitida fosse real, ou seja, se o meio ② fosse dielétrico ao invés de condutor, usando o sistema de coordenadas da figura 23.5, teríamos, da equação 23.66,

$$\vec{k}_t = k_t \cos \theta_t \hat{\mathbf{k}} + k_t \sin \theta_t \hat{\mathbf{i}}$$

e

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_t (z \cos \theta_t + x \sin \theta_t)$$

Além disso, nesse caso teríamos

$$k_2 = k_t = n_2 \frac{\omega}{c}$$

de modo que

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{c} n_2 (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)$$

Assim, comparando a equação acima com a expressão 23.89, vemos que, se considerarmos que

$$\frac{R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi)}{\mathcal{N} \cos \theta_t} = 1 \quad (23.90)$$

as duas expressões tornam-se muito semelhantes. Para que isso ocorra, o índice de refração real *efetivo* deve ser tal que satisfaça a equação acima, ou seja,

$$R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi) = \mathcal{N} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}$$

ou, usando a lei de Snell *efetiva*,

$$R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi) = \mathcal{N} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{\mathcal{N}^2}}$$

ou ainda,

$$R^2(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi)^2 = \mathcal{N}^2 - \sin^2 \theta_i$$

de modo que

$$\mathcal{N}^2 = R^2(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi)^2 + \sin^2 \theta_i$$

e, finalmente,

$$\mathcal{N} = \sqrt{R^2(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi)^2 + \sin^2 \theta_i}$$

Note que $\mathcal{N}$ depende do ângulo de incidência θ_i , além das propriedades do meio dadas por n_1 e n_2 . Eventualmente, pode ocorrer que $\mathcal{N} = 1$, de modo que a onda refratada não é desviada, mesmo não se tendo incidência normal na interface. Outro caso interessante ocorre quando $\mathcal{N} < 1$, e a velocidade de fase da onda refratada torna-se maior do que c .

Considerando novamente a expressão 23.90,

$$\frac{R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi)}{\mathcal{N} \cos \theta_t} = 1$$

vemos que ela pode ser reescrita como

$$R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi) = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} \cos \theta_t$$

ou

$$\operatorname{tg} \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{R(n_2 \cos \phi - n_2 \sin \phi)} \quad (23.91)$$

Agora, se considerarmos o condutor como sendo um bom condutor, o vetor de onda no condutor pode ser escrito como

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_2 + i\vec{\kappa}_2$$

e, reunindo com a expressão 22.78,

$$k = \kappa = \sqrt{\frac{\omega \mu \varsigma}{2}}$$

obtemos, em módulo,

$$k_2 = \sqrt{\frac{\omega \mu \varsigma}{2}} (1 + i)$$

Agora, lembrando que

$$n_2 = \frac{c}{\omega} k_2$$

temos

$$n_2 = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\omega \mu \varsigma}{2}} (1 + i) = c \sqrt{\frac{\mu \varsigma}{2\omega}} (1 + i)$$

e, comparando com a expressão 23.83, achamos

$$n_2 = n_2 = c \sqrt{\frac{\mu \varsigma}{2\omega}}$$

Voltando agora à equação 23.91, obtemos

$$\operatorname{tg} \theta_t = \frac{\operatorname{sen} \theta_i}{Rn_2(\cos \phi - \operatorname{sen} \phi)}$$

ou

$$\operatorname{tg} \theta_t = \frac{\operatorname{sen} \theta_i}{Rc(\cos \phi - \operatorname{sen} \phi)} \sqrt{\frac{2\omega}{\mu s}}$$

Assim, quando o material tem uma condutividade muito alta ou a frequência da onda incidente é muito baixa, o ângulo θ_t tende a zero independente do valor do ângulo de incidência θ_i , ou seja, a onda se propaga no condutor perpendicularmente à interface entre os dois meios, e os planos de fase e amplitude constante coincidem. Além disso, considerando o fator de amortecimento dado pela equação 23.88, vemos que o fator que multiplica z nessa equação torna-se

$$-\frac{\omega R}{c}(\cos \phi + \operatorname{sen} \phi)c\sqrt{\frac{\mu s}{2\omega}} = -R(\cos \phi + \operatorname{sen} \phi)\sqrt{\frac{\omega \mu s}{2}}$$

Lembrando agora a profundidade de penetração 22.79,

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu s}}$$

vemos que

$$-\frac{\omega R}{c}(\cos \phi + \operatorname{sen} \phi)c\sqrt{\frac{\mu s}{2\omega}} = -\frac{R(\cos \phi + \operatorname{sen} \phi)}{\zeta}$$

de modo que a equação 23.88 fica

$$\exp \left\{ -\frac{R(\cos \phi + \operatorname{sen} \phi)}{\zeta} z \right\} \quad (23.92)$$

que depende da profundidade de penetração ζ , confirmando que a onda é amortecida na direção z e indicando que a onda penetra no material até uma distância característica dada por ζ . Nosso objetivo agora é estudar com um pouco mais de detalhes a estreita região em que os campos penetram no condutor. A primeira questão é relembrar as condições de contorno para os campos eletromagnéticos dados pelas equações 23.2,

$$\begin{aligned}
(\epsilon_2 \vec{\mathcal{E}}_2 - \epsilon_1 \vec{\mathcal{E}}_1) \cdot \hat{n} &= \sigma \\
\vec{\mathcal{B}}_1 \cdot \hat{n} &= \vec{\mathcal{B}}_2 \cdot \hat{n} \\
\vec{\mathcal{E}}_1 \cdot d\vec{\ell} &= \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot d\vec{\ell} \\
\hat{n} \times \left(\frac{\vec{\mathcal{B}}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{\mathcal{B}}_1}{\mu_1} \right) &= \vec{J}_\ell
\end{aligned}$$

ou, escrevendo numa forma mais interessante para nossos propósitos,

$$(\epsilon \vec{\mathcal{E}} - \epsilon_c \vec{\mathcal{E}}_c) \cdot \hat{n} = \sigma \quad (23.94a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_c \cdot \hat{n} = \vec{\mathcal{B}} \cdot \hat{n} \quad (23.94b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_c \cdot d\vec{\ell} = \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} \quad (23.94c)$$

$$\hat{n} \times (\vec{\mathcal{H}} - \vec{\mathcal{H}}_c) = \vec{J}_\ell \quad (23.94d)$$

onde o índice c indica os campos no condutor. Os campos sem índice são os campos logo fora do condutor, no dielétrico. Se o condutor fosse perfeito, as cargas se moveriam tão rápido em resposta aos campos externos que não haveria campo elétrico tangencial dentro do condutor ($\vec{\mathcal{E}}_{c,\parallel} = 0$) nem campo magnético perpendicular a ele ($\vec{\mathcal{B}}_{c,\perp} = 0$). Para um condutor com condutividade finita, os resultados acima podem ser usados como uma primeira aproximação, pois sabemos que os campos penetram até uma pequena profundidade característica, a profundidade de penetração ζ , dada pela equação 22.79,

$$\zeta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \varsigma}}$$

Note que ζ é muito pequeno, de modo que os campos são bastante amortecidos na direção perpendicular à superfície, mas na direção tangencial a ela os campos têm variações espaciais muito mais suaves. Assim, derivadas espaciais dos campos na direção tangencial podem ser desprezadas em comparação com derivadas na direção ortogonal à superfície.

A primeira modificação que ocorre com relação ao caso de um condutor vem do fato de que a equação 12.11,

$$\vec{J} = \varsigma \vec{\mathcal{E}}$$

que relaciona a densidade de corrente $\vec{J}$ com o campo elétrico, indica que havendo $\vec{\mathcal{E}}$ no interior do condutor, existirá $\vec{J}$, que se distribui na fina camada

volumétrica do condutor onde os campos penetram. Portanto, a densidade de corrente não é formalmente uma densidade superficial de corrente $\vec{J}_\ell$, que é, então, nula, o que altera a equação 23.94d para

$$\hat{n} \times (\vec{\mathcal{H}} - \vec{\mathcal{H}}_c) = 0 \quad (23.95)$$

Portanto, se $\vec{\mathcal{H}}_\parallel \neq 0$ logo fora do condutor, haverá também um campo $\vec{\mathcal{H}}_{c,\parallel}$ dentro do condutor. Vamos considerar agora que a dependência temporal para os campos seja dada por $e^{-i\omega t}$, e vamos fazer a extensão complexa dos campos. Considere então agora a equação de Maxwell 22.54c aplicada ao condutor,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}_c = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_c}{\partial t}$$

Ela fica, com $\vec{\mathcal{B}}_c = \mu_c \vec{\mathcal{H}}_c(\vec{r})e^{-i\omega t}$ e $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t}$,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}_c = i\omega\mu_c \vec{\mathcal{H}}_c$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_c = -\frac{i}{\omega\mu_c} \nabla \times \vec{\mathcal{E}}_c \quad (23.96)$$

Por outro lado, a equação de Maxwell 22.54d fica, desprezando a corrente de deslocamento, que é importante apenas para as frequências muito altas, já que o condutor é um bom condutor, mas não perfeito,

$$\mu_c \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_c \simeq \mu_c \vec{s} \vec{\mathcal{E}}_c$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_c \simeq \frac{1}{s} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_c \quad (23.97)$$

Vamos representar uma coordenada normal à superfície do condutor por x_1 , sendo que o sentido positivo de x_1 ocorre para dentro do condutor. Duas outras coordenadas, x_2 e x_3 , são tangentes à superfície. Assim, o operador ∇ , que envolve derivadas espaciais em relação a x_i , pode ser aproximado apenas por

$$\nabla \simeq -\hat{n} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (23.98)$$

onde o sinal negativo aparece porque $\hat{n}$ está orientado para fora do condutor. Com isso, a equação 23.96 torna-se

$$\vec{\mathcal{H}}_c \simeq -\frac{i}{\omega\mu_c} \left(-\hat{n} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \times \vec{\mathcal{E}}_c$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_c \simeq \frac{i}{\omega\mu_c} \hat{n} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_c}{\partial x_1} \quad (23.99)$$

enquanto 23.97 torna-se

$$\dot{\vec{\mathcal{E}}}_c \simeq \frac{1}{s} \left(-\hat{n} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \times \vec{\mathcal{H}}_c$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_c \simeq -\frac{1}{s} \hat{n} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1} \quad (23.100)$$

Utilizando a equação 23.100 na 23.99, achamos

$$\vec{\mathcal{H}}_c \simeq \frac{i}{\omega\mu_c} \hat{n} \times \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{1}{s} \hat{n} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1} \right)$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_c \simeq -\frac{i}{\omega s \mu_c} \hat{n} \times \left(\hat{n} \times \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) \quad (23.101)$$

Agora, usamos a identidade 1.19a para o duplo produto vetorial que aparece nessa expressão, ou seja,

$$\hat{n} \times \left(\hat{n} \times \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) = \left(\hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) \hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n}) \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2}$$

ou

$$\hat{n} \times \left(\hat{n} \times \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) = \left(\hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) \hat{n} - \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \quad (23.102)$$

Com o uso de 23.102, a expressão 23.101 torna-se

$$\vec{\mathcal{H}}_c \simeq -\frac{i}{\omega \mathfrak{s} \mu_c} \left[\left(\hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) \hat{n} - \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right] \quad (23.103)$$

Vamos efetuar agora o produto escalar de $\hat{n}$ com a equação 23.103, ou seja,

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}_c \simeq -\frac{i}{\omega \mathfrak{s} \mu_c} \hat{n} \cdot \left[\left(\hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) \hat{n} - \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right]$$

ou

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}_c \simeq -\frac{i}{\omega \mathfrak{s} \mu_c} \left[\left(\hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) (\hat{n} \cdot \hat{n}) - \hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right]$$

e então,

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}_c \simeq 0 \quad (23.104)$$

Vamos calcular agora o produto vetorial de $\hat{n}$ com a equação 23.103, isto é,

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c \simeq -\frac{i}{\omega \mathfrak{s} \mu_c} \hat{n} \times \left[\left(\hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) \hat{n} - \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right]$$

ou

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c \simeq -\frac{i}{\omega \mathfrak{s} \mu_c} \left[\left(\hat{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right) (\hat{n} \times \hat{n}) - \hat{n} \times \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}_c}{\partial x_1^2} \right]$$

que pode ser escrito

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c \simeq \frac{i}{\omega \mathfrak{s} \mu_c} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c)$$

ou

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c) + i\omega \mathfrak{s} \mu_c (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c) \simeq 0$$

ou ainda, usando a equação 22.79 para a profundidade de penetração,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c) + \frac{2i}{\zeta^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c) \simeq 0 \quad (23.105)$$

A equação 23.104 indica que a componente perpendicular à superfície de $\vec{\mathcal{H}}_c$ dentro do condutor é nula, ou seja,

$$\vec{\mathcal{H}}_{c,\perp} = 0$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{H}}_c = \vec{\mathcal{H}}_{c,\parallel}$$

A solução para a equação 23.105 pode ser escrita como

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c = (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c^0) e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}} \quad (23.106)$$

onde $\vec{\mathcal{H}}_c^0 = \vec{\mathcal{H}}_c^0(x_2, x_3)$. Podemos facilmente verificar essa solução se calcularmos

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c) = \frac{i-1}{\zeta} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c^0) e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{i-1}{\zeta} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c^0) e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}} \right] = \frac{(i-1)^2}{\zeta^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c^0) e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}}$$

ou

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c) = -\frac{2i}{\zeta^2} \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c \quad (23.107)$$

Aplicando 23.107 em 23.105, vemos que a equação diferencial é resolvida. Da solução 23.106, podemos obter $\vec{\mathcal{H}}_c$, ou seja,

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_c = \hat{n} \times \left[\vec{\mathcal{H}}_c^0 e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}} \right]$$

de modo que, usando também a condição de contorno 23.95,

$$\vec{\mathcal{H}}_{c,\parallel} = \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0 e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}} = \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0 e^{-\frac{x_1}{\zeta}} e^{i\frac{x_1}{\zeta}} \quad (23.108)$$

onde $\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0$ é o campo na superfície do condutor, pelo lado de fora. Note o amortecimento introduzido pela exponencial real envolvendo a profundidade de penetração. Utilizando a equação 23.108 em 23.100, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}_c \simeq -\frac{1}{s} \hat{n} \times \frac{\partial}{\partial x_1} [\vec{\mathcal{H}}_{||}^0 e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}}]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_c \simeq -\frac{(i-1)}{s\zeta} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{||}^0) e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}} \quad (23.109)$$

Note que essa equação indica que o campo elétrico no interior do condutor é tangencial à superfície. Usando agora a condição de contorno 23.94c,

$$\vec{\mathcal{E}}_c \cdot d\vec{\ell} = \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$$

ou, na forma equivalente,

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_c = \hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}$$

vemos que há um pequeno campo elétrico tangencial na superfície do condutor, pelo lado de fora, dado pela aplicação de 23.109 em $x_1 = 0$, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}_{||} \simeq -\frac{(i-1)}{s\zeta} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{||}^0) \quad (23.110)$$

Agora, considere que os campos dentro do condutor podem ser escritos como

$$\vec{\mathcal{E}}_c = \vec{\mathcal{E}}_{c,\perp} + \vec{\mathcal{E}}_{c,||} \quad \vec{\mathcal{H}}_c = \vec{\mathcal{H}}_{c,\perp} + \vec{\mathcal{H}}_{c,||}$$

Então,

$$\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^* = (\vec{\mathcal{E}}_{c,\perp} + \vec{\mathcal{E}}_{c,||}) \times (\vec{\mathcal{H}}_{c,\perp}^* + \vec{\mathcal{H}}_{c,||}^*)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^* = \vec{\mathcal{E}}_{c,\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,\perp}^* + \vec{\mathcal{E}}_{c,\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,||}^* + \vec{\mathcal{E}}_{c,||} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,\perp}^* + \vec{\mathcal{E}}_{c,||} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,||}^*$$

ou ainda, lembrando que as componentes paralelas estão num plano e a perpendicular, numa reta,

$$\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^* = \vec{\mathcal{E}}_{c,\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,||}^* + \vec{\mathcal{E}}_{c,||} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,\perp}^* + \vec{\mathcal{E}}_{c,||} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,||}^* \quad (23.111)$$

Agora, efetuamos o produto escalar de $\hat{n}$ com a equação 23.111, ou seja,

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^*) = \hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_{c,\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,\parallel}^*) + \hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_{c,\parallel} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,\perp}^*) + \hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_{c,\parallel} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,\parallel}^*)$$

Devemos lembrar que o produto vetorial de dois vetores resulta num vetor perpendicular aos dois primeiros, de modo que dois termos se anulam na expressão acima, e resta

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^*) = \hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_{c,\parallel} \times \vec{\mathcal{H}}_{c,\parallel}^*) \quad (23.112)$$

Com o uso de 23.108 e 23.109, a equação 23.112 fica

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^*) = \hat{n} \cdot \left\{ \left[-\frac{(i-1)}{\mathfrak{s}\zeta} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}} \right] \times \left[\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*} e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}} \right] \right\}$$

ou

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^*) = \hat{n} \cdot \left\{ \left[-\frac{(i-1)}{\mathfrak{s}\zeta} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) e^{\frac{(i-1)x_1}{\zeta}} \right] \times \left[\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*} e^{\frac{-(i-1)x_1}{\zeta}} \right] \right\}$$

ou ainda,

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^*) = \frac{1-i}{\mathfrak{s}\zeta} \hat{n} \cdot \left[(\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*} \right] \quad (23.113)$$

Com o uso da identidade 1.19b, podemos escrever o termo entre colchetes como

$$(\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*} = \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0 (\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*}) - \hat{n} (\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0 \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*})$$

ou

$$(\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*} = -\hat{n} |\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2$$

Então, a equação 23.113 fica

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^*) = \frac{1-i}{\mathfrak{s}\zeta} \hat{n} \cdot (-\hat{n} |\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2)$$

ou

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_c \times \vec{\mathcal{H}}_c^*) = \frac{i-1}{\mathfrak{s}\zeta} |\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2 \quad (23.114)$$

A importância dessa equação está no fato de que ela é um múltiplo do vetor de Poynting médio dado por 22.52,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

Assim, lembrando que o vetor de Poynting mede o fluxo de energia por unidade de área e tempo numa dada direção, temos que a potência média, por unidade de área, que entra no condutor pode ser obtida por meio de

$$\frac{d\langle P \rangle}{dA} = -\hat{n} \cdot \langle \vec{S} \rangle$$

onde o sinal negativo aparece para indicar que queremos o fluxo que entra no condutor. Esse fluxo de energia é, na verdade, absorvido pelo condutor e dissipado na forma de calor, por exemplo. Com o uso de 23.114, achamos

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} = \frac{1}{2} \Re \left[\frac{1-i}{\mathfrak{s}\zeta} |\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2 \right]$$

ou

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} = \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta} |\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2 \quad (23.115)$$

Note que também podemos escrever

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} = \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta} |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2 \quad (23.116)$$

já que

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2 = (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0)^*$$

ou

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2 = (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*}) \quad (23.117)$$

Agora, usando a identidade 1.20, temos

$$(\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*}) = (\hat{n} \cdot \hat{n})(\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0 \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*}) - (\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*})(\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0)$$

ou

$$(\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^{0*}) = |\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2$$

de modo que a equação 23.117 fica

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2 = |\vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0|^2 \quad (23.118)$$

Além disso, como

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}^0 = \hat{n} \times (\vec{\mathcal{H}}_{\perp}^0 + \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0)$$

ou

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}^0 = \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\parallel}^0$$

temos, finalmente,

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} = \frac{1}{2\epsilon\zeta} |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}^0|^2 \quad (23.119)$$

que é uma expressão importante, pois a partir dela a potência dissipada no condutor pode ser obtida. Isso encerra, por ora, nossa discussão sobre reflexão e refração. O apêndice I discute uma aplicação muito importante dos conceitos vistos na discussão do funcionamento de sistemas de lentes esféricas.

23.4 Exercícios

- 23.1** Mostre, utilizando a segunda derivada, que o processo feito para o cálculo da extremização de L_o dado por 23.34 resulta realmente num mínimo.
- 23.2** Considere três meios adjacentes, com índices de refração n_1 , n_2 e n_3 . As interfaces entre os meios são planos infinitos paralelos, e a espessura do meios ② vale D , enquanto os outros podem ser considerados como sendo semi-infinitos. Considere uma onda plana de frequência ω e vetor de onda $\vec{k}$ incidindo perpendicularmente na interface entre

os meios ① e ②. Determine os coeficientes de reflexão e transmissão tanto na interface ①-② quanto na interface ②-③.

- 23.3** Considere, no problema anterior, que a onda incida com um ângulo de incidência θ_i na interface entre os meios ① e ②. Obtenha os coeficientes de transmissão e reflexão como no caso anterior e verifique a condição de ocorrência de reflexão interna total do meio ② para o meio ③.
- 23.4** Seguindo os passos descritos na seção 23.2.3, estude o que ocorre na reflexão interna total quando o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência.
- 23.5** Determine os coeficientes de reflexão e transmissão para o problema de incidência normal discutido na seção 23.3.1.

Capítulo 24

Radiação, I: Cargas Pontuais

Nos capítulos precedentes estudamos a propagação de ondas eletromagnéticas e alguns efeitos correlatos, como a reflexão e a refração. Aqui, estaremos interessados em entender como as ondas são produzidas, ou seja, vamos nos concentrar na radiação emitida por distribuições de cargas e correntes, começando com o tipo mais simples de distribuição, que é uma carga pontual. Os campos produzidos por uma carga pontual em movimento arbitrário são dados pelas expressões 20.132,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} \quad (24.1)$$

e 20.134

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)}{c} \quad (24.2)$$

onde

$$\vec{R}(t_r) = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r) \qquad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{a}}{c}$$

e $\vec{r}_Q(t_r)$ descreve a posição da carga Q no tempo retardado, $\vec{v}$ é sua velocidade e $\vec{a}$, a aceleração, todos no tempo t_r . É interessante lembrar que os campos são formados por duas parcelas, uma que está relacionada apenas à velocidade da carga e outra que envolve também a sua aceleração. O campo elétrico de velocidade é dado pela expressão 20.135,

$$\vec{\mathcal{E}}_v(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\hat{R} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]}$$

que diminui com a distância proporcionalmente ao quadrado desta, enquanto o campo elétrico de aceleração é descrito pela equação 20.136,

$$\vec{\mathcal{E}}_a(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]} \quad (24.3)$$

a qual é proporcional ao inverso da distância. O vetor de Poynting dado pela equação 21.10 torna-se

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{B}$$

ou

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}} \times \left[\frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}}{c} \right]$$

ou ainda, usando a expressão 1.19a,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \mathcal{E}^2 \hat{R}(t_r) - [\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{R}(t_r)] \vec{\mathcal{E}} \right\} \quad (24.4)$$

O vetor de Poynting representa um fluxo de energia, mas não é todo o fluxo descrito pela expressão acima que aparece como radiação emitida pela carga em movimento. Para haver emissão de radiação, é preciso que energia seja transportada para muito longe da carga (formalmente, para o infinito), e apenas parte do fluxo acima efetivamente faz isso. Uma parte da energia permanece com a carga à medida que ela se move, havendo trocas entre o campo e a carga.

Uma visualização desse efeito poderia ser conseguida se considerarmos um saco de lixo com algumas moscas em volta dele. Se movermos o saco de lixo, as moscas irão junto, mas algumas poderão se afastar muito dele durante o caminho e eventualmente se desligarão do saco. As moscas que ficam com o saco de lixo representam o campo eletromagnético que permanece ligado à carga quando ela se move. As moscas que se espalham pelos arredores representam a radiação emitida pela carga.

Para determinar a potência emitida pela carga ao se mover, precisamos integrar o vetor de Poynting acima numa superfície S , e a superfície mais indicada nesse caso é uma grande esfera centrada na posição da carga no tempo retardado, com um raio $R(t_r) = c(t - t_r)$. Assim, a radiação chega na esfera precisamente no instante t do observador, após decorrido um tempo $t - t_r$ da sua emissão pela carga ¹. Agora, devemos lembrar que a área de uma esfera cresce proporcionalmente ao quadrado do seu raio, isto é, $dA \propto R^2$. Além disso, na expressão 24.4 vemos que o campo elétrico aparece com termos quadráticos. Observando a expressão 24.1, vemos que existem termos proporcionais a R^{-4} (campo de velocidade multiplicado por ele mesmo), R^{-3} (campo de velocidade multiplicado pelo de aceleração) e R^{-2} (campo de aceleração multiplicado por ele mesmo). Assim, apenas o termo derivado do quadrado do campo de aceleração pode contribuir para o limite $R \rightarrow \infty$, já que os outros se anulam nesse limite. Os campos de aceleração, conseqüentemente, são os responsáveis pela radiação emitida pela carga, o que explica o fato de eles também serem chamados de campos de radiação.

O campo elétrico de radiação dado pela expressão 24.3 é perpendicular a $\hat{R}$, logo, o segundo termo na expressão 24.4 se anula, restando então

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E}_a^2 \hat{R}(t_r) \quad (24.5)$$

O vetor de Poynting representa um fluxo de energia por unidade de área e tempo. Se considerarmos que na esfera a unidade de área pode ser dada em termos de $dA = R^2 d\Omega$, onde Ω é o ângulo sólido, podemos obter a potência que passa pela esfera no tempo t por unidade de ângulo sólido mediante

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = (\vec{S} \cdot \hat{R}) R^2 = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E}_a^2 [R(t_r)]^2 \quad (24.6)$$

Note que essa potência não é a mesma que saiu da carga no tempo t_r , a qual seria obtida por meio de

$$P(t_r) = \frac{dW}{dt_r} = \frac{dW}{dt} \frac{\partial t}{\partial t_r} = P(t) \frac{\partial t}{\partial t_r}$$

Para obter a derivada acima, usamos a expressão 20.125,

¹ Qualquer superfície S pode ser escolhida, mas uma esfera como a descrita acima facilita muito a álgebra.

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

de modo que

$$P(t_r) = [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] P(t) \quad (24.7)$$

e assim,

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] (\vec{S} \cdot \hat{R}) R^2 = \frac{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]}{\mu_0 c} \mathcal{E}_{\vec{a}}^2 [R(t_r)]^2 \quad (24.8)$$

Estaremos sempre interessados na potência que deixa a carga em t_r de modo que, a menos que seja dito explicitamente, sempre $P = P(t_r)$, sendo dada por

$$P = \oint_S \frac{dP(t_r)}{d\Omega} d\Omega = \oint_S \frac{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]}{\mu_0 c} \mathcal{E}_{\vec{a}}^2 [R(t_r)]^2 d\Omega \quad (24.9)$$

lembrando que $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Devemos agora estudar alguns casos particulares importantes, de acordo com o movimento descrito pela partícula de carga Q .

24.1 Radiação Emitida em Baixas Velocidades

O primeiro caso importante consiste em considerarmos uma carga Q em movimento de tal forma que sua velocidade seja muito baixa quando comparada com a velocidade da luz. Nesse caso, podemos considerar o limite $\vec{\beta} \rightarrow 0$ na expressão 24.3, que fica

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{a})}{R}$$

ou, usando 1.19a,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\hat{R} \cdot \vec{a})\hat{R} - (\hat{R} \cdot \hat{R})\vec{a}}{R}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\hat{R} \cdot \vec{a})\hat{R} - \vec{a}}{R}$$

Para achar o vetor de Poynting, precisamos de

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\vec{a}}^2(\vec{r}, t) &= \vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r}, t) \\ \mathcal{E}_{\vec{a}}^2(\vec{r}, t) &= \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4 R^2} [(\hat{R} \cdot \vec{a})\hat{R} - \vec{a}] \cdot [(\hat{R} \cdot \vec{a})\hat{R} - \vec{a}]\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{E}_{\vec{a}}^2(\vec{r}, t) = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4 R^2} [(\hat{R} \cdot \vec{a})^2 - 2(\hat{R} \cdot \vec{a})^2 + a^2]$$

ou ainda,

$$\mathcal{E}_{\vec{a}}^2(\vec{r}, t) = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4 R^2} [a^2 - (\hat{R} \cdot \vec{a})^2]$$

Considerando que o ângulo entre $\hat{R}$ e $\vec{a}$ vale θ , temos

$$\mathcal{E}_{\vec{a}}^2(\vec{r}, t) = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4 R^2} [a^2 - a^2 \cos^2 \theta]$$

ou

$$\mathcal{E}_{\vec{a}}^2(\vec{r}, t) = \frac{Q^2 a^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4 R^2} \sin^2 \theta$$

Então, o vetor de Poynting 24.5 fica

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E}_{\vec{a}}^2 \hat{R}(t_r)$$

ou

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{Q^2 a^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4 R^2} \sin^2 \theta \hat{R}(t_r)$$

ou ainda,

$$\vec{S} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c R^2} \sin^2 \theta \hat{R}(t_r)$$

Note que não há emissão paralelamente à aceleração $\vec{a}$ da carga, seja para a frente da carga ou para trás. O comportamento da radiação é ilustrado na figura 24.1. A emissão ocorre na forma de um toróide, e a máxima emissão é obtida no plano perpendicular à aceleração da partícula.

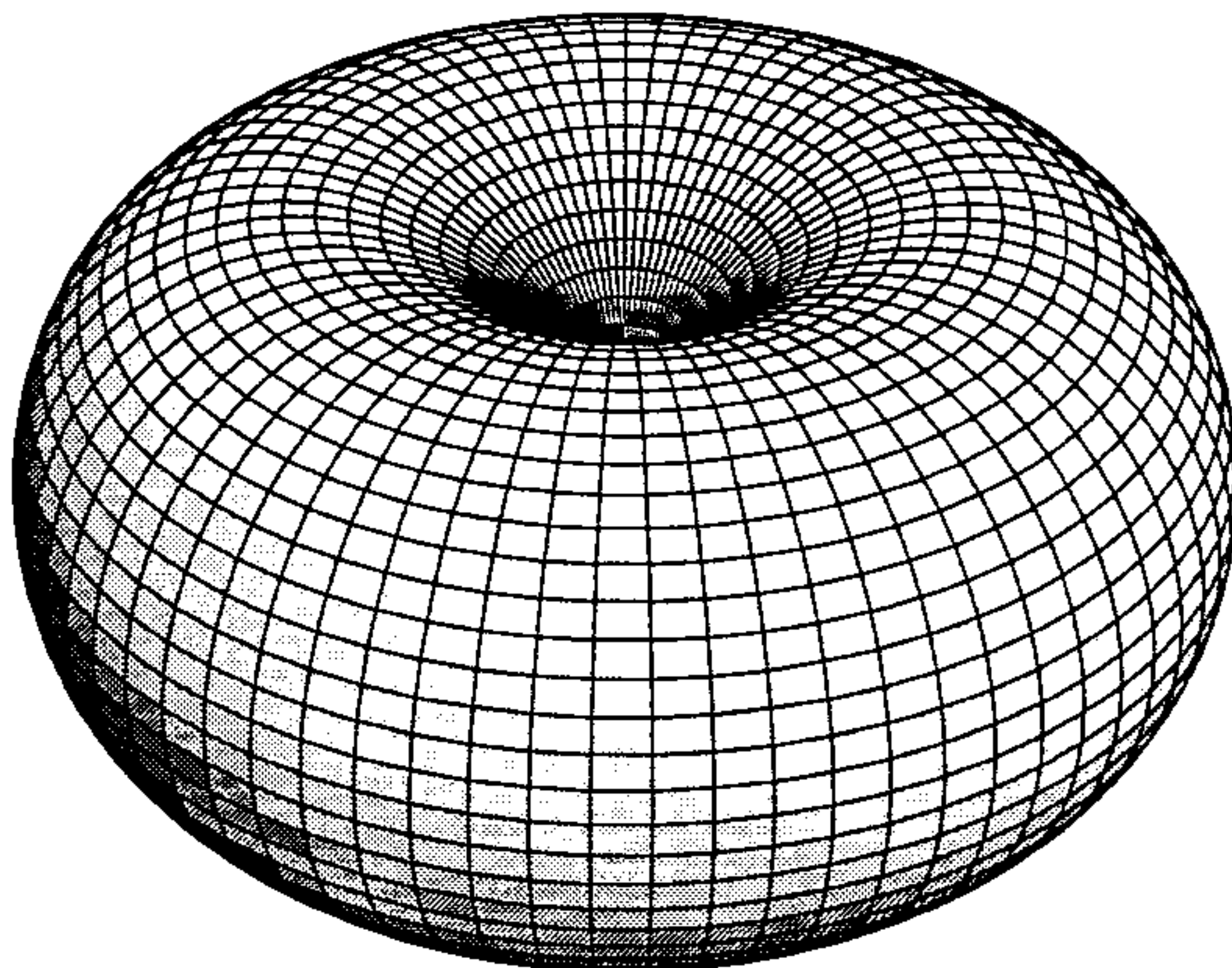


Figura 24.1: Padrão da radiação emitida por uma carga movimentando-se em baixa velocidade. A aceleração está na direção vertical.

A potência irradiada por unidade de ângulo sólido é obtida por intermédio da expressão 24.8, lembrando que $\vec{\beta} \rightarrow 0$,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c R^2} \sin^2 \theta R^2$$

ou

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \theta \quad (24.10)$$

de modo que a potência total emitida pela carga fica, usando a equação 24.9,

$$P = \oint_S \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^3 \theta d\theta d\phi$$

ou

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} (2\pi) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

Para realizar a integral, fazemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\
 &= -[\cos \theta]_0^\pi + \frac{1}{3} [\cos^3 \theta]_0^\pi \\
 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

de modo que achamos

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{6\pi c} \quad (24.11)$$

que é conhecida como *fórmula de Larmor* para a radiação emitida pela partícula. Note que nesse caso não importa a direção da velocidade em relação à direção da aceleração.

24.2 Radiação Emitida por uma Carga com Velocidade e Aceleração Colineares

Quando a velocidade e a aceleração da partícula de carga Q são colineares, temos $\vec{\beta} \times \vec{a} = 0$, e o campo elétrico 24.3 torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{a})}{R[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^3}$$

ou, de forma muito similar ao caso anterior,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\hat{R} \cdot \vec{a})\hat{R} - \vec{a}}{R[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^3}$$

O vetor de Poynting fica

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E}_{\vec{a}}^2 \hat{R}(t_r)$$

ou

$$\vec{S} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c R^2 [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^6} \sin^2 \theta \hat{R}$$

A potência por unidade de ângulo sólido 24.8 fica, então,

$$\frac{dP}{d\Omega} = [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] (\vec{S} \cdot \hat{R}) R^2$$

ou

$$\frac{dP}{d\Omega} = [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}] \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^6} \sin^2 \theta$$

ou ainda, definindo agora θ como o ângulo entre $\vec{v}$ e $\hat{R}$, medido a partir de $\vec{v}$, temos

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{[1 - \beta \cos \theta]^5} \quad (24.12)$$

que se reduz à expressão 24.10 quando $\beta \rightarrow 0$. Quando β cresce, a emissão passa a ocorrer preferencialmente para a frente da carga, como mostra a figura 24.2. Entretanto, exatamente em $\theta = 0$ a radiação emitida é nula. O ângulo em que ocorre a emissão máxima é obtido derivando-se a expressão acima em relação a θ e igualando o resultado a zero, isto é,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{max} = 0$$

ou

$$\frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{1}{[1 - \beta \cos \theta_{max}]^{10}} \left\{ 2 \sin \theta_{max} \cos \theta_{max} [1 - \beta \cos \theta_{max}]^5 - \sin^2 \theta_{max} [1 - \beta \cos \theta_{max}]^4 (5\beta \sin \theta_{max}) \right\} = 0$$

que fica

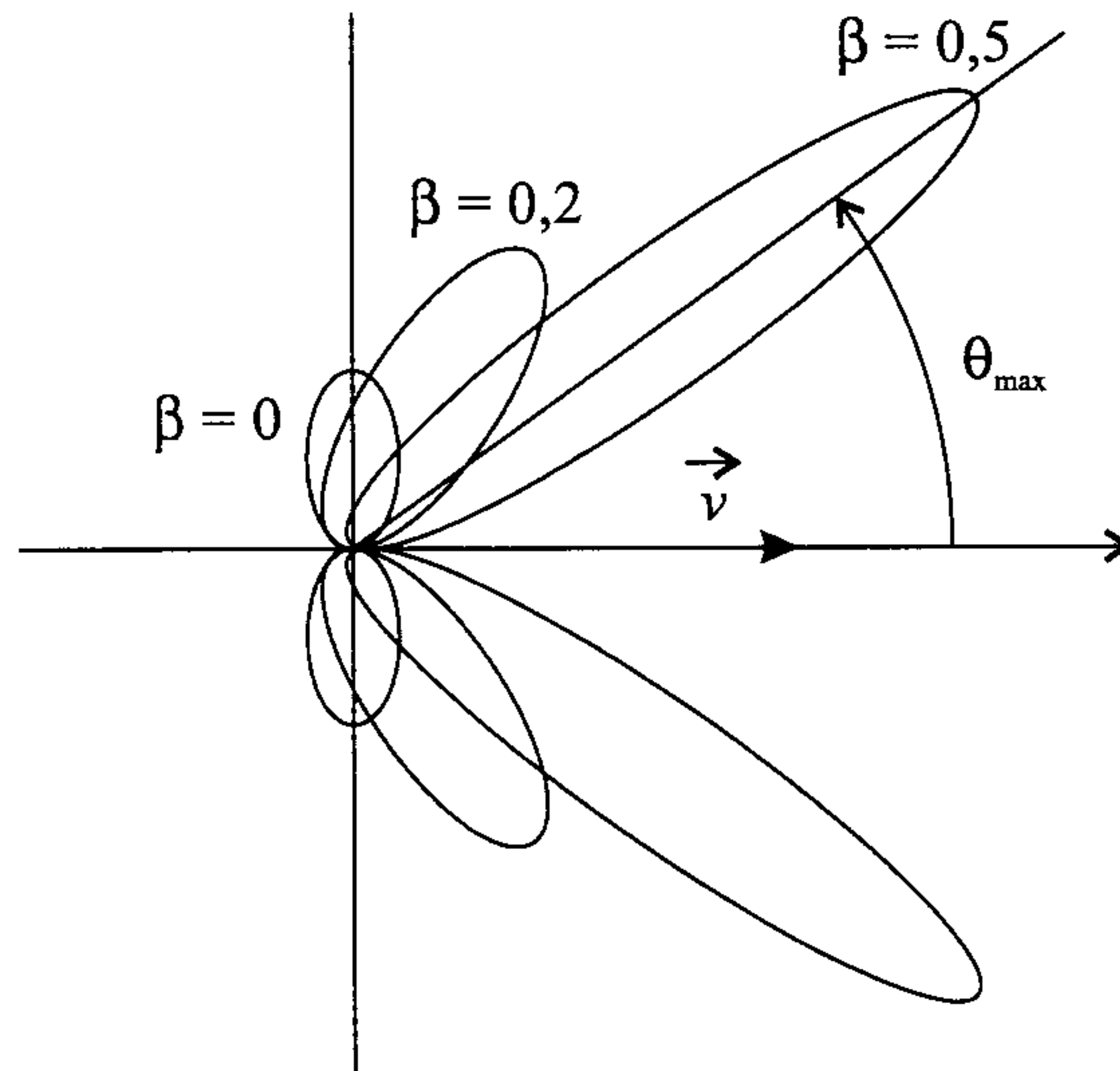


Figura 24.2: Radiação emitida por uma carga com velocidade e aceleração colineares. A figura deve ser entendida como um corte de um sólido de revolução, obtido girando-a em torno da direção definida pela velocidade $\vec{v}$.

$$2 \cos \theta_{max} [1 - \beta \cos \theta_{max}] - 5 \sin^2 \theta_{max} \beta = 0$$

ou

$$2 \cos \theta_{max} - 2\beta \cos^2 \theta_{max} - 5(1 - \cos^2 \theta_{max})\beta = 0$$

e assim,

$$3\beta \cos^2 \theta_{max} + 2 \cos \theta_{max} - 5\beta = 0$$

que tem como solução

$$\cos \theta_{max} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60\beta^2}}{6\beta}$$

ou

$$\cos \theta_{max} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + 15\beta^2}}{6\beta}$$

ou ainda, lembrando que θ_{max} deve ser um ângulo agudo,

$$\cos \theta_{max} = \frac{1}{3\beta} [\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1]$$

de modo que

$$\theta_{max} = \arccos \left\{ \frac{1}{3\beta} [\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1] \right\}$$

É interessante verificar o que ocorre quando $\beta \rightarrow 1$, isto é, a carga se move com velocidade extremamente relativística. Nesse caso, vamos definir

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (24.13)$$

de modo que, quando $\beta \rightarrow 1$, $\gamma \rightarrow \infty$. Podemos ainda escrever

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

ou

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad (24.14)$$

e também

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - x^2} \quad (24.15)$$

onde

$$x = \frac{1}{\gamma}$$

é um número muito menor que 1, no limite relativístico $\beta \rightarrow 1$. Nesse caso, a equação 24.12 pode ser escrita, considerando que θ também é muito pequeno quando $\beta \rightarrow 1$, como

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\theta^2}{[1 - \sqrt{1 - x^2} (1 - \frac{\theta^2}{2})]^5}$$

ou, utilizando a série de Taylor da raiz quadrada, já que $x \ll 1$,

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\theta^2}{[1 - (1 - \frac{x^2}{2})(1 - \frac{\theta^2}{2})]^5}$$

ou ainda,

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\theta^2}{[1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \theta^2}{4}]^5}$$

Como θ e x tendem a zero, o último termo dentro dos colchetes no denominador pode ser desprezado em relação aos outros, e temos

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{32\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\theta^2}{[\theta^2 + x^2]^5}$$

ou, voltando para γ ,

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{2\mu_0 Q^2 a^2}{\pi^2 c} \frac{\theta^2}{[\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2}]^5}$$

e então,

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{2\mu_0 Q^2 a^2}{\pi^2 c} \frac{\gamma^{10} \theta^2}{[1 + \theta^2 \gamma^2]^5}$$

ou

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{2\mu_0 Q^2 a^2}{\pi^2 c} \gamma^8 \frac{(\gamma\theta)^2}{[1 + (\gamma\theta)^2]^5}$$

Nesse caso, o ângulo de máxima emissão ocorre para

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\theta_{max}} = 0$$

ou

$$\frac{2\mu_0 Q^2 a^2}{\pi^2 c} \gamma^8 \frac{\gamma^2 2\theta_{max} [1 + (\gamma\theta_{max})^2]^5 - 10\gamma^2 \theta_{max} [1 + (\gamma\theta_{max})^2]^4}{[1 + (\gamma\theta_{max})^2]^{10}} = 0$$

ou ainda,

$$[1 + (\gamma\theta_{max})^2] - 5 = 0$$

ou seja,

$$\theta_{max} = \frac{1}{2\gamma}$$

Podemos determinar agora a potência total emitida pela carga, mediante

$$P = \oint_S \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{[1 - \beta \cos \theta]^5} \sin \theta d\theta d\phi$$

ou

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} (2\pi) \int_0^\pi \frac{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}{[1 - \beta \cos \theta]^5} d\theta$$

Chamando

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta & dx &= -\sin \theta d\theta \\ \theta = 0 &\rightarrow x = 1 & \theta = \pi &\rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

temos

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{8\pi c} \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^5} dx$$

Agora, definimos

$$\begin{aligned} u &= 1 - \beta x & du &= -\beta dx \\ x_1 = -1 &\rightarrow u_1 = 1 + \beta & x_2 = 1 &\rightarrow u_2 = 1 - \beta \end{aligned}$$

e ficamos com

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{8\pi c} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 - \left(\frac{1-u}{\beta}\right)^2}{u^5} \frac{du}{-\beta}$$

ou

$$P = -\frac{\mu_0 Q^2 a^2}{8\pi c \beta} \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^5} - \frac{1}{\beta^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(1-u)^2}{u^5} du \right\}$$

ou ainda,

$$P = -\frac{\mu_0 Q^2 a^2}{8\pi c \beta} \left\{ -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{u^4} \right]_{1+\beta}^{1-\beta} - \frac{1}{\beta^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1-2u+u^2}{u^5} du \right\}$$

ou então,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{8\pi c \beta} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{u^4} \right]_{1+\beta}^{1-\beta} + \frac{1}{\beta^2} \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{u^4} + \frac{2}{3} \frac{1}{u^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} \right]_{1+\beta}^{1-\beta} \right\}$$

que pode ser escrita como

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{8\pi c \beta} \left\{ \frac{1}{4} \frac{1}{u^4} - \left[\frac{3-8u+6u^2}{12u^4\beta^2} \right] \right\}_{1+\beta}^{1-\beta}$$

ou

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{8\pi c \beta} \left\{ \frac{3\beta^2 - 3 + 8u - 6u^2}{12u^4\beta^2} \right\}_{1+\beta}^{1-\beta}$$

ou ainda,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{96\pi c \beta^3} \left\{ \frac{3(\beta^2 - 1) + 8u - 6u^2}{u^4} \right\}_{1+\beta}^{1-\beta}$$

Aplicando os limites, temos

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{96\pi c \beta^3} \left\{ \frac{-3(1-\beta)(1+\beta) + 8(1-\beta) - 6(1-\beta)^2}{(1-\beta)^4} - \frac{-3(1-\beta)(1+\beta) + 8(1+\beta) - 6(1+\beta)^2}{(1+\beta)^4} \right\}$$

ou

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{96\pi c \beta^3} \left\{ \frac{-3(1+\beta) + 8 - 6(1-\beta)}{(1-\beta)^3} - \frac{-3(1-\beta) + 8 - 6(1+\beta)}{(1+\beta)^3} \right\}$$

ou ainda,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{96\pi c \beta^3} \left\{ \frac{-3 - 3\beta + 8 - 6 + 6\beta}{(1-\beta)^3} - \frac{-3 + 3\beta + 8 - 6 - 6\beta}{(1+\beta)^3} \right\}$$

ou então,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{96\pi c \beta^3} \left\{ \frac{-1 + 3\beta}{(1-\beta)^3} + \frac{1 + 3\beta}{(1+\beta)^3} \right\}$$

que fica

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{96\pi c \beta^3} \left\{ \frac{(3\beta - 1)(1+\beta)^3 + (1+3\beta)(1-\beta)^3}{(1-\beta^2)^3} \right\}$$

ou

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{96\pi c \beta^3 (1-\beta^2)^3} \{ (3\beta - 1)(1+3\beta+3\beta^2+\beta^3) + (1+3\beta)(1-3\beta+3\beta^2-\beta^3) \}$$

ou então,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{96\pi c \beta^3 (1-\beta^2)^3} (16\beta^3)$$

e, finalmente,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{6\pi c} \frac{1}{(1-\beta^2)^3}$$

ou, usando a expressão 24.13,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

temos

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c} \quad (24.16)$$

que recai na expressão 24.11 para o caso em que $\gamma \rightarrow 1$ ($\beta \rightarrow 0$). Note que a potência irradiada cresce muito com γ e, conseqüentemente, com a velocidade da carga. Além disso, como a aceleração entra numa forma quadrática na expressão acima, não importa se a carga está sendo acelerada ou freada, ela sempre emite preferencialmente no mesmo sentido que a velocidade, numa direção frontal. Quando uma carga em alta velocidade incide num metal, por exemplo, as colisões que ocorrem com os núcleos freiam a partícula, que emite radiação em cada colisão. Essa radiação é emitida preferencialmente para a frente, e ela é chamada de *bremssstrahlung*, ou radiação de frenamento. Ela aparece, por exemplo, num aparelho convencional de raios-x, em que um alvo metálico é bombardeado com elétrons altamente energéticos. Nesse caso, além da radiação de frenamento, também chamada de radiação branca, por ter um espectro de frequências bastante largo, alguns elétrons do alvo podem ser excitados e levados a níveis de energia mais altos, decaindo posteriormente e emitindo uma radiação de frequência bem definida, as linhas de emissão do alvo. Para o uso experimental de raios-x, é preciso eliminar a radiação branca, o que é feito mediante filtros ou monocromadores.

Outra aplicação importante envolve o uso de aceleradores lineares de partículas. Nesse caso, a perda de energia por meio de radiação pode ser relacionada à força externa aplicada às cargas responsáveis pela aceleração das mesmas. Para tanto, considere que o momento linear relativístico é dado pela expressão F.60 do volume II,

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde m_0 é a massa de repouso do objeto. Vamos calcular agora

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

ou

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} + m_0 \vec{v} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{1}{c^2} \right) \frac{d}{dt} (v^2) \right]$$

que fica

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \vec{a} + \frac{\gamma^3 m_0 \vec{v}}{2c^2} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

ou

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \vec{a} + \frac{\gamma^3 m_0 \vec{v}}{2c^2} 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ou ainda,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \vec{a} + \frac{\gamma^3 m_0 \vec{v}}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a}$$

ou então,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \left[\vec{a} + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \hat{v}(\hat{v} \cdot \vec{a}) \right]$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \left[\vec{a} + \gamma^2 \beta^2 \hat{v}(\hat{v} \cdot \vec{a}) \right]$$

ou

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \left[\vec{a} + \gamma^2 \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \hat{v}(\hat{v} \cdot \vec{a}) \right]$$

e, por fim,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \left[\vec{a} + (\gamma^2 - 1) \hat{v}(\hat{v} \cdot \vec{a}) \right] \quad (24.17)$$

No caso particular de um movimento unidimensional, como ocorre num acelerador linear, temos

$$\frac{dp}{dt} = \gamma m_0 \left[a + (\gamma^2 - 1)a \right]$$

ou

$$\frac{dp}{dt} = \gamma^3 m_0 a$$

que representa a força externa agindo na carga. Da expressão acima, podemos escrever

$$a = \frac{1}{\gamma^3 m_0} \frac{dp}{dt}$$

de modo que a potência irradiada dada pela equação 24.16 fica

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left(\frac{1}{\gamma^3 m_0} \frac{dp}{dt} \right)^2$$

ou

$$P = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi m_0^2 c} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (24.18)$$

A força exercida, responsável pela variação no momento linear da carga, pode ser relacionada ao trabalho realizado, ou à variação de energia da carga, por meio de

$$dW = F dx \Rightarrow F = \frac{dp}{dt} = \frac{dE}{dx}$$

Então,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi m_0^2 c} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2$$

A potência fornecida pelo meio externo (o acelerador) às cargas é dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dE}{dx}$$

Assim, a razão entre a potência perdida por radiação e a potência fornecida pelo acelerador para acelerar a carga é

$$\frac{P}{\frac{dE}{dt}} = \frac{\frac{\mu_0 Q^2}{6\pi m_0^2 c} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2}{v \frac{dE}{dx}}$$

ou

$$\frac{P}{\frac{dE}{dt}} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi m_0^2 v c} \frac{dE}{dx}$$

No limite extremamente relativístico, onde $\beta \rightarrow 1$, ou $v \rightarrow c$, temos

$$\frac{P}{\frac{dE}{dt}} = \frac{\mu_0 c^2 \frac{Q^2}{m_0 c^2}}{6\pi m_0 c^2} \frac{dE}{dx}$$

ou

$$\frac{P}{\frac{dE}{dt}} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{\frac{Q^2}{m_0 c^2}}{m_0 c^2} \frac{dE}{dx}$$

Considerando agora que, para um elétron,

$$m_0 c^2 = 9,11 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} = 81,99 \times 10^{-15} \text{ J} = 0,51 \text{ MeV}$$

$$\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{m_0 c^2} = \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{6\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 81,99 \times 10^{-15}} = 1,88 \times 10^{-15} \text{ m}$$

temos que, para que a perda por radiação num acelerador linear seja importante, a taxa de energia transferida pelo acelerador às cargas, por unidade de comprimento, deve ser da ordem de

$$\frac{dE}{dx} \sim \frac{m_0 c^2}{6\pi\epsilon_0 \frac{Q^2}{m_0 c^2}} \sim 2,7 \times 10^{14} \text{ MeV/m}$$

que é uma taxa absurdamente fora dos padrões usuais, que são em torno de 50 MeV/m. Assim, as perdas por emissão de radiação num acelerador linear são completamente desprezíveis, seja para elétrons ou partículas mais pesadas.

24.3 Radiação Emitida por uma Carga com uma Orientação Qualquer entre Velocidade e Aceleração

Para o caso geral, em que a velocidade e a aceleração da partícula têm qualquer orientação espacial, o campo elétrico é dado pela expressão 24.3, e seu módulo ao quadrado vale

$$\mathcal{E}_{\vec{a}}^2 = \vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}} = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^4} \frac{\left| \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] \right|^2}{R^2 [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^6}$$

A potência irradiada por unidade de ângulo sólido, dada pela expressão 24.8, torna-se

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]}{\mu_0 c} \mathcal{E}_{\vec{a}}^2 R^2$$

ou

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]}{\mu_0 c} \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}]|^2}{R^2 [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^6} R^2$$

ou ainda,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2}{16\pi^2 c} \frac{|\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}]|^2}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^5} \quad (24.19)$$

A potência total irradiada é obtida integrando-se a expressão acima, o que envolve um algebrismo longo e complicado. O resultado final fica

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left[a^2 - \left| \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{c} \right|^2 \right] \quad (24.20)$$

onde γ foi definido por 24.13. As expressões 24.19 e 24.20 são as generalizações de Liénard para a fórmula de Larmor, que é obtida quando $\gamma \rightarrow 1$ ($\beta \rightarrow 0$). Novamente a radiação emitida cresce muito com o aumento da velocidade da carga, por causa do fator γ^6 .

24.4 Radiação Emitida por uma Carga em Movimento Circular Uniforme

Um caso que envolve a emissão de radiação de grande importância atualmente envolve uma carga executando um movimento circular uniforme, como o descrito na figura 24.3. A circunferência descrita pela partícula tem um raio b , e a radiação emitida pela carga pode ser obtida considerando-se a posição instantânea da carga mostrada na figura. Nesse caso, consideramos que a velocidade seja dada por

$$\vec{v} = v \hat{\mathbf{k}}$$

enquanto a aceleração da carga vale

$$\vec{a} = a \hat{\mathbf{i}}$$

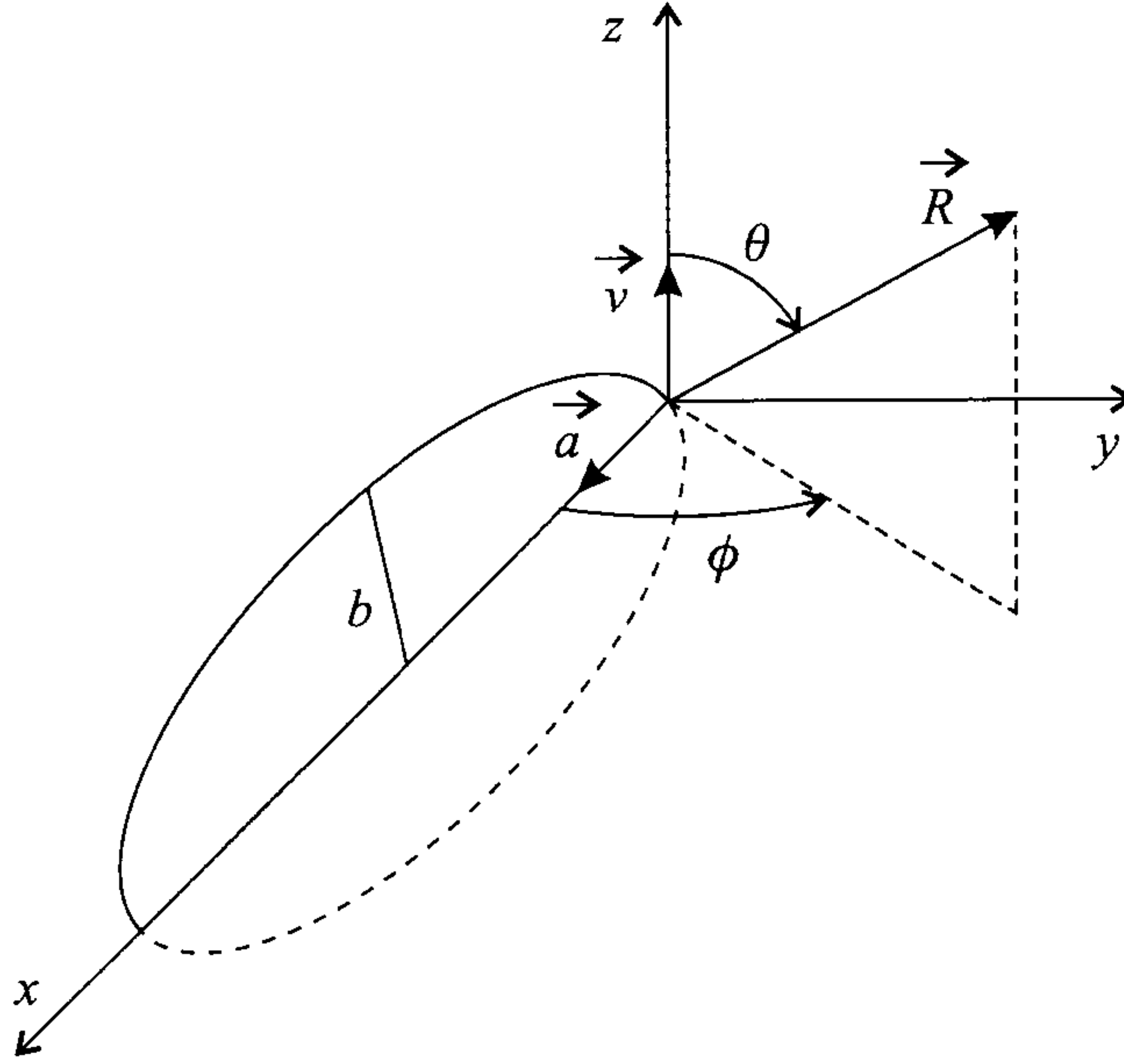


Figura 24.3: Carga Q executando um movimento circular uniforme no plano xz .

e, para o vetor $\vec{R}$, temos

$$\vec{R} = R \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + R \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + R \cos \theta \hat{\mathbf{k}}$$

de modo que

$$\hat{R} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (24.21)$$

Para determinar a potência irradiada por unidade de ângulo sólido, podemos utilizar a expressão 24.19 para a fórmula de Liénard, isto é,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2}{16\pi^2 c} \frac{\left| \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] \right|^2}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^5}$$

de modo que temos que calcular alguns termos na fração. O primeiro fator é

$$\begin{aligned} (\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a} &= (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}} - \beta \hat{\mathbf{k}}) \times a \hat{\mathbf{i}} \\ &= [\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + (\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{k}}] \times a \hat{\mathbf{i}} \\ (\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a} &= -a \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{k}} + a(\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Agora precisamos de

$$\begin{aligned} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] &= (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \\ &\quad \times [-a \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{k}} + a(\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{j}}] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] &= a \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + a \sin \theta \cos \phi (\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{k}} - a \sin^2 \theta \sin^2 \phi \hat{\mathbf{i}} - a \cos \theta (\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] &= a \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + a \sin \theta \cos \phi (\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{k}} - a(\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta - \beta \cos \theta) \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] &= a [\sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + \sin \theta \cos \phi (\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{k}} - (\sin^2 \theta \sin^2 \phi + 1 - \sin^2 \theta - \beta \cos \theta) \hat{\mathbf{i}}] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] &= a \left\{ \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{j}} \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cos \phi (\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{k}} - [\sin^2 \theta (\sin^2 \phi - 1) + 1 - \beta \cos \theta] \hat{\mathbf{i}} \right\} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] &= a \left\{ \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{j}} \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cos \phi (\cos \theta - \beta) \hat{\mathbf{k}} + [\sin^2 \theta \cos^2 \phi - (1 - \beta \cos \theta)] \hat{\mathbf{i}} \right\}\end{aligned}$$

O módulo ao quadrado da expressão acima vale

$$\begin{aligned}\left| \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] \right|^2 &= a^2 \left\{ \sin^4 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \cos^2 \phi (\cos \theta - \beta)^2 + [\sin^2 \theta \cos^2 \phi - (1 - \beta \cos \theta)]^2 \right\}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\left| \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] \right|^2 &= \\ &= a^2 [\sin^2 \theta \cos^2 \phi (\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \beta + \beta^2) \\ &\quad + \sin^4 \theta \cos^4 \phi - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi (1 - \beta \cos \theta) + (1 - \beta \cos \theta)^2]\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\left| \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] \right|^2 &= a^2 \left\{ \sin^2 \theta \cos^2 \phi [\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \beta \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 2(1 - \beta \cos \theta)] + (1 - \beta \cos \theta)^2 \right\}\end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\left| \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] \right|^2 &= \\ &= a^2 \left\{ \sin^2 \theta \cos^2 \phi [1 - 2 \cos \theta \beta + \beta^2 - 2 + 2 \beta \cos \theta] + (1 - \beta \cos \theta)^2 \right\}\end{aligned}$$

ou, finalmente,

$$\left| \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{a}] \right|^2 = a^2 [(1 - \beta \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi (1 - \beta^2)] \quad (24.22)$$

Por último, precisamos calcular

$$\begin{aligned}1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta} &= 1 - (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \cdot \beta \hat{\mathbf{k}} \\ 1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta} &= 1 - \beta \cos \theta\end{aligned} \quad (24.23)$$

Reunindo agora as expressões 24.22 e 24.23, podemos reescrever a expressão 24.19 como

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2 [(1 - \beta \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi (1 - \beta^2)]}{16\pi^2 c [1 - \beta \cos \theta]^5}$$

ou

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{16\pi^2 c [1 - \beta \cos \theta]^5} \quad (24.24)$$

Por essa expressão, nota-se que os valores de máxima emissão ocorrem para $\theta = 0$, quando então o fator angular torna-se $(1 - \beta)^{-3}$, que cresce muito quando $\beta \rightarrow 1$, isto é, a carga move-se em velocidade extremamente relativística. A emissão se anula quando ocorre

$$\frac{dP}{d\Omega} = 0$$

ou

$$\frac{\mu_0 Q^2 a^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{16\pi^2 c [1 - \beta \cos \theta]^5} = 0$$

ou seja,

$$(1 - \beta \cos \theta)^2 = (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi$$

ou

$$1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta = (1 - \beta^2)(1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \phi$$

ou ainda,

$$1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta = \cos^2 \phi - \cos^2 \theta \cos^2 \phi - \beta^2 \cos^2 \phi + \beta^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi$$

e então,

$$1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2 \cos^2 \theta = (1 - \beta^2) \cos^2 \phi + (\beta^2 - 1) \cos^2 \theta \cos^2 \phi$$

de modo que temos

$$[\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi] \cos^2 \theta - 2\beta \cos \theta + 1 - (1 - \beta^2) \cos^2 \phi = 0$$

e assim,

$$\cos \theta = \frac{2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4[\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi][1 - (1 - \beta^2) \cos^2 \phi]}}{2[\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi]}$$

ou

$$\begin{aligned} \cos \theta = & \frac{\beta}{\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi} \\ & \pm \frac{1}{2[\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi]} \left\{ 4\beta^2 - 4[\beta^2 - \beta^2(1 - \beta^2) \cos^2 \phi \right. \\ & \left. - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi + (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi(1 - \beta^2) \cos^2 \phi] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \cos \theta = & \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - [\beta^2 + (\beta^2 - 1)^2 \cos^2 \phi - (\beta^2 - 1)^2 \cos^4 \phi]}}{\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi} \\ \cos \theta = & \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - [\beta^2 + (\beta^2 - 1)^2 \cos^2 \phi(1 - \cos^2 \phi)]}}{\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi} \\ \cos \theta = & \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - [\beta^2 + (\beta^2 - 1)^2 \cos^2 \phi \sin^2 \phi]}}{\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi} \\ \cos \theta = & \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \beta^2 - (\beta^2 - 1)^2 \cos^2 \phi \sin^2 \phi}}{\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi} \\ \cos \theta = & \frac{\beta \pm i(\beta^2 - 1) \cos \phi \sin \phi}{\beta^2 - (\beta^2 - 1) \cos^2 \phi} \end{aligned}$$

O resultado acima implica que só há solução real quando $\phi = 0$, isto é, só existe uma direção em que a emissão se anula no plano da órbita ². Nesse caso, temos

² Apesar de $\phi = \frac{\pi}{2}$ também resultar num valor real para o cosseno do ângulo θ , ele é excluído pela equação 24.24.

$$\cos \theta = \frac{\beta}{\beta^2 - (\beta^2 - 1)}$$

ou

$$\cos \theta = \beta$$

A figura 24.4 ilustra o padrão de emissão de radiação para alguns valores de β .

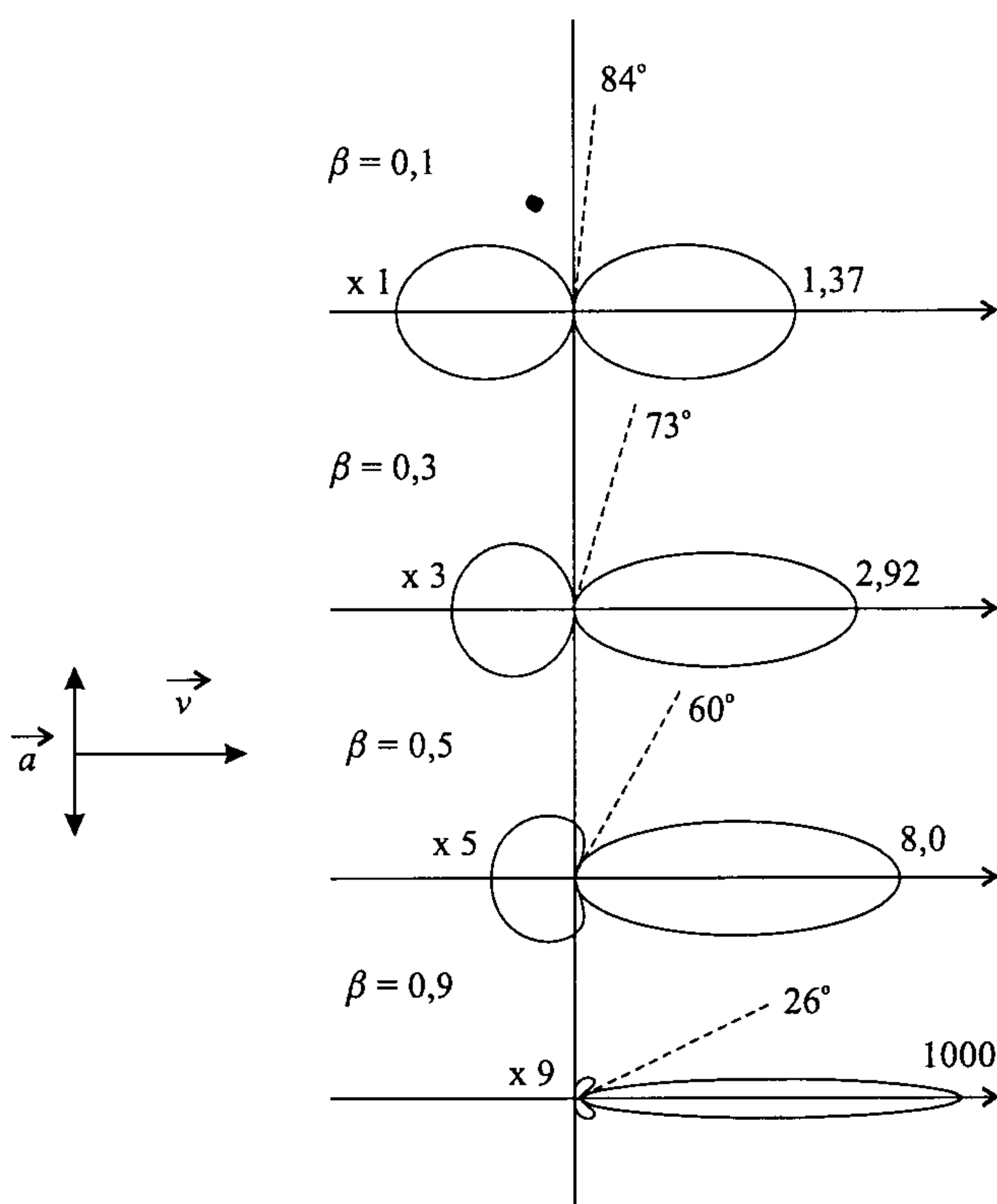


Figura 24.4: Padrão de emissão de uma carga movendo-se em movimento circular uniforme. Nos ângulos indicados a emissão é nula. A magnitude dos lobos frontais é indicada em relação aos lobos traseiros, que estão ampliados pelos fatores indicados para visualização.

No limite $\beta \rightarrow 1$, a expressão 24.24 acima torna-se, expandindo $\cos \theta$ e $\sin \theta$, substituindo β por γ onde apropriado e também usando $x = \gamma^{-1}$,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left\{ \frac{1}{\left[1 - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]^3} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\theta^2 \cos^2 \phi}{\left[1 - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]^5} \right\}$$

Expandindo as raízes quadradas nos denominadores, temos

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left\{ \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]^3} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\theta^2 \cos^2 \phi}{\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]^5} \right\}$$

ou

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left\{ \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 \theta^2}{4}\right)\right]^3} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\theta^2 \cos^2 \phi}{\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 \theta^2}{4}\right)\right]^5} \right\}$$

O último termo nos denominadores é muito menor que os outros e pode ser desprezado, de modo que achamos

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left\{ \frac{8}{(\theta^2 + x^2)^3} - \frac{32}{\gamma^2} \frac{\theta^2 \cos^2 \phi}{(\theta^2 + x^2)^5} \right\}$$

ou, voltando para γ ,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{2\pi^2 c} \left\{ \frac{1}{(\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^3} - \frac{4}{\gamma^2} \frac{\theta^2 \cos^2 \phi}{(\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2})^5} \right\}$$

e então,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{2\pi^2 c} \left\{ \frac{\gamma^6}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^3} - \frac{4\gamma^{10}}{\gamma^2} \frac{\theta^2 \cos^2 \phi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} \right\}$$

e, finalmente,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{2\pi^2 c} \frac{\gamma^6}{(1 + (\gamma\theta)^2)^3} \left\{ 1 - \frac{4(\gamma\theta)^2 \cos^2 \phi}{[1 + (\gamma\theta^2)]^2} \right\}$$

A potência total emitida pela carga é obtida considerando-se a integral da expressão 24.24, o que resulta na equação (veja o exercício 24.1)

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c} \quad (24.25)$$

A potência irradiada também cresce muito com o aumento da velocidade da carga. É interessante reescrever essa expressão em termos da força externa aplicada para manter a carga na órbita. Nesse caso, a força é centrípeta, e a equação 24.17 torna-se

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \vec{a}$$

já que $\vec{a}$ é radial e ortogonal à velocidade $\vec{v}$ da carga. Assim, temos

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 \gamma^4}{6\pi c} \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2$$

ou

$$P = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \gamma^2 \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \quad (24.26)$$

que exhibe uma dependência com γ^2 , fazendo com que a potência irradiada cresça consideravelmente no limite relativístico. Comparando com a expressão 24.18 correspondente para um acelerador linear,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi m_0^2 c} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2$$

vemos que, para uma mesma força externa aplicada, a emissão de energia numa órbita circular é da ordem de γ^2 vezes maior que num acelerador linear, o que torna os aceleradores circulares, como síncrotrons e bétatrons, muito mais eficientes se o objetivo é a produção de radiação. A radiação emitida acima é chamada de radiação síncrotron, e ela é utilizada largamente hoje em dia em aceleradores síncrotrons para investigação científica em áreas como Física, Química, Engenharia de Materiais e Biologia, por exemplo. Ela também pode ser produzida em plasmas quentes, como em nebulosas estelares. A perda de energia por revolução pode ser determinada aproximadamente considerando que a órbita tenha um raio b , de modo que o período de revolução é dado por

$$T = \frac{2\pi b}{v} = \frac{2\pi b}{c\beta}$$

Assim, a energia emitida por radiação torna-se

$$\Delta E = PT = \frac{\mu_0 Q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c} \frac{2\pi b}{c\beta}$$

Como a é uma aceleração centrípeta, temos

$$\Delta E = \frac{\mu_0 Q^2 \gamma^4 b}{3c^2 \beta} \left(\frac{v^2}{b} \right)^2$$

ou

$$\Delta E = \frac{\mu_0 Q^2 \gamma^4 c^2 \beta^3}{3b}$$

ou ainda,

$$\Delta E = \frac{Q^2 \gamma^4 \beta^3}{3\epsilon_0 b}$$

Esta expressão pode ser escrita em termos da energia relativística dos elétrons se fizermos

$$\Delta E = \frac{Q^2 \gamma^4 \beta^3}{3\epsilon_0 b} \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2} \right)^4$$

ou, como $E = \gamma m_0 c^2$,

$$\Delta E = \frac{Q^2 \beta^3}{3\epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{b}$$

Para elétrons em que $\beta \rightarrow 1$, a expressão acima resulta em

$$\Delta E(\text{MeV}) = 8,85 \times 10^{-2} \frac{[E(\text{GeV})]^4}{b(\text{m})}$$

onde as unidades de medida estão escritas entre parênteses. Para o primeiro síncrotron de elétrons, que tinha $b = 1$ m e $E_{max} = 300$ MeV, a perda de energia por revolução era da ordem de 1 keV por volta, enquanto o ganho em energia era maior, mas dessa mesma ordem de grandeza, de modo que ΔE não era desprezível. No síncrotron brasileiro, situado no Laboratório Nacional

de Luz Síncrotron (LNLS), em Campinas, atualmente ³ a energia do anel vale $E = 1,37$ GeV, com campos magnéticos nos dipolos magnéticos da ordem de 1,67 T e uma perda de energia por volta de 114 keV. O anel tem um diâmetro médio de 29,7 m e a corrente máxima que circula por ele vale 250 mA.

Da comparação feita entre as potências emitidas numa órbita circular, gerada por uma aceleração perpendicular à velocidade, e num movimento em que a aceleração é paralela à velocidade, vemos que a radiação emitida quando $\vec{a} \perp \vec{v}$ é sempre maior que a observada quando $\vec{a} \parallel \vec{v}$, para valores similares de força externa. Em particular, essa diferença cresce com γ^2 , o que indica que, em geral, num movimento extremamente relativístico ($\gamma \rightarrow \infty$) curvo qualquer, em que a aceleração total possa ser decomposta numa aceleração tangencial somada a uma aceleração centrípeta, a maior parte da radiação emitida pela carga estará associada à parte centrípeta, excetuando-se os trechos retilíneos da trajetória. Assim, a radiação emitida por uma carga executando um movimento arbitrário é dada, aproximadamente, pela radiação instantânea emitida considerando o movimento como circular uniforme. Assim, ao se mover, a carga “ilumina” o caminho à sua frente com a radiação emitida, de uma forma similar aos faróis de um carro. A radiação emitida para frente fica confinada numa região de abertura angular bastante pequena, conforme mostra a figura 24.4. Tal abertura é da ordem de γ^{-1} . Assim, considerando um trajeto circular e um observador situado no plano da órbita, a radiação chega ao observador em pulsos que correspondem às posições da carga nas quais a velocidade desta está orientada em direção ao observador. Chamando de b o raio da órbita, o comprimento de arco descrito pela carga quando ela está numa posição em que a radiação por ela emitida chega ao observador é dado por

$$l = \gamma^{-1}b = \frac{b}{\gamma}$$

o que corresponde a um intervalo de tempo

$$\Delta t = \frac{l}{v} = \frac{b}{\gamma v} = \frac{b}{c\gamma\beta}$$

Quando a carga gira na órbita, ela passa por um ponto a partir do qual a radiação por ela emitida começa a chegar ao observador. Este é o ponto A da figura 24.5. Com o passar do tempo, a carga se movimenta irradiando em

³ Dados de abril de 2004. O LNLS mantém a página <http://www.lnls.br> na internet.

direção ao observador, até que ela chega a um ponto B a partir do qual ela não “ilumina” mais o observador.

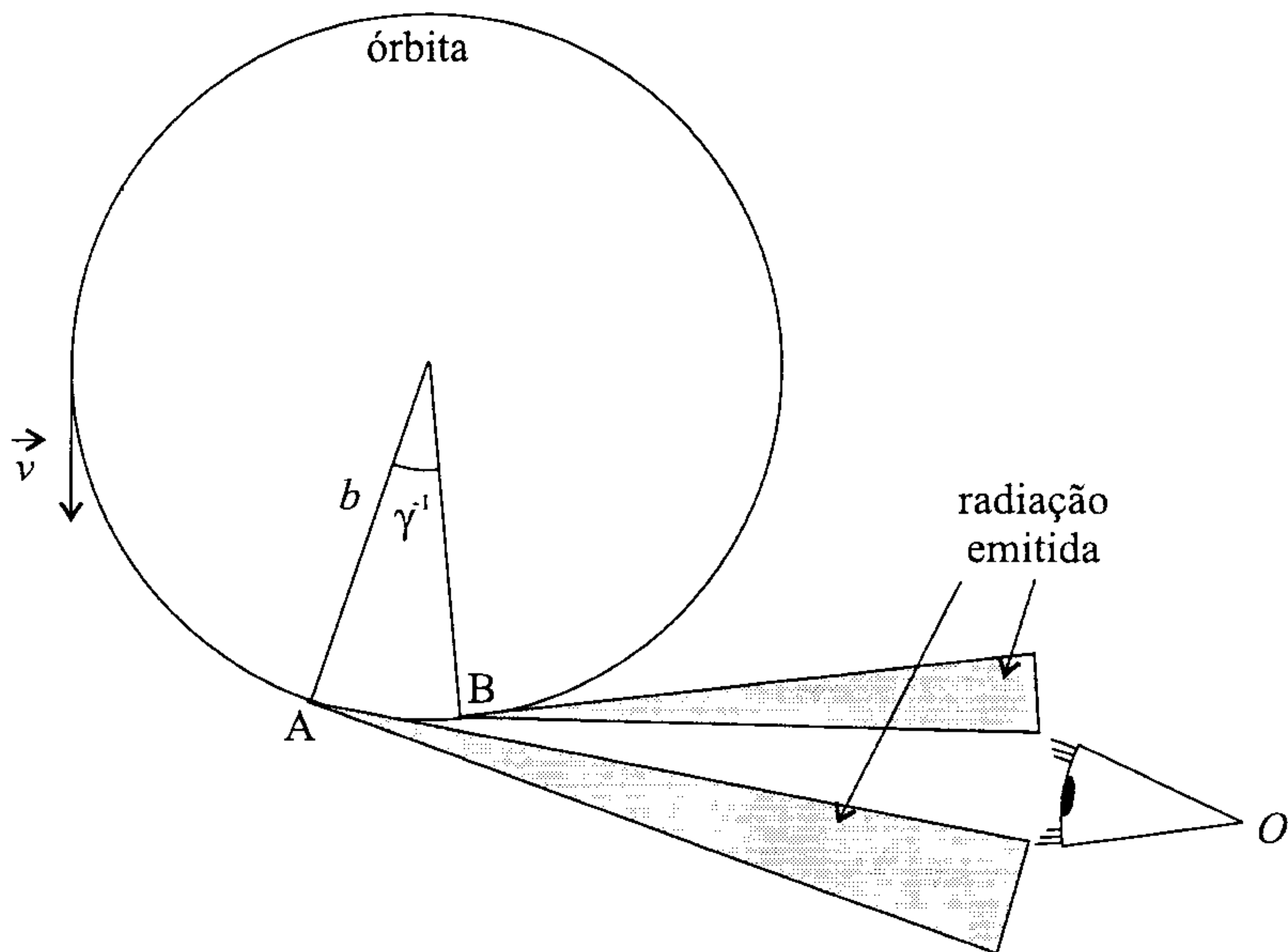


Figura 24.5: Representação da radiação emitida por uma carga em movimento circular uniforme irradiando em direção a um observador O .

Supondo que o pulso emitido possa ser aproximado por um pulso retangular e que o arco de circunferência $\widehat{AB}$ possa ser aproximado por um segmento de reta $\overline{AB}$, temos que o pulso emitido a partir do ponto A anda, no intervalo de tempo Δt ,

$$X = c\Delta t = c \frac{b}{c\gamma\beta} = \frac{b}{\gamma\beta}$$

Enquanto isso, a carga anda de A até B, pela distância l , de modo que o pulso emitido em B estará atrás do emitido em A de uma distância

$$\Delta X = X - l = \frac{b}{\gamma\beta} - \frac{b}{\gamma}$$

ou

$$\Delta X = \frac{b}{\gamma} \left[\frac{1}{\beta} - 1 \right]$$

que pode ser reescrito como

$$\Delta X = \frac{b}{\gamma} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

ou, expandindo em série de Taylor,

$$\Delta X = \frac{b}{\gamma} \left[1 + \frac{1}{2\gamma^2} - 1 \right]$$

e então,

$$\Delta X = \frac{b}{\gamma^3}$$

Portanto, o pulso tem um tamanho espacial ΔX , correspondendo a um intervalo de tempo

$$\Delta T = \frac{\Delta X}{c} = \frac{b}{c\gamma^3}$$

Conseqüentemente, considerando que o observador O tenha algum dispositivo sensível a frequências, ele pode fazer uma análise de Fourier do pulso retangular que nele chega. Assim, ele pode escrever o pulso em termos de uma série de Fourier, que terá componentes apreciáveis em frequência até a frequência crítica

$$\omega_c \simeq \frac{2\pi}{\Delta T} \simeq 2\pi \frac{c}{b} \gamma^3 \quad (24.27)$$

onde

$$\omega_0 = \frac{c}{b} \quad (24.28)$$

é a frequência angular de rotação da carga no limite relativístico $\beta \rightarrow 1$. Note, por esta expressão, que mesmo que a frequência ω_0 não seja muito alta, da ordem de MHz, por exemplo, é possível obter radiação em frequências bastante altas, de acordo com a dependência da equação 24.27 em γ^3 , bastando

para isso utilizar uma energia de funcionamento do acelerador apropriada, já que

$$E = \gamma m_0 c^2$$

Por exemplo, no caso do LNLS, $E = 1,37$ GeV, e temos

$$\gamma = \frac{1,37 \text{ GeV}}{0,51 \text{ MeV}} \simeq 2,7 \times 10^3$$

e então,

$$\gamma^3 \simeq 2 \times 10^{10}$$

A frequência de rotação pode ser obtida aproximadamente através da equação 24.28,

$$\omega_0 = \frac{c}{b} = \frac{3 \times 10^8}{14,85} \simeq 2,0 \times 10^7 \text{ rad/s}$$

de modo que, pela expressão 24.27, temos

$$\omega_c \simeq 2\pi \frac{c}{b} \gamma^3 \simeq 8\pi \times 10^{17} \text{ rad/s}$$

que corresponde a uma frequência

$$\nu_c \simeq 2 \times 10^{17} \text{ Hz}$$

que já está na faixa dos raios-x de energia mais baixa. De fato, efetuando os cálculos com mais rigor, e de acordo com as especificações do LNLS, chega-se a raios-x com fluxo razoável na faixa dos 9–10 keV, enquanto para EXAFS energias da ordem de 19 keV com fluxo mais baixo são possíveis. É importante notar que ainda não tratamos formalmente do comportamento da radiação emitida com relação à frequência medida por um observador, o que será feito em seguida.

24.5 Distribuição em Frequência da Radiação Emitida por Cargas Pontuais em Movimento

Quando ocorre emissão de radiação pelas cargas em movimento, essa radiação, ao chegar a um observador capaz de fazer uma análise em frequências por meio de algum dispositivo ⁴, é percebida como sendo formada por um espectro ou distribuição em frequências. Nesse caso, é importante determinar a potência que chega ao observador em função desta distribuição nas frequências observadas, para que se decida, por exemplo, se o fluxo necessário a uma certa experiência pode ou não ser conseguido, em que frequências e, eventualmente, que método pode ser usado para superar alguma possível dificuldade. Para tanto, iniciamos com a equação 24.6,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E}_{\vec{a}}^2 [R(t_r)]^2$$

Note que agora estamos interessados na radiação que chega ao observador, por isso estamos usando o tempo t do observador na expressão acima. O campo elétrico retardado $\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}$ é dado pela equação 24.3,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]}$$

Vamos definir a grandeza auxiliar

$$\vec{\mathfrak{A}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 c}} R(t_r) \vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}} \quad (24.29)$$

Assim, temos

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\vec{\mathfrak{A}}(t)|^2 \quad (24.30)$$

Agora, a energia irradiada por unidade de ângulo sólido é obtida integrando a equação 24.6 no tempo, isto é, usando também 24.30,

⁴ Um exemplo simples consiste num monocromador formado por dois monocristais paralelos de silício, orientados numa dada direção cristalográfica específica como (1 1 1), que são utilizados para monocromatizar o feixe que sai de um síncrotron para ser usado numa experiência de raios-x.

$$\frac{dW(t)}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(t)|^2 dt \quad (24.31)$$

Podemos converter esta integral temporal numa integral sobre frequências. Primeiro, definimos a transformada de Fourier

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathfrak{A}}(t) e^{i\omega t} dt \quad (24.32)$$

cuja transformada inversa é

$$\vec{\mathfrak{A}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathfrak{A}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (24.33)$$

Agora, usamos o primeiro teorema de Parseval para transformar 24.31 numa integral sobre frequências. O primeiro teorema de Parseval é uma consequência do segundo teorema de Parseval, como veremos em seguida.

Teorema 24.1 (Segundo Teorema de Parseval). *Considere que as funções $f(x)$ e $g(x)$ sejam integráveis e reais em todo o espaço, com transformadas de Fourier*

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (24.34)$$

e

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx \quad (24.35)$$

Então, para essas funções vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k) G(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx \quad (24.36)$$

que é o segundo teorema de Parseval. Vejamos sua demonstração.

Demonstração. Primeiro, vamos escrever, usando a equação 24.35,

$$G(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx$$

Agora, calculamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)G(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx} dx \right\} dk$$

Vamos inverter a ordem em que as integrações são feitas, e obter

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)G(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx} dk \right\} dx$$

A transformada inversa de $F(k)$ é

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx} dk \quad (24.37)$$

e assim, usando a equação 24.37, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)G(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$$

o que prova o segundo teorema de Parseval.

□

Vejamos agora o primeiro teorema de Parseval, que é o nosso resultado de interesse.

Teorema 24.2 (Primeiro Teorema de Parseval). *Seja $f(x)$ uma função integrável real em todo espaço, com a transformada de Fourier dada pela equação 24.34,*

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx$$

Então, vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (24.38)$$

que é o primeiro teorema de Parseval. Segue a sua demonstração.

Demonstração. Para provar o primeiro teorema de Parseval, usamos o segundo teorema com $g(x) = f(x)$, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)F(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x) dx \quad (24.39)$$

Vamos considerar o complexo conjugado da expressão 24.34, ou seja,

$$\overline{F(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx}$$

ou

$$\overline{F(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)e^{ikx}} dx$$

Como $f(x)$ é real, temos

$$\overline{F(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

ou

$$\overline{F(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i(-k)x} dx$$

de modo que

$$\overline{F(k)} = F(-k)$$

Assim, voltando à equação 24.39, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\overline{F(k)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

o que demonstra o primeiro teorema de Parseval.

□

Com o uso do teorema de Parseval, e identificando

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow t & k \rightarrow \omega \\ f(x) \rightarrow \vec{\mathfrak{A}}(t) & F(k) \rightarrow \vec{\mathfrak{A}}(\omega) \end{array}$$

temos que a equação 24.31 pode ser escrita como

$$\frac{dW(t)}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega \quad (24.40)$$

Agora, podemos definir

$$\frac{dW(t)}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{d^2\mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} d\omega \quad (24.41)$$

como sendo a energia irradiada por unidade de frequência e ângulo sólido. Usando 24.40, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^0 |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega + \int_0^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega$$

ou, fazendo $\omega \rightarrow -\omega$ na primeira integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega = - \int_{\infty}^0 |\vec{\mathfrak{A}}(-\omega)|^2 d\omega + \int_0^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega$$

e então, trocando os limites de integração, o que troca o sinal da integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(-\omega)|^2 d\omega + \int_0^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} [|\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 + |\vec{\mathfrak{A}}(-\omega)|^2] d\omega$$

Usando novamente 24.40,

$$\frac{dW(t)}{d\Omega} = \int_0^{\infty} [|\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 + |\vec{\mathfrak{A}}(-\omega)|^2] d\omega$$

e agora, comparando com a equação 24.41, temos

$$\frac{d^2\mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = |\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 + |\vec{\mathfrak{A}}(-\omega)|^2 \quad (24.42)$$

Como $\vec{\mathfrak{A}}(t)$ é real, temos, de 24.32,

$$\vec{\mathfrak{A}}(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathfrak{A}}(t) e^{-i\omega t} dt$$

ou

$$\vec{\mathfrak{A}}(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\vec{\mathfrak{A}}(t) e^{i\omega t}} dt$$

ou ainda,

$$\vec{\mathfrak{A}}(-\omega) = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathfrak{A}}(t) e^{i\omega t} dt}$$

e assim,

$$\vec{\mathfrak{A}}(-\omega) = \overline{\vec{\mathfrak{A}}(\omega)}$$

Voltando agora à equação 24.42, obtemos

$$\frac{d^2\mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = 2|\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 \quad (24.43)$$

Assim, para determinar o comportamento da energia emitida em função da frequência observada e do ângulo sólido, precisamos determinar $\vec{\mathfrak{A}}(\omega)$, o que é feito por meio da equação 24.32,

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathfrak{A}}(t) e^{i\omega t} dt$$

lembrando que $\vec{\mathfrak{A}}(t)$ é definido pela expressão 24.29,

$$\vec{\mathfrak{A}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 c}} R(t_r) \vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}$$

onde, por sua vez, $\vec{\mathcal{E}}_{\vec{a}}$ é dado pela equação 24.3. Reunindo tudo, temos

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 c}} R(t_r) \left\{ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \frac{\vec{\alpha}}{c}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]} \right\} e^{i\omega t} dt$$

ou

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c \sqrt{2\pi\mu_0 c}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2 [1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]} \right\} e^{i\omega t} dt$$

ou ainda,

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{32\pi^3 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} e^{i\omega t} dt$$

e, simplificando,

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \sqrt{\frac{Q^2}{32\pi^3 \epsilon_0 c}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} e^{i\omega t} dt$$

Note que todo o termo entre chaves é calculado no tempo retardado t_r , enquanto a integral é feita no tempo t do observador. Vamos fazer uma troca de variáveis para deixar a integral no tempo t_r , que é dado por 20.33,

$$t_r = t - t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_Q(t_r)|}{c} = t - \frac{R(t_r)}{c}$$

Para isso, precisamos da equação 20.125,

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

que fornece

$$dt = (1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}) dt_r$$

de modo que achamos

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \sqrt{\frac{Q^2}{32\pi^3 \epsilon_0 c}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} e^{i\omega(t_r + \frac{R(t_r)}{c})} (1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}) dt_r$$

ou, para simplificar a notação, vamos fazer $T = t_r$, de modo que

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \sqrt{\frac{Q^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\} e^{i\omega(T + \frac{R(T)}{c})} dT \quad (24.44)$$

Como, por hipótese, para que a energia emitida pelas cargas em movimento seja entendida como radiação é preciso que esta energia chegue até o observador situado a uma grande distância da fonte emissora, podemos fazer uma aproximação na equação 24.44. Como

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_Q$$

temos que o versor $\hat{R}$ é praticamente constante durante o movimento da carga na sua trajetória, já que $r \gg r_Q$, onde r é a distância da origem ao ponto de observação. Além disso, temos

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_Q| = [r^2 + r_Q^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_Q]^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$R = r \left[1 + \frac{r_Q^2}{r^2} - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_Q}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Podemos expandir a equação acima numa série de Taylor, guardando apenas os termos de ordem mais relevante, isto é,

$$R \simeq r \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r_Q^2}{r^2} - \frac{1}{2} 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_Q}{r^2} \right]$$

ou

$$R \simeq r - \hat{r} \cdot \vec{r}_Q + \frac{1}{2} \frac{r_Q^2}{r}$$

Quando $r \gg r_Q$, podemos desprezar o último termo. Além disso, $\hat{r} = \hat{R}$, de modo que

$$R \simeq r - \hat{R} \cdot \vec{r}_Q$$

Voltando à equação 24.44, obtemos

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \sqrt{\frac{Q^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\} e^{i\omega(T + \frac{r - \hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c})} dT$$

ou

$$\vec{\mathfrak{A}}(\omega) = \sqrt{\frac{Q^2}{32\pi^3\epsilon_0 c}} e^{i\omega \frac{r}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\} e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c})} dT$$

de modo que a equação 24.43 fica

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} &= 2|\vec{\mathfrak{A}}(\omega)|^2 \\ &= \frac{Q^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \right\} e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c})} dT \right|^2 \end{aligned} \quad (24.45)$$

Consideramos agora o fator

$$\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}}$$

e vamos calcular sua derivada temporal, lembrando que $\hat{R}$ é constante, isto é,

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] = \frac{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}][\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha})] - [\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})](-\hat{R} \cdot \vec{\alpha})}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2}.$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left[\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] &= \\ &= \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha}) - (\hat{R} \cdot \vec{\beta})[\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha})] + (\hat{R} \cdot \vec{\alpha})[\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \end{aligned}$$

A propriedade 1.19a estabelece que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Assim, temos

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) = (\hat{R} \cdot \vec{\beta})\hat{R} - (\hat{R} \cdot \hat{R})\vec{\beta}$$

ou

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) = (\hat{R} \cdot \vec{\beta})\hat{R} - \vec{\beta}$$

e também

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha}) = (\hat{R} \cdot \vec{\alpha})\hat{R} - (\hat{R} \cdot \hat{R})\vec{\alpha}$$

ou

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha}) = (\hat{R} \cdot \vec{\alpha})\hat{R} - \vec{\alpha}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left[\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] = \\ \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha}) - (\hat{R} \cdot \vec{\beta})[(\hat{R} \cdot \vec{\alpha})\hat{R} - \vec{\alpha}] + (\hat{R} \cdot \vec{\alpha})[(\hat{R} \cdot \vec{\beta})\hat{R} - \vec{\beta}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left[\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] = \frac{1}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2} \\ \times \left\{ \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha}) - (\hat{R} \cdot \vec{\beta})(\hat{R} \cdot \vec{\alpha})\hat{R} + \vec{\alpha}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) \right. \\ \left. + (\hat{R} \cdot \vec{\alpha})(\hat{R} \cdot \vec{\beta})\hat{R} - \vec{\beta}(\hat{R} \cdot \vec{\alpha}) \right\} \end{aligned}$$

que fica

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] = \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha}) + \vec{\alpha}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}(\hat{R} \cdot \vec{\alpha})}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2}$$

Usando novamente 1.19a, temos

$$\hat{R} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \vec{\alpha}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}(\hat{R} \cdot \vec{\alpha})$$

e assim,

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] = \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha}) + \hat{R} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2}$$

ou

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] = \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\alpha}) - \hat{R} \times (\vec{\beta} \times \vec{\alpha})}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2}$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dT} \left[\frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right] = \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2}$$

Note que este fator corresponde ao termo entre chaves na equação 24.45. Portanto, agora vamos fazer uma integração por partes nessa equação, chamando

$$\begin{aligned} u &= e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c})} & \rightarrow du &= i\omega(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}) e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c})} dT \\ dv &= \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \vec{\alpha}]}{[1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}]^2} dT & \rightarrow v &= \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \end{aligned}$$

de modo que achamos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} &= \frac{Q^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \left[e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c})} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \right]_{-\infty}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} i\omega(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}) e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c})} dT \right|^2 \end{aligned}$$

ou, fazendo a hipótese razoável de que os colchetes convergem para zero nos limites de integração, temos

$$\frac{d^2 \mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = \frac{Q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})] e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c})} dT \right|^2 \quad (24.46)$$

Se, ao invés de uma carga, tivermos várias cargas se movimentando, então obtemos

$$\frac{d^2 \mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} Q_j [\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})] e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_{Q_j}(T)}{c})} dT \right|^2 \quad (24.47)$$

e se tivermos uma distribuição contínua de cargas, na forma de uma densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r}, T)$, a integral acima torna-se

$$\frac{d^2\mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_V \left\{ \hat{R} \times [\hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}', T)] \right\} e^{i\omega(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}'}{c})} dV dT \right|^2 \quad (24.48)$$

Podemos agora estudar um caso particular importante relacionado à equação 24.46. Na seção 24.4 vimos que a radiação emitida por uma carga executando um movimento qualquer é dada, na sua quase totalidade, pela radiação associada à componente centrípeta do movimento. Além disso, vimos também que a abertura angular do feixe de radiação que atinge o observador O que possui algum detector de frequências é muito pequeno. Assim, para uma dada trajetória qualquer, precisamos conhecer apenas uma pequena parte dela para determinar a radiação que chega ao detector, e podemos aproximar esse segmento da trajetória por um arco de circunferência, que é descrito com uma velocidade escalar v essencialmente constante, porque a aceleração é centrípeta. A figura 24.6 apresenta, para este caso, as grandezas relevantes para o problema.

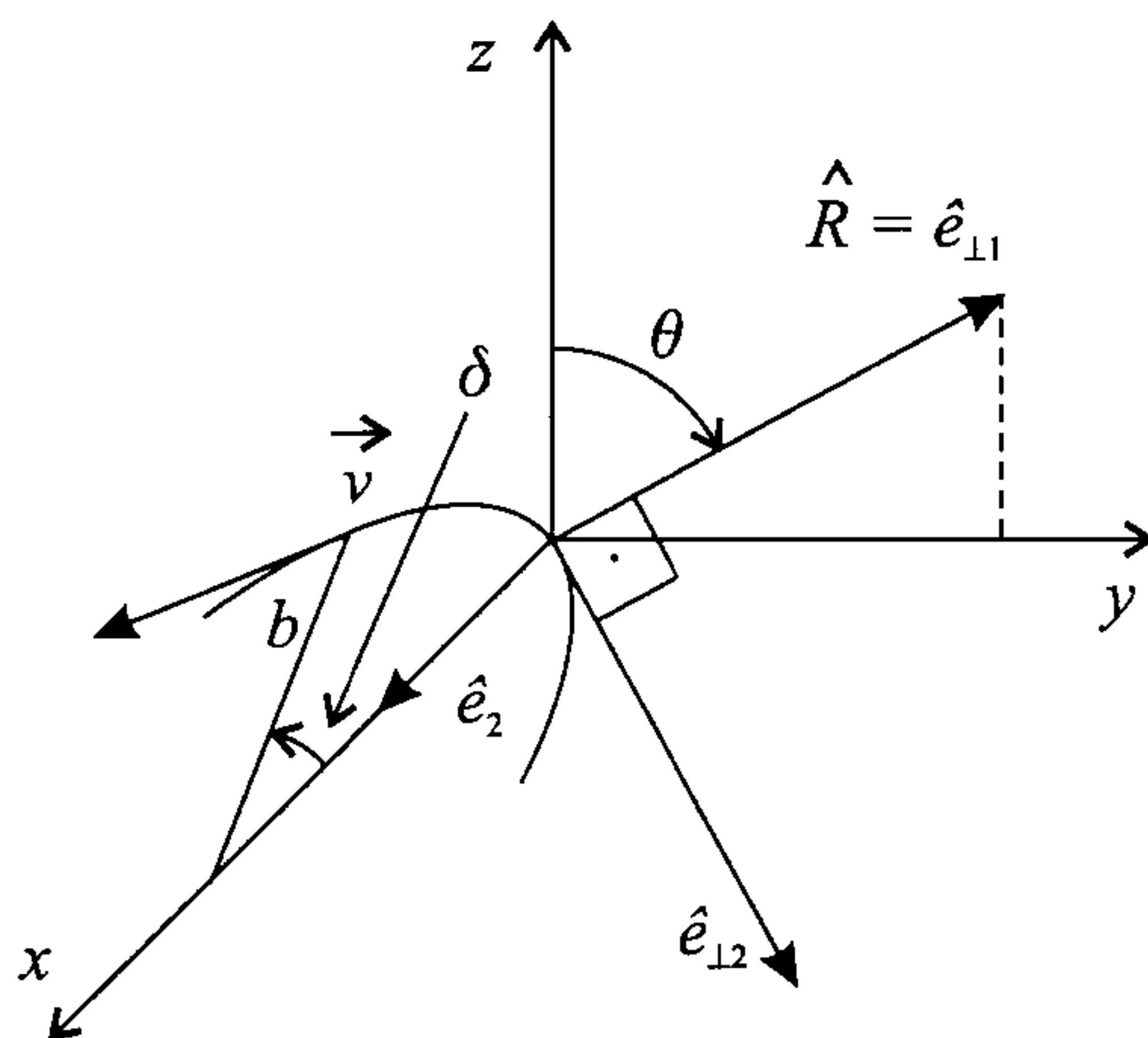


Figura 24.6: Parte relevante da trajetória da carga Q executando um movimento qualquer e emitindo radiação em direção a um observador capaz de analisar o espectro de frequências emitidas.

Na figura, colocamos a parte da órbita de interesse, aproximada por um arco de circunferência, no plano xz , e o versor $\hat{R}$ ($= \hat{e}_{\perp 1}$) no plano yz .

Quando $\theta \rightarrow 0$, $\hat{R} \rightarrow \hat{\mathbf{k}}$. O versor que está no plano da órbita é $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} = \hat{\mathbf{i}}$. Um terceiro versor importante é dado por $\hat{\mathbf{e}}_{\perp_2} = \hat{R} \times \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$. Quando $\theta \rightarrow 0$, $\hat{\mathbf{e}}_{\perp_2} \rightarrow \hat{\mathbf{j}}$, e ele orienta-se perpendicularmente ao plano da órbita, de modo que, nesse caso, a radiação emitida nessa direção corresponde à radiação com polarização perpendicular ao plano da órbita. Em $T = 0$ a carga está situada na origem. Note que apenas para $\theta \rightarrow 0$ haverá uma componente apreciável de radiação sendo emitida. Como a trajetória envolve um intervalo de tempo bastante curto, podemos aproximar δ por

$$\delta = \frac{vT}{b}$$

Para determinar a integral 24.46, precisamos de algumas grandezas. O versor $\hat{R}$ é obtido da expressão 24.21, fazendo $\phi = \frac{\pi}{2}$, isto é,

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp_1} \equiv \hat{R} = \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (24.49)$$

A posição $\vec{r}_Q$ da carga é escrita como

$$\vec{r}_Q = b(1 - \cos \delta) \hat{\mathbf{i}} + b \sin \delta \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{r}_Q = b \left(1 - \cos \frac{vT}{b} \right) \hat{\mathbf{i}} + b \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{k}}$$

enquanto a velocidade fica

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_Q}{dT} = v \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{i}} + v \cos \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{k}}$$

Portanto,

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \beta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{i}} + \beta \cos \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{k}}$$

O versor $\hat{\mathbf{e}}_{\perp_2}$, que será útil, é dado por

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp_2} = \hat{R} \times \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$$

ou

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp_2} = (\sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \times \hat{\mathbf{i}}$$

e então,

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp_2} = \cos \theta \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}}$$

Vamos calcular agora

$$\hat{R} \times \vec{\beta} = (\sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \times \left(\frac{v}{c} \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{i}} + \frac{v}{c} \cos \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{k}} \right)$$

ou

$$\hat{R} \times \vec{\beta} = -\beta \sin \theta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{k}} + \beta \sin \theta \cos \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{i}} + \beta \cos \theta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{j}}$$

Agora, determinamos

$$\begin{aligned} \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) &= (\sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \\ &\times \left(-\beta \sin \theta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{k}} + \beta \sin \theta \cos \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{i}} + \beta \cos \theta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{j}} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) &= -\beta \sin^2 \theta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{i}} - \beta \sin^2 \theta \cos \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{k}} \\ &+ \beta \sin \theta \cos \theta \cos \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{j}} - \beta \cos^2 \theta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) = -\beta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{i}} + \beta \sin \theta \cos \frac{vT}{b} (\cos \theta \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}})$$

e, por fim,

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) = -\beta \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \beta \sin \theta \cos \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{e}}_{\perp_2} \quad (24.50)$$

Precisamos também de

$$\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T) = (\sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \cdot \left[b \left(1 - \cos \frac{vT}{b} \right) \hat{\mathbf{i}} + b \sin \frac{vT}{b} \hat{\mathbf{k}} \right]$$

ou

$$\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T) = b \cos \theta \sin \frac{vT}{b}$$

Portanto, o argumento da exponencial fica

$$\omega\left(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c}\right) = \omega\left(T - \frac{b}{c} \cos \theta \sin \frac{vT}{b}\right) \quad (24.51)$$

Agora, estamos interessados no limite relativístico ($\beta \rightarrow 1$), na radiação paralela e perpendicular ao plano da órbita (ângulos θ pequenos, $\theta \rightarrow 0$) e também em intervalos de tempo curtos em torno de $T = 0$, para que valha a aproximação de trajeto circular. Assim, podemos expandir as equações 24.50 e 24.51 nesses limites. Considerando inicialmente 24.50, temos

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) = -\beta \frac{vT}{b} \hat{e}_{\parallel} + \beta \theta \hat{e}_{\perp_2}$$

ou, no limite $\beta \rightarrow 1$,

$$\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) = -\frac{cT}{b} \hat{e}_{\parallel} + \theta \hat{e}_{\perp_2} \quad (24.52)$$

O outro fator, dado pela equação 24.51, fica

$$\omega\left(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c}\right) = \omega\left[T - \frac{b}{c} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \left(\frac{vT}{b} - \frac{1}{6} \frac{v^3 T^3}{b^3}\right)\right]$$

ou

$$\omega\left(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c}\right) = \omega\left[T - \beta T + \frac{c^2 \beta^3 T^3}{6b^2} + \frac{\beta \theta^2 T}{2} - \frac{c^2 \theta^2 \beta^3 T^3}{18b^2}\right]$$

que fica, desprezando o último termo entre colchetes por ser muito menor que os demais,

$$\omega\left(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c}\right) = \omega\left[T(1 - \beta) + \frac{\theta^2 T}{2} + \frac{c^2 T^3}{6b^2}\right]$$

ou, trocando para γ ,

$$\omega\left(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c}\right) = \omega\left\{T \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{\theta^2 T}{2} + \frac{c^2 T^3}{6b^2}\right\}$$

Assim,

$$\omega\left(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c}\right) = \omega\left\{T \left[1 - 1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right] + \frac{\theta^2 T}{2} + \frac{c^2 T^3}{6b^2}\right\}$$

ou

$$\omega\left(T - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}_Q(T)}{c}\right) = \frac{\omega}{2} \left\{ T \left[\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right] + \frac{c^2 T^3}{3b^2} \right\} \quad (24.53)$$

De posse das expressões 24.52 e 24.53, podemos voltar à equação 24.46 e escrever

$$\frac{d^2 \mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = \frac{Q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \times \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{cT}{b} \hat{e}_{\parallel} + \theta \hat{e}_{\perp_2} \right] \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[T \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 T^3}{3b^2} \right] \right\} dT \right|^2$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = \frac{Q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \times & \left| -\frac{c}{b} \hat{e}_{\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} T \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[T \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 T^3}{3b^2} \right] \right\} dT \right. \\ & \left. + \theta \hat{e}_{\perp_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[T \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 T^3}{3b^2} \right] \right\} dT \right|^2 \end{aligned}$$

Para simplificar, vamos definir

$$\mathfrak{A}_{\parallel}(\omega) = \frac{c}{b} \int_{-\infty}^{\infty} T \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[T \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 T^3}{3b^2} \right] \right\} dT \quad (24.54a)$$

$$\mathfrak{A}_{\perp}(\omega) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[T \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) + \frac{c^2 T^3}{3b^2} \right] \right\} dT \quad (24.54b)$$

de modo que temos

$$\frac{d^2 \mathcal{I}(\omega, \hat{R})}{d\omega d\Omega} = \frac{Q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| -\mathfrak{A}_{\parallel}(\omega) \hat{e}_{\parallel} + \mathfrak{A}_{\perp}(\omega) \hat{e}_{\perp_2} \right|^2 \quad (24.55)$$

Vamos agora definir o parâmetro

$$\vartheta = \frac{b\omega}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (24.56)$$

e a variável

$$\tau = \frac{cT}{b} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{b\tau}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24.57)$$

de modo que

$$d\tau = \frac{c}{b} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dT \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{b}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \quad (24.58)$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \vartheta\tau &= \frac{b\omega}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{cT}{b} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \vartheta\tau &= \frac{\omega T}{3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \end{aligned} \quad (24.59)$$

e

$$\begin{aligned} \vartheta\tau^3 &= \frac{b\omega}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{cT}{b} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^3 \\ \vartheta\tau^3 &= \frac{c^2\omega T^3}{3b^2} \end{aligned} \quad (24.60)$$

Utilizando as equações 24.56–24.60, as expressões 24.54 ficam

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\parallel}(\omega) &= \frac{c}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b\tau}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\frac{3\vartheta\tau}{\omega} + \frac{\vartheta\tau^3}{\omega} \right] \right\} \frac{b}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\ \mathfrak{A}_{\perp}(\omega) &= \theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\frac{3\vartheta\tau}{\omega} + \frac{\vartheta\tau^3}{\omega} \right] \right\} \frac{b}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \end{aligned}$$

ou

$$\mathfrak{A}_{\parallel}(\omega) = \frac{b}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \tau \exp \left\{ i \frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right\} d\tau \quad (24.62a)$$

$$\mathfrak{A}_{\perp}(\omega) = \frac{b\theta}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right\} d\tau \quad (24.62b)$$

Podemos reescrever as integrais usando a relação de Euler para a exponencial complexa, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \exp \left\{ i \frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right\} d\tau = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \tau \left\{ \cos \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] + i \sin \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] \right\} d\tau \end{aligned}$$

Considerando a paridade das funções $f(\tau) = \tau$ e das funções trigonométricas, vemos que a primeira integral se anula, visto que o cosseno é par, mas $f(\tau) = \tau$ é ímpar, resultando numa função ímpar integrada num intervalo simétrico. A integral do lado esquerdo pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau \exp \left\{ i \frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right\} d\tau = 2i \int_0^{\infty} \tau \sin \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau$$

já que é a integral de uma função par. A outra integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right\} d\tau = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \cos \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] + i \sin \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] \right\} d\tau \end{aligned}$$

fica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right\} d\tau = 2 \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau$$

e assim, as equações 24.62 tornam-se

$$\mathfrak{A}_{\parallel}(\omega) = \frac{2ib}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sen} \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau \quad (24.63a)$$

$$\mathfrak{A}_{\perp}(\omega) = \frac{2b\theta}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau \quad (24.63b)$$

É importante notar que as integrais são reais, logo, $\mathfrak{A}_{\parallel}(\omega)$ é imaginário puro, enquanto $\mathfrak{A}_{\perp}(\omega)$ é real. Assim, a equação 24.55 fica

$$\frac{d^2 \mathcal{I}}{d\omega d\Omega} = \frac{Q^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} [|\mathfrak{A}_{\parallel}(\omega)|^2 + |\mathfrak{A}_{\perp}(\omega)|^2] \quad (24.64)$$

As integrais apresentadas nas equações 24.63 estão relacionadas a uma classe de funções, chamadas *funções de Airy*, que aparecem com certa frequência em Eletromagnetismo, Óptica e Mecânica Quântica. Essas funções são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - yz = 0 \quad (24.65)$$

de forma que

$$y(z) = A \operatorname{AiryA}(z) + B \operatorname{AiryB}(z) \quad (24.66)$$

onde $\operatorname{AiryA}(z)$ e $\operatorname{AiryB}(z)$ são as funções de Airy. A primeira delas é dada pela integral

$$\operatorname{AiryA}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z t + \frac{t^3}{3})} dt \quad (24.67)$$

e é possível escrever também

$$\operatorname{AiryA}(z) = \frac{\sqrt{z}}{3} \left[\mathfrak{J}_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right) - \mathfrak{J}_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (24.68)$$

onde $\mathfrak{J}_{\nu}(z)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo dada por ⁵

$$\mathfrak{J}_{\nu}(z) = i^{-\nu} \mathcal{J}_{\nu}(iz) \quad (24.69)$$

⁵ Por favor, corrija a expressão D.36, há um sinal negativo faltando.

sendo $\mathcal{J}_\nu(z)$ a função de Bessel usual, vista no apêndice D. Ela pode ser ainda reescrita em termos das funções de Bessel modificadas do segundo tipo, dadas por D.37,

$$\mathcal{K}_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^1(iz) \quad (24.70)$$

onde, por sua vez, $H_\nu^1(z)$ é a função de Hankel de primeira espécie, dada por D.24a,

$$H_\nu^1(z) = \mathcal{J}_\nu(z) + i\mathcal{N}_\nu(z) \quad (24.71)$$

sendo $\mathcal{N}_\nu(z)$ as funções de Neumann D.21, ou funções de Bessel de segundo tipo,

$$\mathcal{N}_\nu(z) = \frac{\mathcal{J}_\nu(z) \cos \nu\pi - \mathcal{J}_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} \quad (24.72)$$

Para obter a expressão desejada, vamos partir da equação 24.70, utilizar as expressões 24.71 e 24.72 e lembrar que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\nu(z) &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^1(iz) \\ \mathcal{K}_\nu(z) &= \frac{i\pi}{2} e^{i\frac{\nu\pi}{2}} \left\{ \mathcal{J}_\nu(iz) + i \left[\frac{\mathcal{J}_\nu(iz) \cos \nu\pi - \mathcal{J}_{-\nu}(iz)}{\sin \nu\pi} \right] \right\} \\ \mathcal{K}_\nu(z) &= \frac{i\pi}{2} e^{i\frac{\nu\pi}{2}} \frac{\mathcal{J}_\nu(iz) \sin \nu\pi + i\mathcal{J}_\nu(iz) \cos \nu\pi - i\mathcal{J}_{-\nu}(iz)}{\sin \nu\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{i\frac{\nu\pi}{2}} \frac{(i \sin \nu\pi - \cos \nu\pi) \mathcal{J}_\nu(iz) + \mathcal{J}_{-\nu}(iz)}{\sin \nu\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{i\frac{\nu\pi}{2}} \frac{\mathcal{J}_{-\nu}(iz) - e^{-i\nu\pi} \mathcal{J}_\nu(iz)}{\sin \nu\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{J}_{-\nu}(iz) e^{i\frac{\nu\pi}{2}} - e^{-i\frac{\nu\pi}{2}} \mathcal{J}_\nu(iz)}{\sin \nu\pi} \\ \mathcal{K}_\nu(z) &= \frac{\pi}{2} \frac{i^\nu \mathcal{J}_{-\nu}(iz) - i^{-\nu} \mathcal{J}_\nu(iz)}{\sin \nu\pi} \end{aligned}$$

Usando agora a relação 24.69, temos

$$\mathcal{K}_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{I}_{-\nu}(z) - \mathcal{I}_\nu(z)}{\sin \nu\pi} \quad (24.73)$$

Fazendo agora $\nu = \frac{1}{3}$, achamos

$$\mathcal{K}_{\frac{1}{3}}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{I}_{-\frac{1}{3}}(z) - \mathcal{I}_{\frac{1}{3}}(z)}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

ou

$$\mathcal{K}_{\frac{1}{3}}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} [\mathcal{I}_{-\frac{1}{3}}(z) - \mathcal{I}_{\frac{1}{3}}(z)] \quad (24.74)$$

de modo que

$$\mathfrak{I}_{-\frac{1}{3}}(z) - \mathfrak{I}_{\frac{1}{3}}(z) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}(z)$$

ou, colocando $z \rightarrow \frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}$, temos

$$\mathfrak{I}_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}\right) - \mathfrak{I}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}\right)$$

Empregando a equação 24.68, achamos

$$\text{AiryA}(z) = \frac{\sqrt{z}}{3} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}\right)$$

ou

$$\text{AiryA}(z) = \sqrt{\frac{z}{3\pi^2}} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}\right) \quad (24.75)$$

que é outra forma de expressar a função de Airy $\text{AiryA}(z)$. Outro resultado importante consiste na derivada desta função de Airy, isto é,

$$\frac{d}{dz} \text{AiryA}(z) = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z t + \frac{t^3}{3})} dt \right\}$$

ou

$$\text{AiryA}'(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{i(z t + \frac{t^3}{3})} dt \quad (24.76)$$

Por completeza, a função de Airy $\text{AiryB}(z)$ é dada por

$$\text{AiryB}(z) = \sqrt{\frac{z}{3}} \left[\mathfrak{I}_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}\right) + \mathfrak{I}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{2}{3}}\right) \right] \quad (24.77)$$

Assim, através de definições apropriadas, é possível converter as integrais em 24.62 ou em 24.63 em funções de Airy ou suas derivadas, o que é deixado como exercício (veja o exercício 24.2).

Com o uso das funções de Airy, as integrais em 24.63 ficam

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \tau \sin \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau &= \frac{\pi}{3} \left[\mathfrak{I}_{-\frac{2}{3}}(\vartheta) - \mathfrak{I}_{\frac{2}{3}}(\vartheta) \right] \\ \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau &= \frac{\pi}{3} \left[\mathfrak{I}_{-\frac{1}{3}}(\vartheta) - \mathfrak{I}_{\frac{1}{3}}(\vartheta) \right] \end{aligned}$$

Agora, empregamos a equação 24.73, com $\nu = \frac{2}{3}$, ou seja,

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{\mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}(z) - \mathfrak{J}_{\frac{2}{3}}(z)}{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}}$$

ou

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\mathfrak{J}_{-\frac{2}{3}}(z) - \mathfrak{J}_{\frac{2}{3}}(z) \right]$$

Reunindo esta expressão com a equação 24.74, as integrais ficam

$$\int_0^\infty \tau \operatorname{sen} \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(\vartheta)$$

$$\int_0^\infty \cos \left[\frac{3\vartheta}{2} \left(\tau + \frac{\tau^3}{3} \right) \right] d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}(\vartheta)$$

e assim, as equações 24.63 tornam-se

$$\mathfrak{A}_{\parallel}(\omega) = \frac{2ib}{\sqrt{3}c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(\vartheta) \quad (24.80a)$$

$$\mathfrak{A}_{\perp}(\omega) = \frac{2b\theta}{\sqrt{3}c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}(\vartheta) \quad (24.80b)$$

o que faz com que a expressão 24.64 fique

$$\frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} = \frac{Q^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left[\frac{4b^2}{3c^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) + \frac{4b^2\theta^2}{3c^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}^2(\vartheta) \right]$$

ou

$$\frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} = \frac{Q^2\omega^2 b^2}{12\pi^3\epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \left[\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) + \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}^2(\vartheta) \right] \quad (24.81)$$

onde o primeiro termo entre colchetes refere-se à radiação polarizada no plano da órbita, enquanto o outro termo responde pela radiação polarizada perpendicularmente à órbita. Podemos integrar essa expressão sobre todas as frequências para determinar a distribuição de energia por ângulo sólido, isto é,

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} d\omega$$

Como ϑ está relacionado a ω pela equação 24.56, temos

$$\omega = \frac{3c\vartheta}{b} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-\frac{3}{2}}$$

e

$$d\omega = \frac{3c}{b} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-\frac{3}{2}} d\vartheta$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{I}}{d\Omega} = & \int_0^\infty \frac{Q^2 b^2}{12\pi^3 \epsilon_0 c^3} \frac{9c^2 \vartheta^2}{b^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^2 \\ & \times \left[\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) + \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}^2(\vartheta) \right] \frac{3c}{b} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{-\frac{3}{2}} d\vartheta \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\Omega} = \frac{9Q^2}{4\pi^3 \epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \left[\int_0^\infty \vartheta^2 \mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) d\vartheta + \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)} \int_0^\infty \vartheta^2 \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}^2(\vartheta) d\vartheta \right]$$

As integrais valem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \vartheta^2 \mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) d\vartheta &= \frac{7\pi^2}{144} \\ \int_0^\infty \vartheta^2 \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}^2(\vartheta) d\vartheta &= \frac{5\pi^2}{144} \end{aligned}$$

e então,

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\Omega} = \frac{9Q^2}{4\pi^3 \epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \left[\frac{7\pi^2}{144} + \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)} \frac{5\pi^2}{144} \right]$$

ou

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\Omega} = \frac{7Q^2}{64\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left[1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)} \right]$$

onde, novamente, o primeiro fator do termo entre colchetes está associado à polarização paralela ao plano da órbita enquanto o segundo representa a polarização perpendicular a este plano. Aqui, é útil considerar as expressões assintóticas para as funções de Bessel modificadas $\mathcal{K}_\nu(x)$. Para $x \ll 1$, temos

$$\mathcal{K}_\nu(x) \simeq \begin{cases} \ln \frac{2}{x} - \psi & \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases} \quad (24.82)$$

onde

$$\psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} - \ln N \right] = 0,5772 \dots \quad (24.83)$$

é a constante de Euler-Masqueroni. Para $x \gg 1$, temos

$$\mathcal{K}_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad \forall \nu \quad (24.84)$$

Observando a expressão 24.84, vemos que, quando $\vartheta \gg 1$, a intensidade da radiação emitida descrita pela equação 24.81 torna-se desprezível. Isso ocorre, de acordo com a definição 24.56,

$$\vartheta = \frac{b\omega}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

quando θ torna-se grande, maior que um ângulo crítico θ_c para um dado ω . Além disso, quanto maior ω , menor o valor de θ_c a partir do qual a emissão é desprezível. Assim, com o aumento de ω , cada vez menos radiação é emitida para fora do plano da órbita. Note que, se ω for maior que um valor crítico ω_c , ϑ será grande para qualquer ângulo θ , e a emissão será desprezível em qualquer direção, incluindo as direções paralelas ao plano da órbita. Esta frequência crítica pode ser definida, de acordo com o uso geral, através de $\vartheta = \frac{1}{2}$ quando $\theta = 0$, ou seja, de 24.56,

$$\frac{1}{2} = \frac{b\omega_c}{3c} \frac{1}{\gamma^3}$$

ou

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{b} \gamma^3 = \frac{3}{2} \frac{c}{b} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^3 \quad (24.85)$$

que concorda com a definição 24.27 feita anteriormente com base em um modelo bem mais simples. Se o movimento como um todo é circular, então, de 24.28,

$$\omega_0 = \frac{c}{b}$$

temos que

$$\omega_c = n_c \omega_0$$

onde n_c , o número harmônico do sistema, é dado por

$$n_c = \frac{3}{2} \gamma^3 = \frac{3}{2} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^3 \quad (24.86)$$

Continuando nossa análise, sabemos que, quando $\gamma \gg 1$ (limite extremamente relativístico), praticamente toda a radiação é emitida no plano da órbita. Assim, vamos considerar a expressão 24.81 quando $\theta = 0$, isto é,

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{Q^2 \omega^2 b^2}{12\pi^3 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{\gamma^4} \mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) \quad (24.87)$$

Quando $\omega \ll \omega_c$, $\vartheta \ll 1$, e usamos a expansão 24.82 para $\mathcal{K}_\nu(\vartheta)$, ou seja,

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(\vartheta) \simeq \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2} \left(\frac{2}{\vartheta} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \vartheta \ll 1$$

ou, usando o valor de ϑ ,

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(\vartheta) \simeq \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2} \left(\frac{3c}{b\omega} \right)^{\frac{2}{3}} \gamma^2, \quad \vartheta \ll 1$$

Portanto, temos

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) \simeq 3 \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{c}{b\omega}\right)^{\frac{4}{3}} \gamma^4, \quad \vartheta \ll 1$$

e, voltando à equação 24.87, temos

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{Q^2 \omega^2 b^2}{12\pi^3 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{\gamma^4} 3 \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{c}{b\omega}\right)^{\frac{4}{3}} \gamma^4$$

ou

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{Q^2}{4\pi^3 \epsilon_0 c} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{b\omega}{c}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \omega \ll \omega_c \quad (24.88)$$

de modo que, para frequências na região $\omega \ll \omega_c$, a emissão cresce com $\omega^{\frac{2}{3}}$. Vejamos agora o que ocorre no outro limite importante, que é $\omega \gg \omega_c$, ou $\vartheta \gg 1$. Nesse caso, a expansão indicada é a dada pela equação 24.84, ou

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(\vartheta) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\vartheta}} e^{-\vartheta}, \quad \vartheta \gg 1$$

ou

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(\vartheta) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{3c}{b\omega}} \gamma^3 e^{-\frac{b\omega}{3c} \frac{1}{\gamma^3}}, \quad \vartheta \gg 1$$

usando a definição 24.85, temos

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}(\vartheta) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{3c}{b\omega}} \gamma^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega}{2\omega_c}}, \quad \vartheta \gg 1$$

Portanto,

$$\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) \simeq \frac{\pi}{2} \frac{3c}{b\omega} \gamma^3 e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \vartheta \gg 1$$

e a equação 24.87 torna-se

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{Q^2 \omega^2 b^2}{12\pi^3 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{\gamma^4} \frac{\pi}{2} \frac{3c}{b\omega} \gamma^3 e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}$$

ou

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{Q^2 \omega b}{8\pi^2 \epsilon_0 c^2 \gamma} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}$$

ou ainda, em termos de ω_c ,

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{3Q^2 \gamma^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\omega}{\omega_c} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \omega \gg \omega_c \quad (24.89)$$

Portanto, a emissão atinge um máximo em torno de $\omega = \omega_c$ e a partir daí ela cai a zero de forma exponencial, como mostra a expressão 24.89. A figura 24.7 apresenta, de forma esquemática, o comportamento da radiação emitida em função da frequência e do ângulo sólido, para a radiação emitida no plano da órbita ($\theta = 0$) por uma carga em movimento extremamente relativístico.

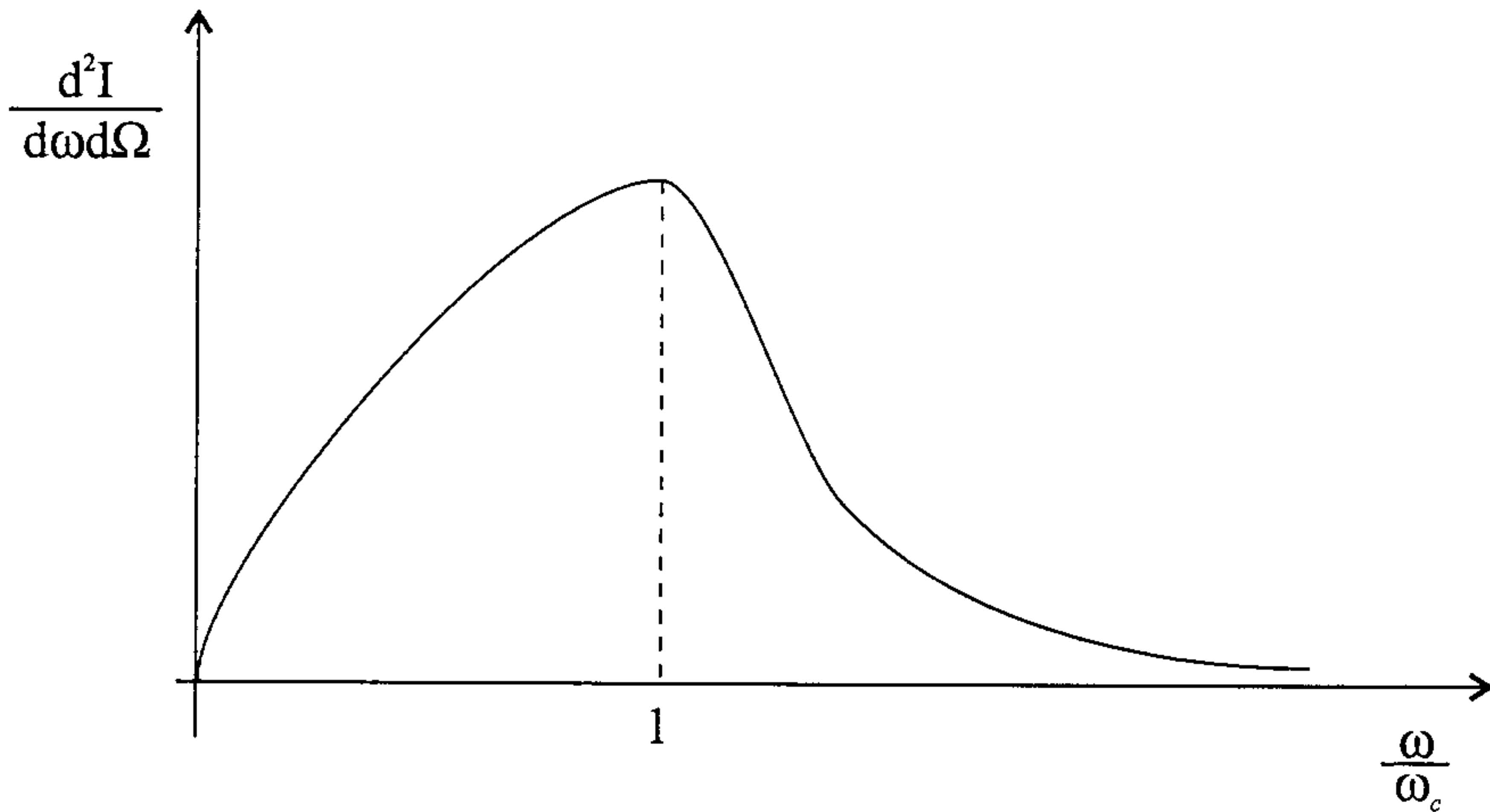


Figura 24.7: Intensidade da radiação emitida no plano da órbita ($\theta = 0$) para uma carga em movimento extremamente relativístico em função da frequência ω e ângulo sólido.

A abertura angular do feixe de radiação emitido numa dada frequência pode ser determinada nos dois limites discutidos acima. Quando $\omega \ll \omega_c$, o ângulo crítico pode ser obtido considerando-se $\vartheta(\theta_c) = 1$, isto é, lembrando a definição 24.56,

$$\vartheta = \frac{b\omega}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

no limite extremamente relativístico $\gamma \rightarrow \infty$, temos

$$1 = \frac{b\omega}{3c} \theta_c^3$$

ou

$$\theta_c = \left(\frac{3c}{b\omega} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{2\omega_c}{\omega} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \omega \ll \omega_c \quad (24.90)$$

onde usamos também a definição 24.85 para a frequência crítica ω_c . Da expressão acima, vemos que os componentes da radiação com frequências baixas podem alcançar ângulos grandes de emissão fora do plano da órbita.

Para determinar θ_c para o caso $\omega \gg \omega_c$, não podemos usar diretamente $\vartheta(\theta)$, que é intrinsecamente grande nesse limite. A idéia é expandir, então, a equação 24.81, considerando também a expressão 24.84 e a definição 24.56. Primeiro, temos

$$\vartheta = \frac{b\omega}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

ou

$$\vartheta = \frac{b\omega}{3c\gamma^3} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{\frac{3}{2}}$$

ou, usando 24.85,

$$\vartheta = \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{\frac{3}{2}}$$

Agora, de 24.84, temos, para qualquer ν ,

$$\mathcal{K}_\nu(\vartheta) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\vartheta}} e^{-\vartheta}$$

ou

$$\mathcal{K}_\nu(\vartheta) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2\omega_c}{\omega} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{-\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{\frac{3}{2}} \right]$$

e assim,

$$\mathcal{K}_\nu^2(\vartheta) \simeq \frac{\pi}{2} \frac{2\omega_c}{\omega} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{-\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{\omega}{\omega_c} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{\frac{3}{2}} \right]$$

ou, expandindo os termos entre parênteses na exponencial,

$$\mathcal{K}_\nu^2(\vartheta) \simeq \frac{\pi\omega_c}{\omega} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{-\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{\omega}{\omega_c} \left(1 + \frac{3\gamma^2 \theta^2}{2} \right) \right]$$

Agora, voltamos à equação 24.81, reescrevendo alguns termos,

$$\frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} = \frac{Q^2 \omega^2 b^2}{12\pi^3 \epsilon_0 c^3 \gamma^4} (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 \left[\mathcal{K}_{\frac{2}{3}}^2(\vartheta) + \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \mathcal{K}_{\frac{1}{3}}^2(\vartheta) \right]$$

e então, como as funções $\mathcal{K}_\nu(\vartheta)$ têm a mesma expansão, e usando novamente 24.85,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} &= \frac{Q^2 \omega^2 b^2 \gamma^2}{12\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{3c}{2b\omega_c} \right)^2 (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 \left[1 + \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \right] \\ &\quad \times \frac{\pi\omega_c}{\omega} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{-\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{\omega}{\omega_c} \left(1 + \frac{3\gamma^2 \theta^2}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} = \left\{ \frac{3Q^2 \gamma^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\omega}{\omega_c} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} \right\} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \right] e^{-\frac{3\omega \gamma^2 \theta^2}{2\omega_c}}$$

É importante notar que a multiplicação da expansão do termo entre parênteses com o termo entre colchetes resulta, em primeira ordem, apenas no número 1, já que $\gamma\theta \ll 1$. Além disso, recordando a expressão 24.89, o termo entre chaves corresponde à grandeza determinada naquela equação, ou seja,

$$\frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \Big|_{\theta=0} e^{-\frac{3\omega \gamma^2 \theta^2}{2\omega_c}} \quad (24.91)$$

que decai exponencialmente. O valor e^{-1} , que corresponde ao ângulo crítico θ_c , ocorre quando

$$\frac{3\omega \gamma^2 \theta_c^2}{2\omega_c} = 1$$

ou seja,

$$\theta_c = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2\omega_c}{3\omega}}, \quad \omega \gg \omega_c \quad (24.92)$$

Neste caso, a emissão das componentes de frequências muito altas ocorre numa região de abertura angular muito pequena em torno do plano da órbita, de acordo com nossos resultados anteriores. A figura 24.8 ilustra o comportamento da radiação emitida em função do ângulo θ de emissão.

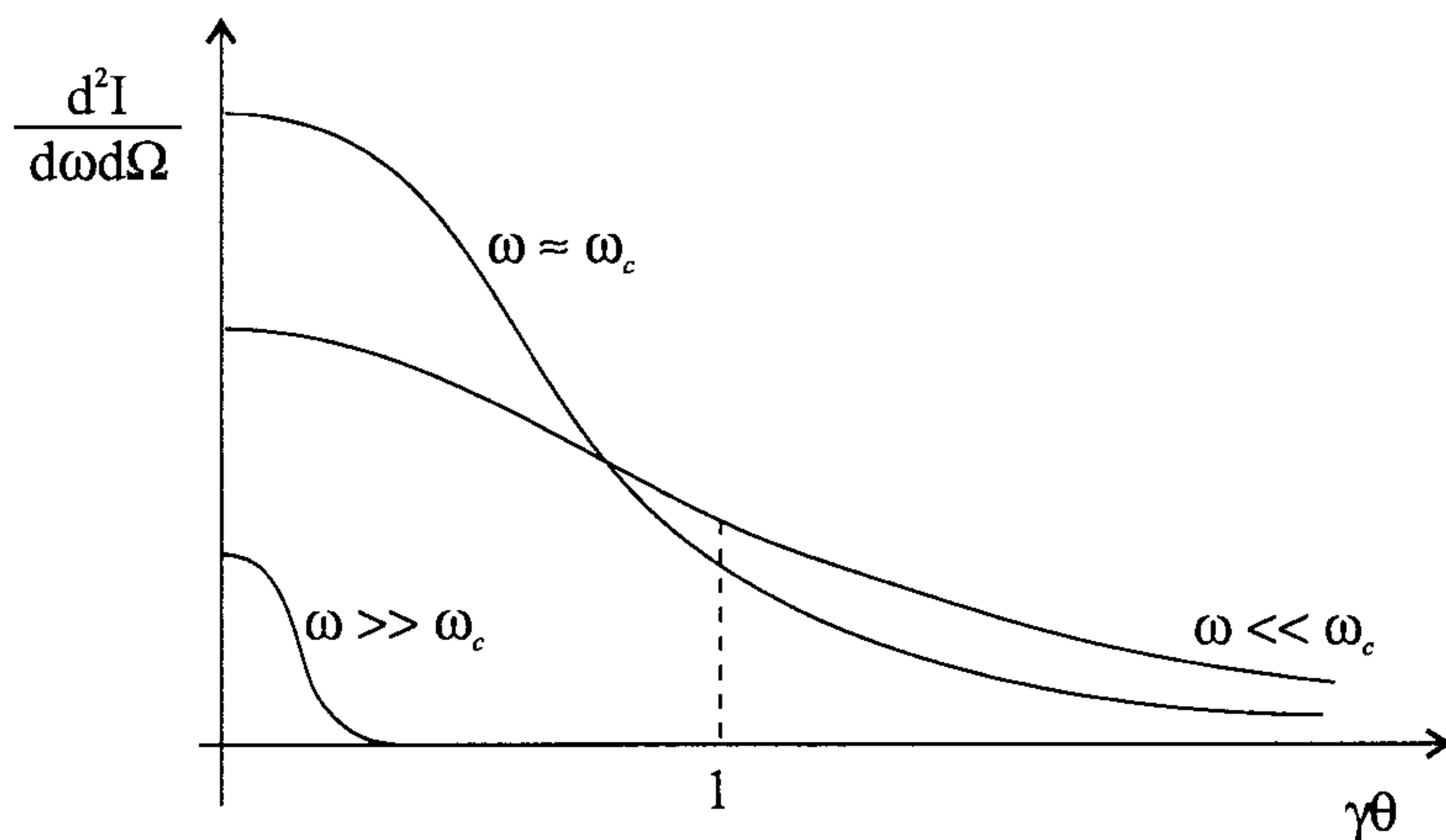


Figura 24.8: Comparação entre as intensidades da radiação emitida em função de θ para os três regimes de frequência.

Note que é preciso ter em mente o real significado das expressões “ângulos grandes” ou “ângulos pequenos” quando nos referimos à abertura angular e ao ângulo crítico θ_c . Em todas as expressões relacionadas à emissão de radiação, sempre aparece o fator $\gamma\theta$ envolvendo o ângulo θ . Isso indica que esse fator é uma unidade natural de medida de ângulos e que comparações devem ser feitas considerando-se o valor

$$\gamma\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{\gamma}$$

que delimita os comportamentos $\gamma\theta \ll 1$ e $\gamma\theta \gg 1$. Assim, ângulos θ são grandes quando comparados com γ^{-1} , o qual, no limite relativístico, é pequeno, visto que $\gamma \gg 1$. Portanto, de forma relativa, um ângulo $\theta_c = 1^\circ$ pode vir a ser grande ou pequeno, dependendo da frequência ω considerada.

Além de estudar o comportamento da energia irradiada em função do ângulo sólido, podemos determinar a distribuição da energia em função da frequência de emissão, o que é feito integrando-se a expressão 24.81 no ângulo sólido, isto é,

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = \oint \frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} d\Omega$$

ou

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = 2\pi \int_0^\pi \frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \sin\theta d\theta$$

A integral acima envolve várias manipulações ⁶ e apresentamos apenas o resultado final

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}Q^2\gamma}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^\infty \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx \quad (24.93)$$

Podemos estudar os limites de baixa e alta frequência para esta expressão. No caso de baixas frequências, $\omega \ll \omega_c$, temos, pela expansão 24.82,

$$\mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) \simeq \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{5}{3}}$$

de modo que achamos

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}Q^2\gamma}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^\infty \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{5}{3}} dx$$

ou

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}Q^2\gamma}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{2^{\frac{5}{3}}\Gamma(\frac{5}{3})}{2} \frac{\omega}{\omega_c} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)_{\frac{\omega}{\omega_c}}^\infty$$

ou

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}Q^2\gamma}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\omega}{\omega_c} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

⁶ Veja, por exemplo, J. Schwinger, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1912.

ou ainda,

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}Q^2\gamma}{4^{\frac{2}{3}}\pi\epsilon_0 c} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \omega \ll \omega_c \quad (24.94)$$

Assim, a energia emitida por unidade de frequência cresce com $\omega^{\frac{1}{3}}$ na região de baixas frequências. É um crescimento suave, como se vê na figura 24.9.

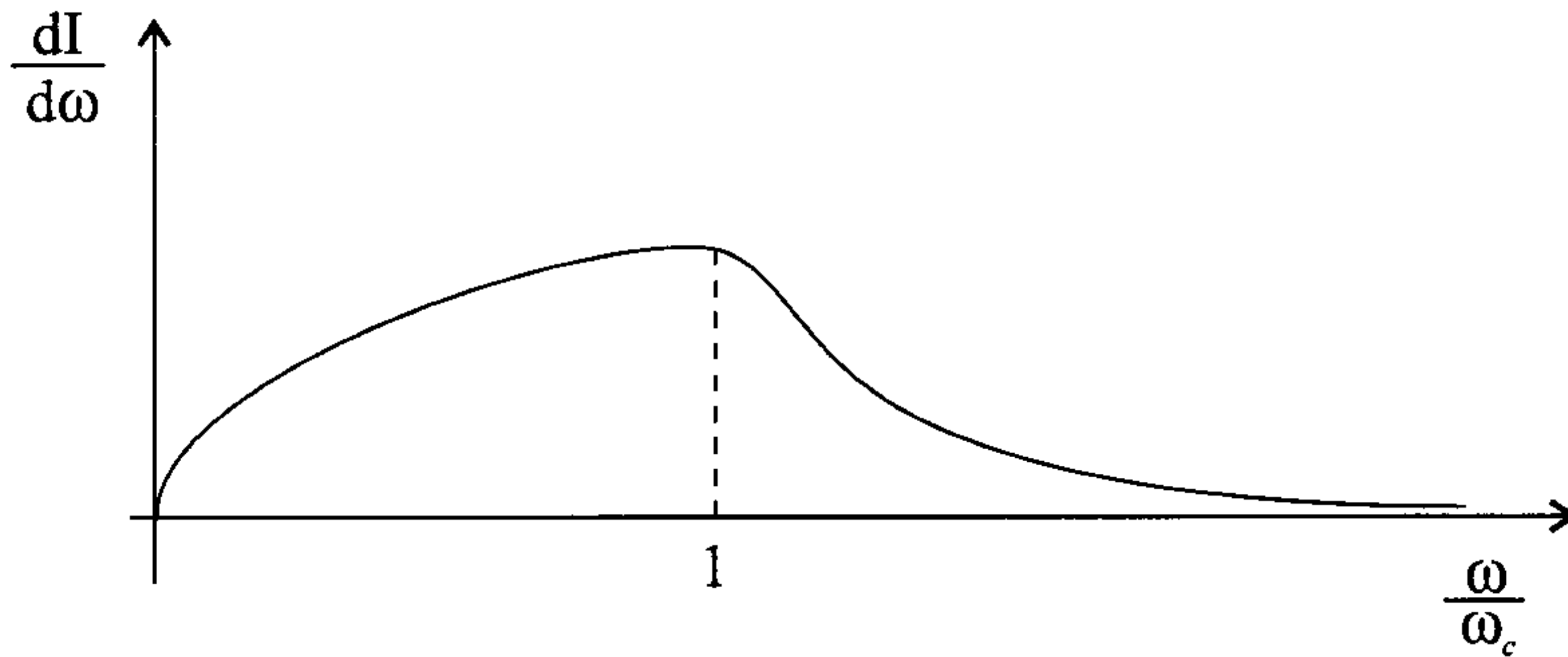


Figura 24.9: Intensidade da radiação emitida por unidade de frequência para os três regimes de frequência.

O outro limite importante ocorre quando $\omega \gg \omega_c$, de modo que usamos a expansão 24.84,

$$\mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

e a integral fica

$$\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx = \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} dx$$

ou

$$\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

Podemos realizar uma integração por partes, chamando

$$\begin{aligned} u = x^{-\frac{1}{2}} & \Rightarrow du = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} dx \\ dv = e^{-x} dx & \Rightarrow v = -e^{-x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[-x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \right]_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} e^{-x} dx \right\}$$

ou

$$\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} e^{-x} dx \right\}$$

Vamos realizar mais uma integração por partes, considerando

$$\begin{aligned} u = x^{-\frac{3}{2}} & \Rightarrow du = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} dx \\ dv = e^{-x} dx & \Rightarrow v = -e^{-x} \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx = \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} - \frac{1}{2} \left[\left(-x^{-\frac{3}{2}} e^{-x} \right)_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} - \frac{3}{2} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} x^{-\frac{5}{2}} e^{-x} dx \right] \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\omega_c}{\omega} \right]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} + \frac{3}{4} \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} x^{-\frac{5}{2}} e^{-x} dx \right\}$$

Continuando com esse procedimento, é fácil ver que as correções ao primeiro termo entre chaves podem ser escritas como

$$\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}} - \mathcal{O}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Como estamos no limite $\omega \gg \omega_c$, o termo principal é o primeiro, ou seja,

$$\int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{5}{3}}(x) dx \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \omega \gg \omega_c$$

Assim, voltando à expressão 24.93, temos

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}Q^2\gamma}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\omega}{\omega_c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}$$

ou

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = \sqrt{\frac{3}{32\pi}} \frac{Q^2\gamma}{\epsilon_0 c} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}} e^{-\frac{\omega}{\omega_c}}, \quad \omega \gg \omega_c \quad (24.95)$$

que decai exponencialmente com ω . O comportamento para altas frequências também está mostrado na figura 24.9.

Se a carga em movimento descreve uma trajetória circular de forma periódica, o espectro de emissão é na verdade discreto, e as frequências emitidas são dadas por múltiplos da frequência fundamental $\omega_0 = \frac{c}{b}$. Nesse caso, o período do movimento é dado por $T = \frac{2\pi b}{c}$, e é mais comum definir a potência emitida no harmônico de ordem n , ao invés da energia. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= \omega_0 \frac{1}{T} \frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \Big|_{\omega=n\omega_0} \\ P_n &= \omega_0 \frac{1}{T} \frac{d\mathcal{I}}{d\omega} \Big|_{\omega=n\omega_0} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{d^2\mathcal{I}}{d\omega d\Omega} \Big|_{\omega=n\omega_0} \\ P_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{d\mathcal{I}}{d\omega} \Big|_{\omega=n\omega_0} \end{aligned}$$

Para converter energia em potência, dividimos as expressões relacionadas a $\mathcal{I}$ por T . Para obter as grandezas por harmônico ao invés de por unidade de frequência, multiplicamos por ω_0 .

A radiação síncrotron descrita por 24.81 ou 24.93 é utilizada, como já foi dito, na investigação científica em muitas áreas, como Física, particularmente em Física de Aceleradores, envolvendo o projeto e a própria montagem dos

equipamentos necessários ao funcionamento das máquinas, Matéria Condensada, Astrofísica, com a produção de raios-x de alta energia (raios-x “duros”) e raios ultravioleta, Química (raios-x de baixa energia, ou “moles”, apropriados ao estudo de micelas, polímeros e macromoléculas), Biologia (cristalografia de proteínas), Engenharia de Materiais (difração de raios-x), Medicina (imageamento e danos provocados por radiação ultravioleta e raios-x), Ecologia (EXAFS ou fluorescência de raios-x em sedimentos, água, para investigar contaminação), etc. Um laboratório síncrotron, de fato, reúne diversos pesquisadores de várias áreas diferentes, sendo inerente a sua interdisciplinaridade. Assim, a construção, funcionamento e experiências feitas utilizando essas máquinas implicam em avanços científicos a curto, médio e longo prazos, o que por si só justifica o investimento nelas feito. Particularmente no caso brasileiro, vale destacar que o síncrotron do LNLS foi todo construído com tecnologia e mão-de-obra nacional, e todos os equipamentos foram e são desenvolvidos aqui, o que tem gerado uma vasta gama de profissionais altamente capacitados, além de inúmeros avanços na pesquisa científica.

Como últimos comentários acerca da emissão de radiação por cargas em movimento, em particular, do funcionamento de síncrotrons, é interessante apresentar dois dispositivos utilizados em anéis síncrotron com fins específicos. Tais dispositivos, chamados de dispositivos de “inserção”, são os *wigglers* e os *unduladores*, os quais se baseiam na idéia de que campos magnéticos defletem cargas através da aplicação de forças magnéticas. Se um campo magnético for aplicado perpendicularmente à direção da velocidade da carga, produzirá nela um deslocamento transversal por causa da força magnética perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{B}$. Durante a aplicação do campo, há uma aceleração e, conseqüentemente, a carga emite radiação no processo. Essa radiação pode ter uma dispersão em frequências bem maior que a radiação emitida normalmente num síncrotron, alcançando frequências bem mais altas, no caso dos *wigglers*, ou então pode ser quase monocromática, com alta intensidade concentrada numa dada frequência, no caso dos *unduladores*. Para estudá-los, vamos considerar inicialmente uma carga movendo-se em linha reta no plano xy com velocidade extremamente relativística, de modo que $\beta \rightarrow 1$ ou $\gamma \rightarrow \infty$.

Vamos agora dispor uma sucessão de campos magnéticos conforme mostra a figura 24.10. A carga move-se com velocidade $\vec{v}$ no sentido positivo do eixo y , enquanto os campos magnéticos estão na direção z . Eles são alternados, como mostra a figura, de modo que a carga descreve uma trajetória de vai-e-vem em torno do eixo y por causa da força magnética, ora positiva, ora negativa, que é produzida na direção x . Durante essas oscilações, a carga emi-

te radiação, já que está acelerada. Se os campos magnéticos se alternam com um intervalo espacial λ_B , então a carga oscila de uma forma aproximadamente senoidal com o mesmo comprimento de onda, no plano xy . A amplitude a do movimento dá o máximo afastamento da direção y , e assim, conforme a figura 24.11, podemos escrever

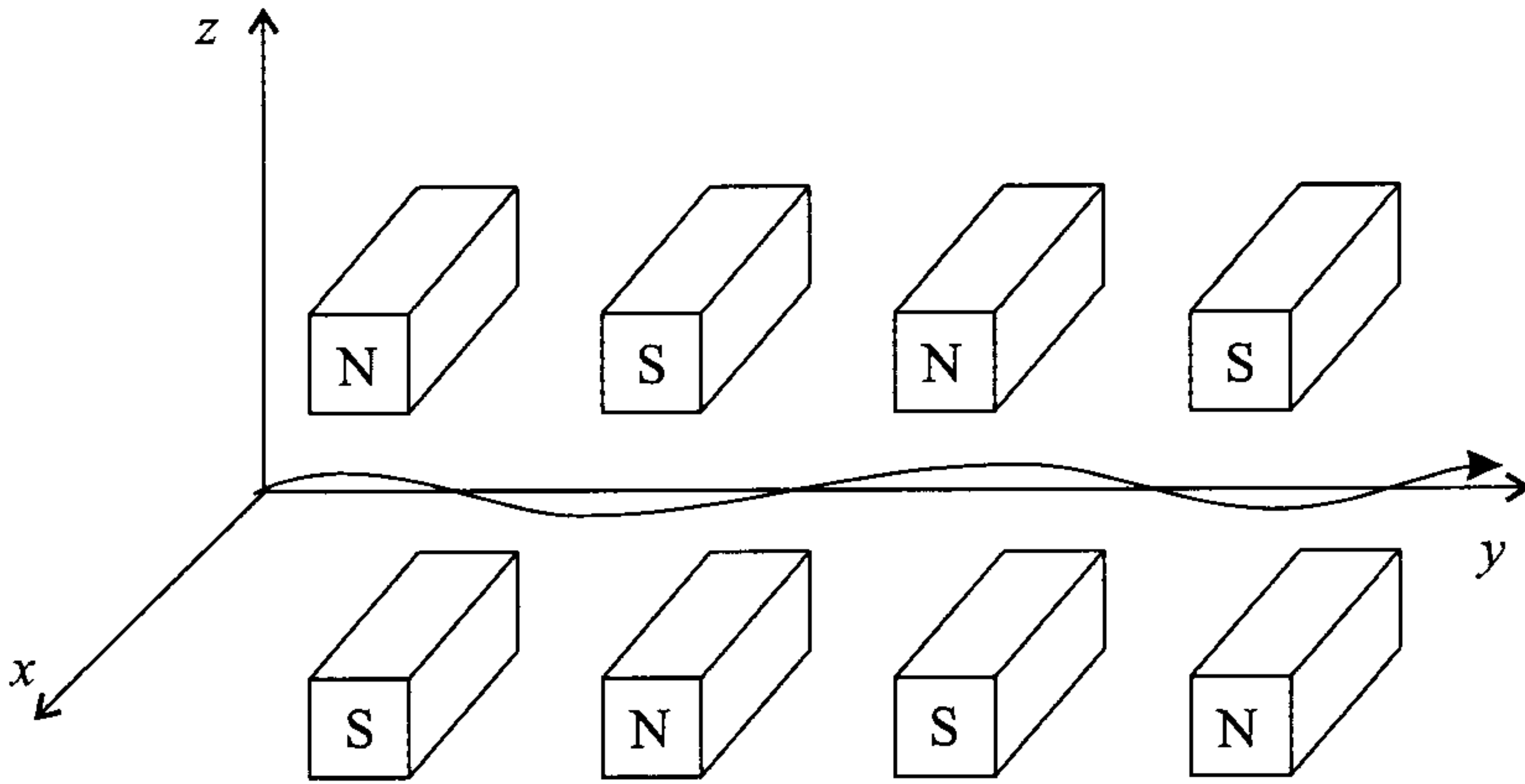


Figura 24.10: Representação do princípio de funcionamento de um dispositivo de inserção.

$$x \sim a \sin \frac{2\pi y}{\lambda_B} \quad (24.96)$$

Na figura 24.11 mostramos também o ângulo δ , que representa o maior afastamento angular em relação à direção original de movimento da carga.

Assim, δ pode ser determinado mediante

$$\operatorname{tg} \delta = \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \frac{2\pi a}{\lambda_B}$$

Como δ é pequeno, podemos aproximar a tangente pelo ângulo. Além disso, definimos também

$$k_B = \frac{2\pi}{\lambda_B}$$

onde k_B é um número de onda associado ao sistema, de modo que temos

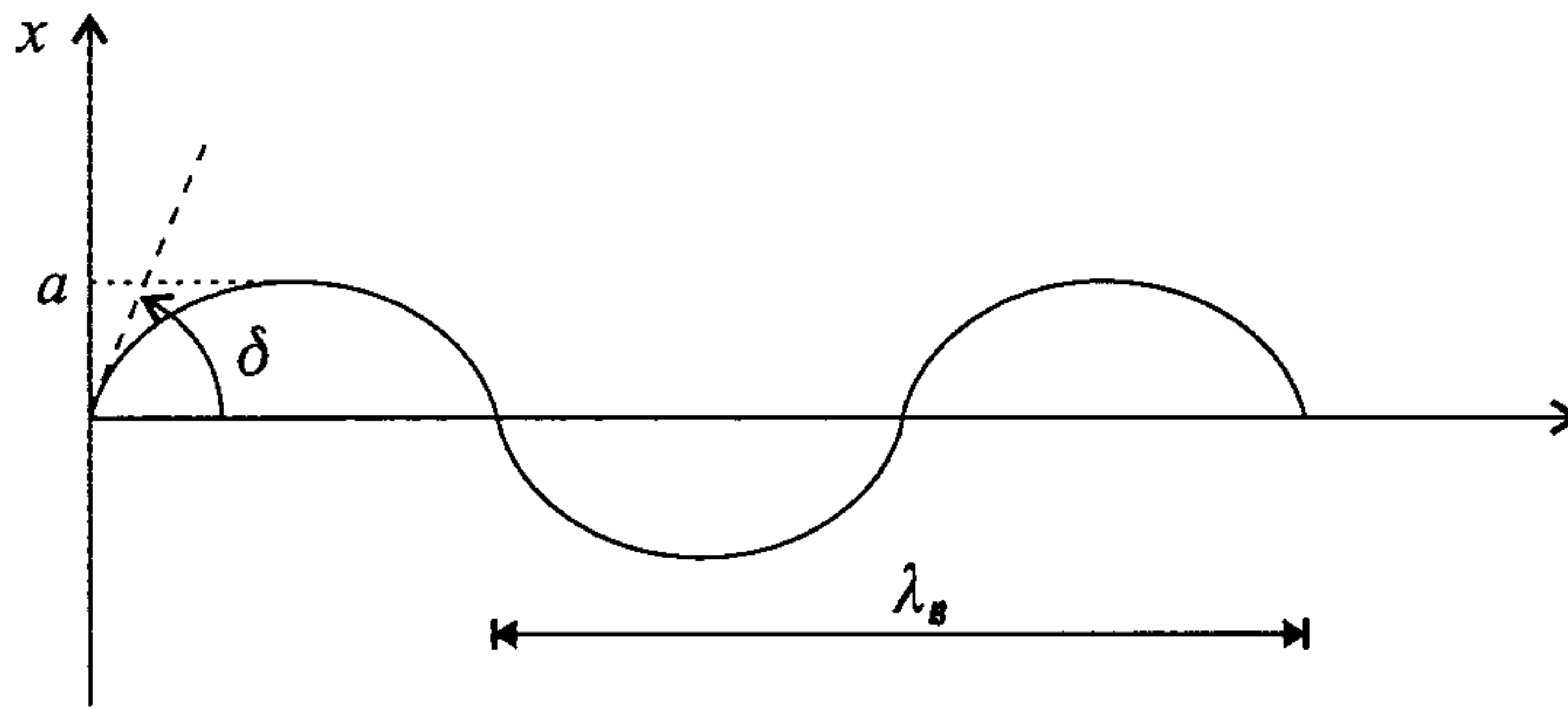


Figura 24.11: Trajetória oscilante descrita pela carga sob a ação dos campos magnéticos de um dispositivo de inserção.

$$\delta = k_B a$$

Quando $\gamma \gg 1$, ou seja, quando estamos no limite extremamente relativístico, a emissão se concentra numa região de abertura angular bastante pequena, da ordem de $\Delta\theta = \gamma^{-1}$ em torno da direção do movimento. Como a carga descreve um movimento oscilante em torno de uma dada direção ao passar pelos campos magnéticos do dispositivo de inserção, dois comportamentos diversos podem ocorrer.

24.5.1 Wigglers

Um wiggler é caracterizado por ter

$$\delta \gg \Delta\theta$$

ou seja, o feixe de radiação oscila apreciavelmente em relação ao observador, que percebe uma sucessão de “piscadas” do feixe com uma frequência

$$\nu_B = \frac{c}{\lambda_B} = \frac{ck_B}{2\pi}$$

Portanto, para uma periodicidade espacial do campo magnético da ordem de alguns centímetros, temos uma frequência de repetição ν_B da ordem de 10^{10} Hz, ou 10 GHz. Conforme já vimos, a emissão como percebida pelo observador

terá componentes apreciáveis em frequência até cerca de γ^3 vezes o valor da frequência natural ω_0 , a qual é dada por

$$\omega_0 = \frac{c}{b_0}$$

onde b_0 é um raio de curvatura efetivo da órbita, que pode ser determinado aproximadamente considerando o inverso do módulo da derivada segunda da equação 24.96 aplicada no ponto de máxima amplitude, isto é,

$$b_0 = \left| \left(\frac{d^2 x}{dy^2} \right)_{\frac{\lambda_B}{4}} \right|^{-1}$$

$$b_0 = \left(\frac{\lambda_B}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{a}$$

ou

$$b_0 = \frac{1}{k_B^2 a} = \frac{\lambda_B}{2\pi\delta}$$

Assim, o uso de um wiggler pode ampliar consideravelmente a faixa de frequências disponíveis para uma dada experiência num síncrotron. Note que a ampliação do intervalo de frequências é acompanhada por uma diminuição na intensidade do fluxo de energia por unidade de frequência, já que de alguma forma a energia deve ser conservada. É útil definir o parâmetro

$$v = \gamma\delta$$

de modo que wigglers são caracterizados por terem $v \gg 1$. A frequência crítica fica, então, da ordem de

$$\omega_c = \mathcal{O}\left(\gamma^2 v \frac{2\pi c}{\lambda_B}\right)$$

24.5.2 Unduladores

No caso dos unduladores, temos

$$\delta \ll \Delta\theta, \quad v \ll 1$$

isto é, o feixe de radiação emitida oscila muito pouco em torno da direção de movimento original, e o observador percebe um feixe de radiação coerente vindo de todas as oscilações da carga. Se tivermos um número infinito de ímãs e perfeita coerência, o feixe torna-se monocromático. Na prática, há uma dispersão em frequências da ordem de $\mathcal{O}(N^{-1})$. Portanto, o uso de um undulador permite concentrar toda a energia emitida num espectro de frequências bastante reduzido, aumentando, portanto, a brilhância do feixe naquela faixa de frequências.

Com o estudo qualitativo de wigglers e unduladores, encerramos o estudo da radiação emitida por cargas pontuais. No próximo capítulo, a emissão por distribuições extensas de cargas e correntes é estudada. Vejamos agora alguns exercícios.

24.6 Exercícios

- 24.1** Obtenha a potência total emitida por uma carga em movimento circular uniforme integrando a expressão 24.24, e mostre que ela é dada pela equação 24.25.
- 24.2** Mostre que as equações 24.62 e 24.63 podem ser convertidas em funções de Airy ou suas derivadas, mediante transformações apropriadas.

Capítulo 25

Radiação, II: Multipolos e Antenas

No capítulo anterior estudamos a radiação emitida por cargas pontuais em movimento. Num certo sentido, exercitamos uma visão “microscópica” da emissão. Podemos pensar agora num outro limite, macroscópico, que envolve distribuições extensas de carga e corrente que variam em função do tempo. Tais distribuições também podem emitir radiação, a qual é o resultado das contribuições individuais de uma grande quantidade de cargas. Para distribuições arbitrárias de cargas e correntes, a exemplo do que ocorreu no capítulo 8, é possível expandir as distribuições em termos de multipolos elétricos e magnéticos e identificar os campos elétricos e magnéticos gerados por eles, permitindo obter a radiação emitida por cada momento de multipolo. Assim, nosso objetivo neste capítulo é estudar esses multipolos, suas propriedades e, também, os modos de produção e recepção da radiação emitida por eles, o que envolve antenas transmissoras e receptoras. Antes de estabelecer relações formais de validade mais geral, vamos iniciar determinando em mais detalhes a radiação emitida por dois importantes multipolos, os dipolos elétrico e magnético.

25.1 Dois Sistemas Radiativos Importantes

Nosso objetivo agora é estudar a radiação emitida por duas configurações de cargas e correntes que são de grande relevância, ou seja, um dipolo elétrico e um dipolo magnético.

25.1.1 Radiação Emitida por um Dipolo Elétrico Oscilante

Para determinar a radiação emitida por um dipolo elétrico pontual, vamos considerar duas cargas $+Q$ e $-Q$ ($Q > 0$), situadas como na figura 25.1, separadas por uma distância d que é muito menor do que a distância r entre o centro do dipolo e o ponto de observação $\mathbf{P}$. Por hipótese, as cargas oscilam no tempo de acordo com ¹

$$Q(t) = Q(0) \cos \omega t = Q_0 \cos \omega t$$

e temos um dipolo elétrico oscilante, com momento de dipolo

$$\vec{p}(t) = Q(t)\vec{d} = Q_0 d \cos \omega t \hat{\mathbf{k}} = p_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{k}}$$

onde

$$p_0 = Q_0 d$$

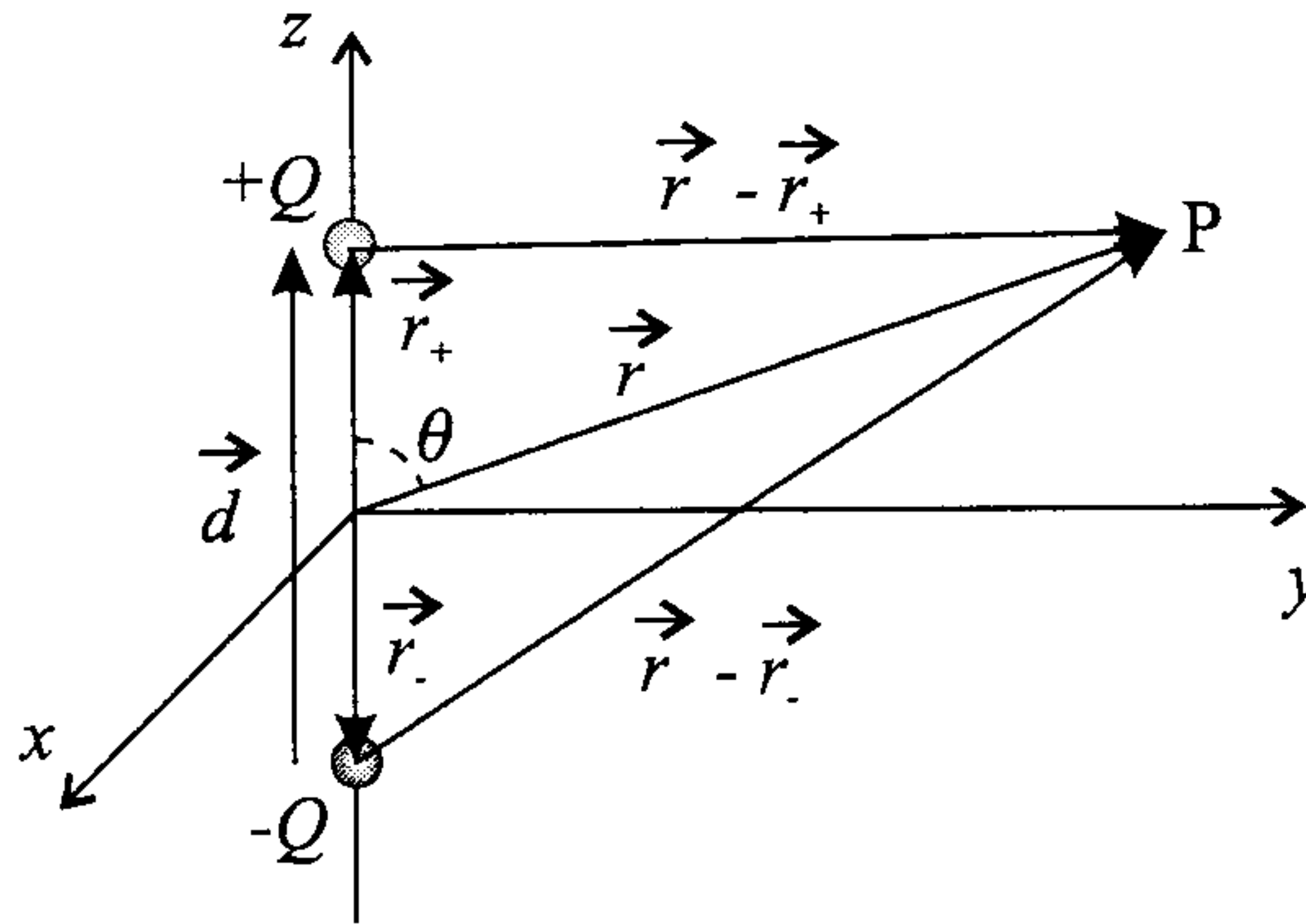


Figura 25.1: Configuração para o cálculo da radiação emitida por um dipolo elétrico.

Como é de se esperar, vamos considerar o limite $d \ll r$ e realizar uma expansão em série de Taylor, guardando termos até primeira ordem em d .

¹ Note que é uma hipótese bastante justificável, já que, mesmo que a dependência temporal seja diferente de uma função harmônica, como senos ou cossenos, sempre é possível utilizar uma análise de Fourier, o que resulta numa combinação de funções harmônicas.

Para determinar $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$, precisamos dos potenciais retardados $\mathbb{V}$ e $\vec{\mathcal{A}}$. Para o potencial escalar elétrico retardado temos, por 20.106,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$$

sendo que devemos lembrar que as grandezas devem ser avaliadas no tempo retardado t_r dado por 20.33,

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{R(t_r)}{c}$$

Como as cargas estão paradas, temos $\vec{\beta} = 0$. O potencial das duas cargas fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{R_+}{c}\right)\right]}{R_+} - \frac{Q_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{R_-}{c}\right)\right]}{R_-} \right\} \quad (25.1)$$

onde

$$R_{\pm} = |\vec{r} - \vec{r}_{\pm}| = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + \frac{d^2}{4}}$$

Considerando agora que $d \ll r$, temos

$$R_{\pm} = r \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou, em primeira ordem em d ,

$$R_{\pm} = r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

Portanto, temos também

$$\frac{1}{R_{\pm}} = \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right)^{-1}$$

ou

$$\frac{1}{R_{\pm}} = \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad (25.2)$$

e os termos envolvendo o cosseno ficam

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{R_{\pm}}{c}\right)\right] = \cos\left\{\omega\left[t - \frac{r\left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta\right)}{c}\right]\right\}$$

ou

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{R_{\pm}}{c}\right)\right] = \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right]$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \cos\left[\omega\left(t - \frac{R_{\pm}}{c}\right)\right] = \\ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \mp \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \end{aligned}$$

Agora, podemos efetuar a segunda aproximação. Como queremos que a fonte seja pequena quando comparada com as dimensões do problema, não deve haver retardo apreciável na emissão produzida por uma das duas cargas que formam o dipolo em relação à outra na região do dipolo, ou seja, a radiação emitida pelas duas cargas deve sair do dipolo ao mesmo tempo. Assim, como λ é o comprimento de onda da radiação de frequência angular ω , queremos que $d \ll \lambda$, o que implica que a onda emitida por uma das cargas percorre uma distância muito pequena dentro do dipolo quando comparada com o seu próprio comprimento de onda. Nesse limite, que também pode ser escrito como $d \ll \frac{c}{\omega}$ ², podemos aproximar a expressão acima por

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{R_{\pm}}{c}\right)\right] = \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \mp \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad (25.3)$$

Reunindo agora as equações 25.2 e 25.3 em 25.1, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \right. \\ \left. - \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] + \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta\right) \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{d}{r} \cos \theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega d}{c} \cos \theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\}$$

² Na verdade, $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$, mas o fator 2π é irrelevante aqui.

ou ainda,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{1}{r} \cos \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{c} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

Note que, quando $\omega \rightarrow 0$, isto é, quando estamos no limite estático, temos

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

que está de acordo com a expressão 5.33 para um dipolo pontual situado na origem. Interessam-nos agora os potenciais emitidos pelo dipolo e que dão origem à radiação observada a grandes distâncias dele. Assim, queremos que haja um retardo apreciável entre os instantes em que a radiação é produzida no dipolo e recebida no ponto de observação, de modo que devemos ter a condição $r \gg \lambda$, ou também, $r \gg \frac{c}{\omega}$. Nesse limite, o potencial elétrico do dipolo fica

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = -\frac{p_0 \omega \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 c r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \quad (25.4)$$

Para obter o potencial vetor magnético, partimos da corrente elétrica que circula entre as cargas, obtida por meio de

$$i = \frac{dQ}{dt} = -Q_0 \omega \sin \omega t$$

Agora, usamos a relação 16.6,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

que fica, para o nosso caso, lembrando que a corrente deve ser calculada no tempo retardado,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{-Q_0 \omega \sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] dz \hat{\mathbf{k}}}{R}$$

onde, pela figura 25.1,

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rz \cos \theta + z^2}$$

Considerando agora que $d \ll r$, temos

$$R = r \left(1 - \frac{2z}{r} \cos \theta + \frac{z^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou, em primeira ordem em d ,

$$R = r \left(1 - \frac{z}{r} \cos \theta \right)$$

e também

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z}{r} \cos \theta \right)^{-1}$$

ou

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{z}{r} \cos \theta \right)$$

de modo que

$$\sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] = \sin \left\{ \omega \left[t - \frac{r \left(1 - \frac{z}{r} \cos \theta \right)}{c} \right] \right\}$$

ou

$$\sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] = \sin \left\{ \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega z}{c} \cos \theta \right] \right\}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] = \\ \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left(\frac{\omega z}{c} \cos \theta \right) - \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left(\frac{\omega z}{c} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Como $d \ll \lambda$ e $|z| \leq d$, temos $|z| \ll \lambda$, de modo que podemos efetuar a aproximação equivalente $|z| \ll \frac{c}{\omega}$, obtendo

$$\sin \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \approx \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega z}{c} \cos \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

Voltando à integral para determinar $\vec{\mathcal{A}}$, temos

$$\vec{\mathcal{A}} = -\frac{Q_0\omega\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{k}} \times \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left\{ \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega z}{c} \cos\theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{z}{r} \cos\theta\right) dz$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}} = -\frac{Q_0\omega\mu_0}{4\pi r} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dz - \frac{\omega}{c} \cos\theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z dz \right. \\ \left. + \frac{\cos\theta}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z dz - \frac{\omega \cos^2\theta}{c} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2 dz \right\}$$

e então,

$$\vec{\mathcal{A}} = -\frac{Q_0\omega\mu_0}{4\pi r} \hat{\mathbf{k}} \left\{ d \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{d^3 \omega \cos^2\theta}{12 c} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\}$$

No limite $d \ll \frac{c}{\omega}$, resta apenas

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{p_0\omega\mu_0}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{k}} \quad (25.5)$$

De posse dos potenciais dados pelas equações 25.4 e 25.5, podemos calcular os campos elétrico e magnético. Vamos precisar de

$$\nabla V = \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \left[-\frac{p_0\omega \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 cr} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right]$$

onde usamos o operador ∇ em coordenadas esféricas (equação B.16). Desenvolvendo a expressão acima, temos

$$\nabla V = \frac{p_0\omega \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 cr} \left\{ \frac{\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]}{r} + \frac{\omega}{c} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \hat{\mathbf{r}} \\ + \frac{p_0\omega \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 cr^2} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ou, lembrando que $r \gg \frac{c}{\omega}$ na região de interesse,

$$\nabla V \approx \frac{p_0\omega^2 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \cos\theta}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{r}} \quad (25.6)$$

Vamos usar também

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = & -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{k}} = \\ & -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (25.7) \end{aligned}$$

Podemos obter o campo elétrico mediante 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \mathbb{V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ou seja, usando as equações 25.6 e 25.7,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = & -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \cos \theta}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi r} \sin \theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (25.8)$$

O campo magnético é calculado por intermédio de 20.2,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{A}$$

Utilizando a expressão B.19 para o rotacional em coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = & \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

Como $\vec{A}$ não depende de ϕ nem apresenta componente nessa direção, temos apenas

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

ou, lembrando 25.5,

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= -\frac{p_0 \omega \mu_0}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= -\frac{p_0 \omega \mu_0}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})\end{aligned}$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{A}_\theta) = -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi c} \sin \theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \theta} = \frac{p_0 \omega \mu_0}{4\pi r} \sin \theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \\ &= \frac{\hat{\phi}}{r} \left\{ -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi c} \sin \theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{p_0 \omega \mu_0}{4\pi r} \sin \theta \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\}\end{aligned}$$

ou

$$\vec{B} = -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi cr} \sin \theta \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \frac{c}{r\omega} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \hat{\phi}$$

Novamente no limite $r \gg \frac{c}{\omega}$, temos

$$\vec{B} = -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi cr} \sin \theta \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \hat{\phi} \quad (25.9)$$

É interessante observar que os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{B}$ são mutuamente perpendiculares e dão origem a uma onda que se propaga na direção radial a partir do dipolo oscilante. Além disso, temos também a relação

$$B_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c}$$

para os módulos dos campos, que representam ondas esféricas partindo do ponto onde está localizado o dipolo. A amplitude dessas ondas decai com $\frac{1}{r}$. O transporte de energia pode ser calculado por meio do vetor de Poynting 21.10,

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

que fica, usando as equações 25.8 e 25.9,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left\{ -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi r} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\theta} \right\} \\ \times \left\{ -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi cr} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{\phi} \right\}$$

ou

$$\vec{S} = \frac{p_0^2 \omega^4 \mu_0}{16\pi^2 cr^2} \sin^2 \theta \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{r}$$

Num ciclo completo, obtemos o vetor de Poynting médio como sendo

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4 \mu_0}{32\pi^2 cr^2} \sin^2 \theta \hat{r}$$

Note que, no eixo do dipolo, $\sin \theta = 0$ e não há emissão nessa direção, enquanto a máxima emissão ocorre no plano perpendicular ao dipolo, que o divide ao meio ($\theta = \frac{\pi}{2}$). O padrão de emissão é muito semelhante ao apresentado na figura 24.1 para uma carga acelerada em velocidades não-relativísticas. A potência média total irradiada é obtida integrando-se a expressão acima, que fica

$$\langle P \rangle = \oint \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{r} dA$$

ou

$$\langle P \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{p_0^2 \omega^4 \mu_0}{32\pi^2 cr^2} \sin^2 \theta \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

que fica

$$\langle P \rangle = 2\pi \frac{p_0^2 \omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c} \overbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}^{\frac{4}{3}}$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4 \mu_0}{12\pi c} \quad (25.10)$$

Note que a potência irradiada cresce bastante com o aumento da frequência ω da radiação emitida. É possível explicar o tom azulado do céu e o avermelhado do amanhecer e do anoitecer mediante um modelo simples envolvendo radiação emitida por dipolos elétricos. Supondo-se que existam moléculas polarizáveis no ar, quando radiação solar incide sobre elas, ocorre a produção de dipolos elétricos induzidos, que oscilam sob a ação dos campos eletromagnéticos responsáveis pela radiação solar. Como o Sol emite radiação num vasto espectro de frequências, as moléculas também oscilam em várias frequências diferentes, reemitindo, ou espalhando, radiação em todas as direções, exceto na direção do eixo do dipolo. Como a potência emitida cresce com a frequência, os tons azulados, que têm frequências maiores do que os vermelhos, são muito mais espalhados do que estes, fazendo com que o céu tenha uma tonalidade azul ³. Além disso, os dipolos que oscilam numa direção paralela à que é definida pela linha que une a posição do dipolo com a posição do observador não podem emitir radiação nessa direção, de modo que a luz do céu espalhada é parcialmente polarizada, o que pode ser facilmente verificado usando filtros polaróides. No amanhecer ou no anoitecer, a luz do Sol atravessa uma camada mais espessa de ar até chegar aos olhos, e grande parte dos tons azuis da luz visível são espalhadas e a radiação que chega ao observador é formada basicamente por tons avermelhados, explicando assim a tonalidade do amanhecer ou do anoitecer. Vejamos agora a radiação emitida por um dipolo magnético oscilante.

25.1.2 Radiação Emitida por um Dipolo Magnético Oscilante

Vamos determinar agora a radiação emitida por um dipolo magnético oscilante. Para representar o dipolo, vamos considerar uma espira de raio a , como mostra a figura 25.2.

Por hipótese, na espira circula uma corrente $i(t)$ oscilante, dada por

$$i(t) = i(0) \cos \omega t = i_0 \cos \omega t$$

de modo que o momento de dipolo magnético correspondente é

$$\vec{m}(t) = i(t) \pi a^2 \hat{k} = m_0 \cos \omega t \hat{k}$$

³ Exceto, é claro, se você estiver olhando diretamente para o Sol.

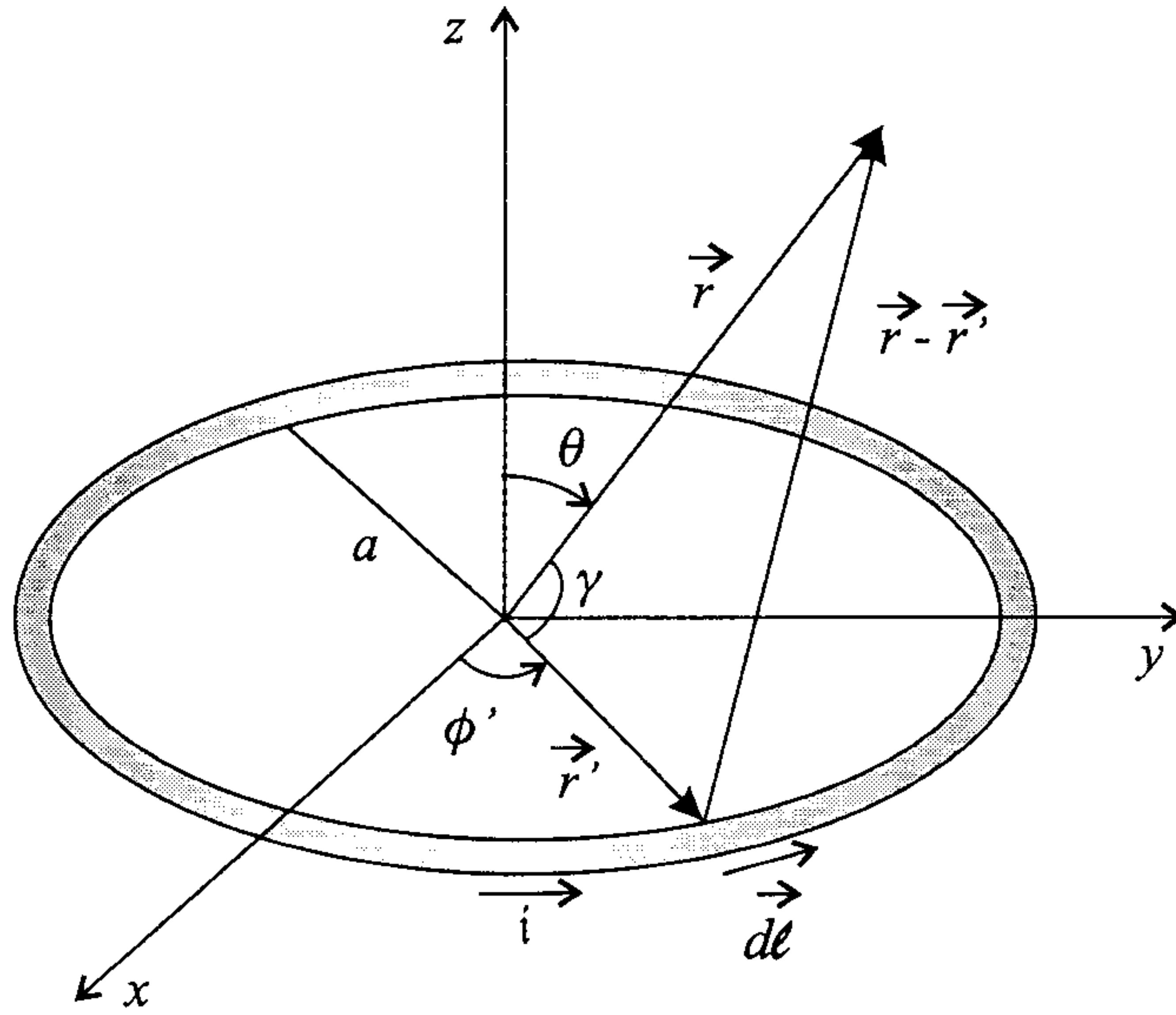


Figura 25.2: Espira utilizada para representar um dipolo magnético.

onde

$$m_0 = i_0 \pi a^2 \quad (25.11)$$

Como a espira está descarregada, o potencial escalar elétrico retardado é nulo, ou seja,

$$\mathbb{V}(\vec{r}, t) = 0 \quad (25.12)$$

No caso do potencial magnético retardado, usamos a equação 16.6,

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

sem esquecer que a corrente deve ser avaliada no tempo retardado t_r , dado por 20.33,

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \frac{R(t_r)}{c}$$

de modo que temos

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i_0 \cos \omega(t - \frac{R}{c})}{R} d\vec{\ell}$$

Se considerarmos, para simplificar, que $\vec{r}$ situa-se no plano yz , o potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}$ deve ter apenas uma componente na direção x , já que na direção y as contribuições devem se anular por causa da simetria da situação. Assim, como

$$d\vec{\ell} = -a \sin \phi' d\phi' \hat{i} + a \cos \phi' d\phi' \hat{j}$$

ficamos com

$$\vec{\mathcal{A}} = -\frac{\mu_0 i_0 a \hat{i}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega(t - \frac{R}{c})}{R} \sin \phi' d\phi' \quad (25.13)$$

Agora, pela lei dos cossenos, temos

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \gamma}$$

Além disso, da figura 25.2, temos também

$$\vec{r} = r \sin \theta \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}$$

e

$$\vec{r}' = a \cos \phi' \hat{i} + a \sin \phi' \hat{j}$$

Então,

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = ar \cos \gamma = ar \sin \theta \sin \phi'$$

de modo que

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \sin \phi'}$$

Agora, devemos considerar que o dipolo magnético é muito pequeno quando comparado com a distância r , de modo que ele pode ser considerado um dipolo magnético pontual. Assim, queremos que

$$a \ll r$$

Nesse limite, temos

$$R = r \sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a}{r} \sin \theta \sin \phi'}$$

ou, expandindo em série de Taylor e considerando apenas termos em primeira ordem,

$$R \approx r \left(1 - \frac{a}{r} \sin \theta \sin \phi' \right)$$

Conseqüentemente,

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \sin \phi' \right) \quad (25.14)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] &\approx \cos \left\{ \omega \left[t - \frac{r}{c} \left(1 - \frac{a}{r} \sin \theta \sin \phi' \right) \right] \right\} \\ \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] &\approx \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{a\omega}{c} \sin \theta \sin \phi' \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] &\approx \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left(\frac{a\omega}{c} \sin \theta \sin \phi' \right) \\ &\quad - \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left(\frac{a\omega}{c} \sin \theta \sin \phi' \right) \end{aligned}$$

Agora, fazemos a segunda aproximação, que consiste em considerar que o dipolo magnético é muito pequeno quando comparado com o comprimento de onda da radiação emitida, de modo que não há retardo apreciável dentro da fonte (o dipolo). Assim, temos

$$a \ll \lambda$$

ou, de forma equivalente,

$$a \ll \frac{c}{\omega} \quad (25.15)$$

Então, considerando que $\cos \delta \approx 1$ e $\sin \delta \approx \delta$, se $\delta \ll 1$, temos

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right] \approx \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{a\omega}{c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin\theta \sin\phi' \quad (25.16)$$

Agora, substituimos as equações 25.14 e 25.16 na expressão 25.13, ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{A} \approx -\frac{\mu_0 i_0 a \hat{\mathbf{i}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{a\omega}{c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin\theta \sin\phi' \right\} \\ \times \left[\frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin\theta \sin\phi' \right) \right] \sin\phi' d\phi' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{A} \approx -\frac{\mu_0 i_0 a \hat{\mathbf{i}}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right. \\ \left. + \frac{a}{r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin\theta \sin\phi' - \frac{a\omega}{c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin\theta \sin\phi' \right. \\ \left. - \frac{a^2\omega}{cr} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin^2\theta \sin^2\phi' \right\} \sin\phi' d\phi' \end{aligned}$$

O último fator pode ser desprezado em comparação com os outros dois, de modo que

$$\begin{aligned} \vec{A} \approx -\frac{\mu_0 i_0 a \hat{\mathbf{i}}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \sin\phi' d\phi' \\ - \frac{\mu_0 i_0 a \hat{\mathbf{i}}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} a \left\{ \frac{1}{r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega}{c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \sin\theta \sin^2\phi' d\phi' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{A} \approx -\frac{\mu_0 i_0 a \hat{\mathbf{i}}}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' \\ - \frac{\mu_0 i_0 a^2 \hat{\mathbf{i}}}{4\pi r} \left\{ \frac{1}{r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{\omega}{c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \right\} \sin\theta \int_0^{2\pi} \sin^2\phi' d\phi' \end{aligned}$$

A primeira integral é nula, enquanto a segunda vale π , de modo que temos

$$\vec{A} \approx -\frac{\mu_0 i_0 a^2 \hat{i}}{4r} \left\{ \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\} \sin \theta$$

Para uma posição $\vec{r}$ qualquer, o potencial vetor magnético deve estar na direção do versor $\hat{\phi}$, de modo que, usando também 25.11, temos

$$\vec{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\phi} \quad (25.17)$$

No limite estático ($\omega \rightarrow 0$), achamos

$$\vec{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$

que está de acordo com a expressão 16.23 obtida anteriormente para o dipolo magnético pontual.

Para determinar a radiação emitida pela fonte, devemos considerar ainda a situação em que há um retardo apreciável entre a fonte e o ponto de observação, de modo que queremos que

$$r \gg \lambda$$

ou

$$r \gg \frac{c}{\omega}$$

Nesse caso, na região de radiação, o primeiro fator do termo entre colchetes na expressão 25.17 pode ser desprezado em comparação com o segundo, de modo que temos, nessa região,

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\sin \theta}{r} \hat{\phi}, \quad r \gg \frac{c}{\omega} \quad (25.18)$$

Podemos obter o campo elétrico mediante 20.3,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

e então, usando 25.18, achamos

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\sin \theta}{r} \hat{\phi}, \quad r \gg \frac{c}{\omega} \quad (25.19)$$

O campo magnético é calculado por meio de 20.2,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

Utilizando a expressão B.19 para o rotacional em coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathcal{A}} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

Como $\vec{\mathcal{A}}$ não depende de ϕ nem apresenta componente nas direções $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$, temos apenas

$$\nabla \times \vec{\mathcal{A}} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)$$

ou, usando a equação 25.18,

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathcal{A}} = & \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\sin^2 \theta}{r} \right\} \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \theta \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\nabla \times \vec{\mathcal{A}} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{8\pi c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\cos \theta}{r^2} \hat{r} - \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\sin \theta}{r} \hat{\theta}$$

Considerando novamente que $r \gg \frac{c}{\omega}$, podemos desconsiderar o primeiro termo, de modo que, em primeira ordem,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\sin \theta}{r} \hat{\theta} \quad (25.20)$$

Note que os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$, dados por 25.19 e 25.20, são perpendiculares entre si e também são perpendiculares à direção de propagação, dada pelo vetor $\hat{\mathbf{r}}$. A razão entre os módulos dos campos é dada por

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} = \frac{\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\sin \theta}{r}}{\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\sin \theta}{r}}$$

ou

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} = c$$

O fluxo de energia, determinado por intermédio do vetor de Poynting 21.10,

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$$

fica

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c^3} \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

cujo valor médio num ciclo é

$$\langle \vec{\mathcal{S}} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (25.21)$$

Há uma grande semelhança matemática entre as expressões obtidas para um dipolo magnético oscilante quando comparadas com as expressões equivalentes determinadas para a radiação emitida por um dipolo elétrico oscilante. O padrão de emissão também se assemelha ao da figura 24.1. A potência total irradiada é obtida integrando-se a expressão 25.21, que fica

$$\langle P \rangle = \oint \langle \vec{\mathcal{S}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{r}} dA$$

ou

$$\langle P \rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{m_0^2 \omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c^3 r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

que fica

$$\langle P \rangle = 2\pi \frac{m_0^2 \omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c^3} \overbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}^{\frac{4}{3}}$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{m_0^2 \omega^4 \mu_0}{12\pi c^3} \quad (25.22)$$

Apesar das semelhanças matemáticas, existem diferenças físicas importantes entre as radiações emitidas por dipolos elétricos e magnéticos. Vamos comparar as expressões 25.10 e 25.22, isto é,

$$\frac{\langle P \rangle_{\text{el.}}}{\langle P \rangle_{\text{mag.}}} = \frac{\frac{p_0^2 \omega^4 \mu_0}{12\pi c}}{\frac{m_0^2 \omega^4 \mu_0}{12\pi c^3}}$$

ou

$$\frac{\langle P \rangle_{\text{el.}}}{\langle P \rangle_{\text{mag.}}} = \frac{p_0^2 c^2}{m_0^2}$$

onde $m_0 = i_0 \pi a^2$ e $p_0 = Qd$. A amplitude da corrente no caso elétrico é $i_0 = Q\omega$ e, para comparação, vamos definir $d = \pi a$. Então,

$$\frac{\langle P \rangle_{\text{el.}}}{\langle P \rangle_{\text{mag.}}} = \frac{\pi^2 a^2 Q^2 c^2}{Q^2 \omega^2 \pi^2 a^4}$$

ou

$$\frac{\langle P \rangle_{\text{el.}}}{\langle P \rangle_{\text{mag.}}} = \left[\frac{c}{\omega a} \right]^2$$

Lembrando agora a condição 25.15,

$$a \ll \frac{c}{\omega}$$

vemos que

$$\frac{c}{a\omega} \gg 1$$

de modo que

$$\frac{\langle P \rangle_{\text{el.}}}{\langle P \rangle_{\text{mag.}}} \gg 1$$

Assim, a radiação emitida por dipolos elétricos e magnéticos de dimensões semelhantes é dominada pela radiação emitida pelos dipolos elétricos, e a contribuição dos dipolo magnéticos só se torna relevante quando não há dipolos elétricos presentes. Vamos agora estabelecer formalmente uma expansão em termos envolvendo multipolos para a radiação emitida por distribuições de cargas e correntes.

25.2 Radiação Emitida por Distribuições Localizadas de Cargas e Correntes

Nosso objetivo agora é determinar a radiação emitida por distribuições de cargas e correntes que tenham um comportamento temporal oscilatório (ou harmônico) ⁴ e que sejam localizadas espacialmente, isto é, que possam ser caracterizadas por um parâmetro a finito que descreva sua extensão espacial. Para isso, vamos considerar que as fontes sejam descritas por

$$\wp(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (25.23a)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (25.23b)$$

Aqui, $\wp$ e $\vec{J}$ são as extensões complexas de ρ e $\vec{J}$ e devemos, depois de obter as expressões finais, tomar a parte real dessas expressões para obter as grandezas físicas relevantes. Estamos interessados nos campos elétrico e magnético que a distribuição de cargas e correntes gera na região externa a ela. Para determinar os campos, precisamos do potencial vetor magnético $\vec{A}$ ⁵, dado por 20.34b,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Utilizando 25.23b e lembrando que

⁴ Ver nota de rodapé 1.

⁵ Na verdade, da extensão complexa de $\vec{A}$.

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

obtemos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

ou, como

$$k = \frac{\omega}{c}$$

temos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int_V \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (25.24)$$

Definindo

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (25.25)$$

achamos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (25.26)$$

que nos fornece a parte espacial do potencial vetor (complexo) magnético. O campo magnético (complexo) é obtido de

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}} \quad (25.27)$$

À primeira vista, pode parecer que esquecemos de mencionar o potencial escalar retardado $\mathcal{V}$. Ele, de fato, não é necessário, já que, como estamos fora da região onde se situa a distribuição de cargas e correntes, a lei de Ampère-Maxwell complexa

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

torna-se, já que $\vec{\mathcal{J}} = 0$ fora das fontes,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

Supondo uma dependência temporal harmônica do tipo

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (25.28)$$

para o campo elétrico, temos

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -i\omega\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$$

ou, como $k = \frac{\omega}{c}$,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{ck\epsilon_0} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}$$

ou, como

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

e, de 22.43,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

temos

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}} \quad (25.29)$$

onde Z_0 é a impedância do vácuo. Note que, por essa expressão, precisamos conhecer apenas $\vec{\mathcal{H}}$, o qual, por seu turno, depende apenas de $\vec{\mathcal{B}}$, obtido por meio de 25.27, que envolve apenas $\vec{\mathcal{A}}$. Assim, não é necessário calcular $\mathbb{V}$.

Dada uma certa distribuição de correntes $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')$, formalmente resta-nos apenas resolver a integral na equação 25.26 para obter o potencial vetor $\vec{\mathcal{A}}$ e também, na sequência, os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ na região externa à distribuição $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')$. Tal procedimento é, em geral, bastante complicado, requerendo algum tipo de consideração ou aproximação para ser efetuado. Assim, é interessante considerar aqui três situações físicas distintas, que estão relacionadas ao tamanho característico a da fonte, ao comprimento de onda definido por $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$ e à distância r entre a fonte e o ponto de observação. Tais

situações ocorrem quando temos as seguintes relações entre as grandezas acima:

1. $a \ll r \ll \lambda$. Nesse caso, conhecido como *zona estática* ou *próxima*, o tamanho característico a da distribuição de fontes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é muito menor que a distância r entre ela e o ponto de observação, ou seja, $a \ll r$. Aliás, essa condição também é verificada nos outros dois casos considerados. Além disso, o comprimento de onda λ é muito maior do que r , o que indica que os efeitos de retardo entre a fonte e o ponto de observação são praticamente nulos, e os campos assemelham-se aos campos estáticos usuais. Nessa região ocorre

$$r \ll \lambda$$

ou

$$r \ll \frac{2\pi}{k}$$

ou ainda, desconsiderando o fator 2π ,

$$kr \ll 1 \tag{25.30}$$

2. $a \ll r \sim \lambda$. Nesse caso, como antes, a fonte é pequena quando comparada com a distância r entre ela e o ponto de observação. Entretanto, agora o comprimento de onda λ é da ordem de r , de modo que há retardo mensurável entre fonte e observador. Esta região é chamada de *zona de indução* ou *intermediária*, e ela é aquela na qual a complexidade matemática torna-se maior. Ela é caracterizada por ter

$$kr \sim 1 \tag{25.31}$$

3. $a \ll \lambda \ll r$. O último caso é o que corresponde, efetivamente, àquele em que há emissão de radiação no sentido que temos considerado. O ponto de observação está muito longe da fonte e existe grande retardo entre a emissão e a recepção do sinal, de modo que energia é efetivamente transferida entre fonte e observador, caracterizando assim a *zona de radiação* ou *distante*. Matematicamente, nessa região temos

$$kr \gg 1 \quad (25.32)$$

Antes de estudar com mais detalhes as regiões ou zonas acima, vamos apresentar a figura 25.3, que mostra as grandezas relevantes para nossas considerações futuras.

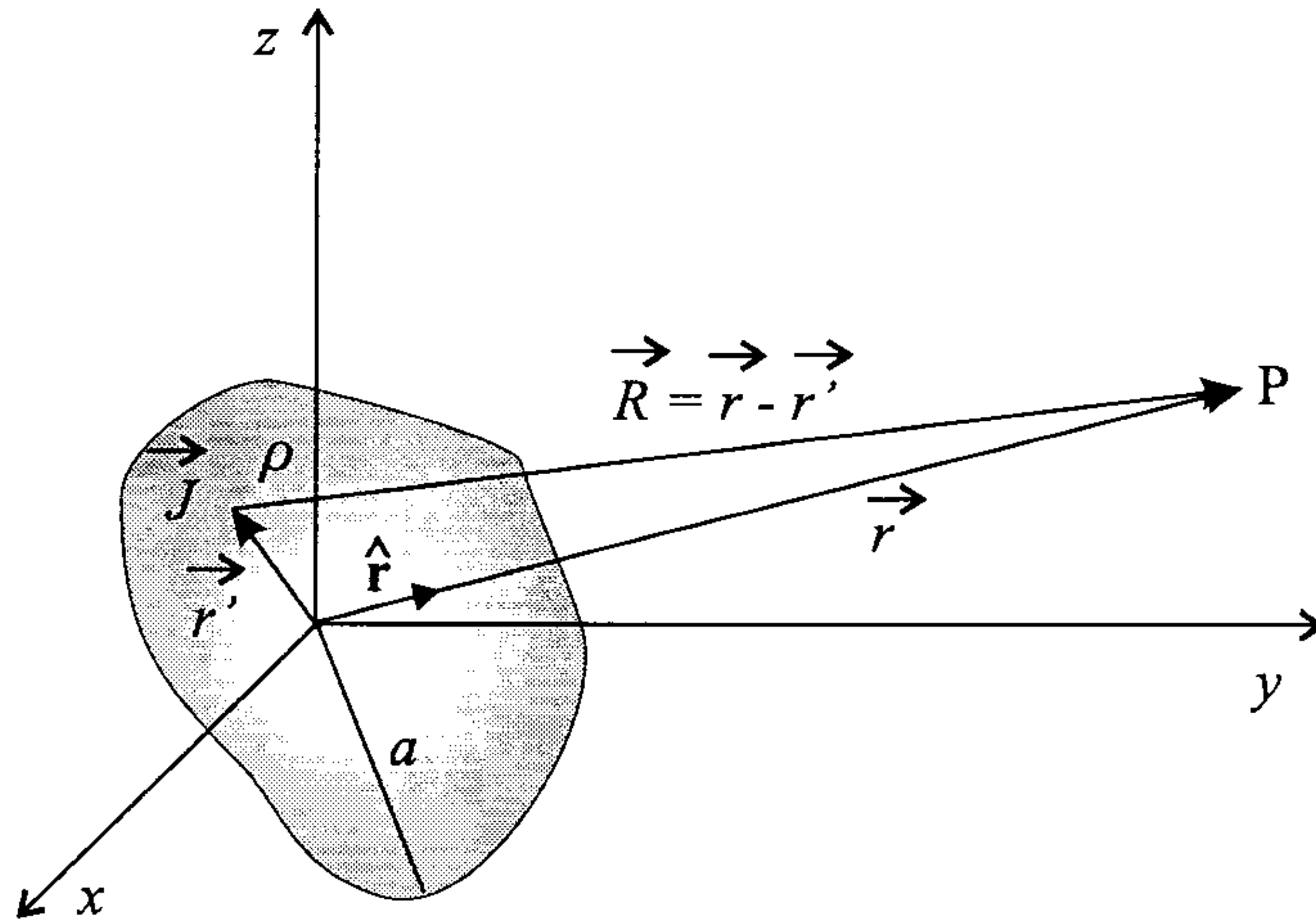


Figura 25.3: Diagrama apresentando a distribuição de fontes e as grandezas envolvidas.

Tendo apresentado a figura 25.3, vejamos agora com mais detalhes as três regiões acima definidas.

25.3 A Zona Estática ou Próxima

Na zona estática vale a relação

$$a \ll r \ll \lambda$$

ou, de forma equivalente, dada pela equação 25.30,

$$kr \ll 1$$

Como $kr \ll 1$, a exponencial que aparece na equação 25.26 pode ser aproximada pelo primeiro termo de sua série de Taylor, ou seja, 1, e então temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (25.33)$$

É interessante notar que a expressão 25.33 acima é muito semelhante à equação 16.5, a qual é válida para o caso magnetostático. Para escrever essa expressão na forma de uma expansão em multipolos, consideramos a equação 6.90, que é a expansão do inverso de $|\vec{r} - \vec{r}'|$ em termos dos harmônicos esféricos, ou seja,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Substituindo essa expressão na equação 25.33, temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{4\pi}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi) dV$$

ou, como $r \gg r'$, temos $r_{<} = r'$ e $r_{>} = r$, de modo que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell,m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} \int_V \vec{J}(\vec{r}') r'^{\ell} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') dV \quad (25.34)$$

Esse resultado é muito similar ao que se obtém para o caso estático, a diferença é unicamente o fator temporal $e^{-i\omega t}$, que faz com que $\vec{A}$ e os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilem de forma harmônica no tempo. Em geral, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ terão componentes na direção $\hat{r}$.

25.4 A Zona de Radiação ou Distante

Na zona distante, que é aquela em que efetivamente ocorre a radiação, temos a condição 25.32,

$$kr \gg 1$$

oriunda de

$$a \ll \lambda \ll r$$

Vamos calcular agora

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}$$

ou

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}$$

ou então,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}'}{r}}$$

Como $r' \leq a$, e $a \ll r$, podemos expandir a raiz quadrada em série de Taylor, para obter, em primeira ordem,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \left[1 - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}'}{r} \right]$$

ou

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}' \quad (25.35)$$

Note que essa expressão é válida mesmo na zona próxima, já que lá também ocorre $r \gg a$. Agora, na expressão 25.26, podemos aproximar o denominador, em primeira ordem, apenas por r , de modo que achamos

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') e^{ik(r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}')}}{r} dV$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}'} dV \quad (25.36)$$

Agora, expandimos a função exponencial dentro da integral para obter

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}']^n}{n!} dV$$

ou

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_V \vec{J}(\vec{r}') [k\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}']^n dV \quad (25.37)$$

O n -ésimo termo da somatória tem um valor característico dado por

$$\frac{1}{n!} \int_V \vec{J}(\vec{r}') [k\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}']^n dV$$

Como $a \ll \lambda$ e $r' \leq a$, segue que $ka \ll 1$ e $kr' \ll 1$, de modo que, como o termo kr' aparece elevado na potência n , a importância dos termos de n maior diminui muito rapidamente com n , fazendo com que apenas os primeiros termos sejam relevantes; em particular, o primeiro termo não-nulo é sempre o dominante na radiação observada. Vejamos alguns casos particulares interessantes.

25.4.1 Dipolo Elétrico

Na seção 25.1.1 determinamos os potenciais V e $\vec{A}$ para um dipolo elétrico oscilante, bem como os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ mediante um cálculo bastante detalhado efetuado para uma distribuição de cargas particular (veja a figura 25.1). Vamos agora obter novamente aqueles resultados por meio de um outro modo, eventualmente mais simples e geral. Consideremos que o termo com $n = 0$ na expressão 25.37 seja não-nulo. Conforme vimos, ele será o principal responsável pela radiação emitida pela distribuição de cargas e correntes φ e $\vec{J}$. Assim, para obter os campos, precisamos determinar

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') dV \quad (25.38)$$

Vamos considerar agora a expressão 15.57,

$$\int_V \vec{A} \cdot \nabla \Phi dV = \oint_S \Phi \vec{A} \cdot \hat{n} dA - \int_V \Phi \nabla \cdot \vec{A} dV$$

que define a integração por partes em três dimensões. Aqui, Φ é uma função escalar qualquer, $\vec{A}$ é uma função vetorial qualquer e $\hat{n}$ é um versor normal à superfície fechada definida por S . Vamos considerar as seguintes associações:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{\mathcal{J}} \\ \Phi &= x_i\end{aligned}$$

onde x_i é uma das coordenadas cartesianas, com $i = 1, 2, 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Assim, $\hat{e}_i$ é o versor correspondente à coordenada x_i . Vamos calcular agora

$$\int_V \vec{\mathcal{J}} \cdot \nabla x_i dV = \oint_S x_i \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{n} dA - \int_V x_i \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} dV$$

Como $\vec{\mathcal{J}}$ é bem localizada, ao considerarmos um volume V e uma superfície S suficientemente grandes, a componente normal à superfície $\vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{n}$ se anulará, fazendo com que a integral de superfície se anule. Então,

$$\int_V \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{e}_i dV = - \int_V x_i \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} dV$$

ou

$$\int_V \mathcal{J}_i dV = - \int_V x_i \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} dV$$

Multiplicando esta equação por $\hat{e}_i$ e somando nas três coordenadas, temos

$$\sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \int_V \mathcal{J}_i dV = - \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \int_V x_i \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} dV$$

ou

$$\int_V \vec{\mathcal{J}} dV = - \int_V \vec{r} (\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV$$

de modo que

$$\int_V \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') dV = - \int_V \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV \quad (25.39)$$

Agora, vamos recordar a equação de continuidade 12.21,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Com as definições 25.23, a equação de continuidade fica

$$-i\omega \rho(\vec{r})e^{-i\omega t} + \nabla \cdot \vec{J}e^{-i\omega t} = 0$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{J} = i\omega \rho(\vec{r}) \quad (25.40)$$

Assim, a equação 25.39 fica

$$\int_V \vec{J}(\vec{r}') dV = -i\omega \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV \quad (25.41)$$

Recordemos agora a definição 4.45 para o momento de dipolo elétrico para uma distribuição de cargas, isto é,

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV$$

Com essa definição, a equação 25.41 pode ser reescrita como

$$\int_V \vec{J}(\vec{r}') dV = -i\omega \vec{p} \quad (25.42)$$

e a expressão 25.38 torna-se

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p} \quad (25.43)$$

Para calcular os campos, precisamos da identidade 1.58f,

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = \nabla \Phi \times \vec{A} + \Phi \nabla \times \vec{A}$$

Então, para calcular $\vec{B}$ a partir de 25.27, temos, usando 25.43,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{B}} &= \nabla \times \vec{\mathcal{A}} \\
&= \nabla \times \left[-\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p} \right] \\
\vec{\mathcal{B}} &= -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \right] \times \vec{p} - \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \vec{p}
\end{aligned}$$

Como $\vec{p}$ é fixo, seu rotacional é nulo, e assim achamos

$$\vec{\mathcal{B}} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{r(ik)e^{ikr} - e^{ikr}}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}$$

que pode ser reescrita como

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k^2 c \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p} \quad (25.44)$$

de modo que $\vec{\mathcal{H}}$ fica

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} = \frac{k^2 c}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p} \quad (25.45)$$

Para determinar $\vec{\mathcal{E}}$, usamos a expressão 25.29,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}$$

e usamos novamente a identidade 1.58f, de modo que, de 25.45,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{E}} &= \frac{iZ_0}{k} \frac{k^2 c}{4\pi} \nabla \times \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p} \right] \\
\vec{\mathcal{E}} &= \frac{ik}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] + \frac{ik}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \nabla \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}]
\end{aligned} \quad (25.46)$$

Primeiro, calculamos

$$\begin{aligned}
\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] &= \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{ikr^2} \right] \\
&= \left[\frac{r(ik)e^{ikr} - e^{ikr}}{r^2} - \frac{1}{ik} \frac{r^2(ik)e^{ikr} - 2re^{ikr}}{r^4} \right] \hat{\mathbf{r}} \\
&= ik \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 - \frac{1}{ikr} - \frac{1}{ikr} - 2 \frac{1}{k^2 r^2} \right] \hat{\mathbf{r}} \\
\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] &= ik \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 - \frac{2}{ikr} - 2 \frac{1}{k^2 r^2} \right] \hat{\mathbf{r}} \tag{25.47}
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a identidade 1.58i,

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

vamos determinar

$$\nabla \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] = (\nabla \cdot \vec{p})\hat{\mathbf{r}} - (\nabla \cdot \hat{\mathbf{r}})\vec{p} + (\vec{p} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\vec{p} \tag{25.48}$$

Como $\vec{p}$ é fixo, o primeiro e o último termos do lado direito são nulos, e resta calcular os outros dois fatores. Para isso, vamos precisar de duas propriedades relevantes, que vamos demonstrar em seguida. A primeira estabelece que

$$\nabla \cdot [\Phi(r)\hat{\mathbf{r}}] = \frac{2\Phi}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{25.49}$$

onde $\Phi(r)$ é uma função escalar de r . Vejamos sua demonstração.

Demonstração. Para demonstrar a equação 25.49, inicialmente vamos reescrevê-la como

$$\nabla \cdot [\Phi(r)\hat{\mathbf{r}}] = \nabla \cdot \left[\frac{\Phi(r)}{r} \vec{r} \right]$$

Agora, aplicamos a identidade 1.58e,

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\nabla \cdot \vec{A})$$

que fica, para o nosso caso,

$$\nabla \cdot [\Phi(r)\hat{\mathbf{r}}] = \nabla \left[\frac{\Phi(r)}{r} \right] \cdot \vec{r} + \frac{\Phi(r)}{r} \nabla \cdot \vec{r}$$

ou, lembrando que $\nabla \cdot \vec{r} = 3$,

$$\nabla \cdot [\Phi(r)\hat{r}] = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} - \frac{\Phi(r)}{r^2} \right] \hat{r} \cdot \vec{r} + \frac{3\Phi(r)}{r}$$

que fica, então,

$$\nabla \cdot [\Phi(r)\hat{r}] = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} - \frac{\Phi(r)}{r} + \frac{3\Phi(r)}{r}$$

ou

$$\nabla \cdot [\Phi(r)\hat{r}] = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} + \frac{2\Phi(r)}{r}$$

que é a expressão que queríamos demonstrar. □

Assim, fazendo $\Phi(r) = 1$ na expressão 25.49, temos

$$\nabla \cdot \hat{r} = \frac{2}{r} \quad (25.50)$$

que é um dos termos necessários. O outro termo usa a identidade

$$(\vec{A} \cdot \nabla)[\Phi(r)\hat{r}] = \frac{\Phi}{r} [\vec{A} - (\vec{A} \cdot \hat{r})\hat{r}] + (\vec{A} \cdot \hat{r}) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} \quad (25.51)$$

onde $\vec{A}$ é um campo vetorial qualquer e $\Phi(r)$, uma função escalar de r . Vamos agora demonstrar essa identidade.

Demonstração. Para demonstrar a expressão 25.51, vamos escrever

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

Além disso, vamos precisar também de

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Assim, temos

$$\vec{A} \cdot \nabla = [A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}] \cdot \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ou

$$\vec{A} \cdot \nabla = A_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Então,

$$(\vec{A} \cdot \nabla) [\Phi(r) \hat{r}] = \left[A_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] [\Phi(r) \hat{r}]$$

ou

$$\begin{aligned} (\vec{A} \cdot \nabla) [\Phi(r) \hat{r}] &= \Phi(r) \left[A_r \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} \right] \\ &\quad + \left[A_r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial \Phi(r)}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi(r)}{\partial \phi} \right] \hat{r} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta} \qquad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} = \sin \theta \hat{\phi}$$

e como $\Phi(r)$ é função apenas de r , temos

$$(\vec{A} \cdot \nabla) [\Phi(r) \hat{r}] = \Phi(r) \left[\frac{A_\theta}{r} \hat{\theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \sin \theta \hat{\phi} \right] + A_r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \hat{r}$$

ou

$$(\vec{A} \cdot \nabla) [\Phi(r) \hat{r}] = \frac{\Phi(r)}{r} [A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}] + A_r \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \hat{r}$$

Agora, temos que

$$A_r = \vec{A} \cdot \hat{r}$$

e

$$\begin{aligned} A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi} &= \vec{A} - A_r \hat{r} \\ A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi} &= \vec{A} - (\vec{A} \cdot \hat{r}) \hat{r} \end{aligned}$$

de modo que

$$(\vec{A} \cdot \nabla) [\Phi(r) \hat{r}] = \frac{\Phi(r)}{r} [\vec{A} - (\vec{A} \cdot \hat{r}) \hat{r}] + (\vec{A} \cdot \hat{r}) \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \hat{r}$$

que é a expressão 25.51, agora demonstrada. □

Fazendo agora $\vec{A} = \vec{p}$ e $\Phi(r) = 1$ na expressão 25.51, achamos

$$(\vec{p} \cdot \nabla) \hat{r} = \frac{1}{r} [\vec{p} - (\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \quad (25.52)$$

Voltando agora à equação 25.48, aplicando as expressões 25.50 e 25.52, temos

$$\nabla \times [\hat{r} \times \vec{p}] = -\frac{2}{r} \vec{p} + \frac{1}{r} [\vec{p} - (\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r}]$$

ou

$$\nabla \times [\hat{r} \times \vec{p}] = -\frac{1}{r} [\vec{p} + (\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \quad (25.53)$$

Em seguida, voltamos à equação 25.46 para $\vec{\mathcal{E}}$, usando as equações 25.47 e 25.53,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = \frac{ik}{4\pi\epsilon_0} \left\{ ik \frac{e^{ikr}}{r} \left[1 - \frac{2}{ikr} - \frac{2}{k^2 r^2} \right] \hat{r} \right\} \times [\hat{r} \times \vec{p}] \\ - \frac{ik}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \frac{1}{r} [\vec{p} + (\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = -\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times [\hat{r} \times \vec{p}] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(2ik - \frac{2}{r} \right) \hat{r} \times [\hat{r} \times \vec{p}] \\ - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(ik - \frac{1}{r} \right) [\vec{p} + (\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \end{aligned}$$

Usando agora o duplo produto vetorial 1.19a,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

temos

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{p})\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\vec{p}$$

ou

$$\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{p})\hat{\mathbf{r}} - \vec{p} \quad (25.54)$$

então,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] \times \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(2ik - \frac{2}{r} \right) [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{p})\hat{\mathbf{r}} - \vec{p}] \\ - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(ik - \frac{1}{r} \right) [\vec{p} + (\vec{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(\frac{1}{r} - ik \right) [3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{p})\hat{\mathbf{r}} - \vec{p}] \right\} \quad (25.55)$$

Assim, a equação acima em conjunto com a equação 25.44 para o campo magnético,

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k^2 c \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}$$

estabelece os campos $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ gerados ⁶ por um dipolo elétrico na zona de radiação e, na verdade, nesse caso em particular essas expressões valem também nas outras duas zonas, tanto a estática quanto a de indução ⁷. Note que $\vec{\mathcal{E}}$ tem componentes paralelos e perpendiculares a $\hat{\mathbf{r}}$, ao contrário de $\vec{\mathcal{B}}$, que é sempre transversal. Na zona estática, em que $kr \rightarrow 0$, os campos tendem aos valores

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{p})\hat{\mathbf{r}} - \vec{p}}{r^3}$$

e

⁶ É importante lembrar que essa é a parte espacial dos campos, devendo-se multiplicar ainda por $e^{-i\omega t}$ para obter os campos completos.

⁷ Compare, por exemplo, o termo com $\ell = 0$ na expressão 25.34 com a equação 25.38.

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}}{r^2}$$

É interessante notar que $\vec{\mathcal{E}}$ é bem mais intenso que $\vec{\mathcal{B}}$, em virtude das suas dependências com relação a r . Além disso, no limite estático, em que $\omega \rightarrow 0$, $\vec{\mathcal{B}} \rightarrow 0$, como deve ser, já que nesse caso o dipolo é estático. No outro extremo, em que $kr \gg 1$, que caracteriza a zona de radiação, os campos têm as expressões limites

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] \times \hat{\mathbf{r}}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{k^2 c \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}$$

Conforme se vê nessas expressões, os campos são transversais entre si e também com relação à direção de propagação, definida por $\hat{\mathbf{r}}$. Além disso, ambos possuem a mesma dependência com r , sendo igualmente importantes⁸. Os campos completos são obtidos multiplicando-se pela parte temporal, de modo que temos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] \times \hat{\mathbf{r}}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{k^2 c \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] \times \hat{\mathbf{r}}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi c} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}$$

⁸ As diferenças numéricas nesse caso são devidas ao sistema de unidades utilizado, o SI.

cujas partes reais, que correspondem aos campos físicos, são

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi} \frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}] \times \hat{\mathbf{r}}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi c} \frac{\cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{p}$$

Para comparar diretamente com as expressões obtidas antes, fazemos $\vec{p} = p_0 \hat{\mathbf{k}}$, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{p_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

que são as expressões 25.8 e 25.9 obtidas anteriormente.

25.4.2 Dipolo Magnético

Após rever o dipolo elétrico, vamos estudar novamente um dipolo magnético como aquele apresentado na seção 25.1.2. Para isso, vamos precisar do termo com $n = 1$ na expansão 25.37, que fica, nesse caso,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = -\frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') [\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}'] dV$$

Vamos reescrever o termo dentro da integral da seguinte forma:

$$\vec{\mathcal{J}}[\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}'] = \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \vec{r}' \right] + \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \vec{r}' \right]$$

Note que o primeiro termo entre colchetes é simétrico em relação a $\vec{\mathcal{J}}$ e $\vec{r}'$, enquanto o segundo é anti-simétrico. O termo anti-simétrico pode ser reescrito se considerarmos a identidade 1.19a,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

de modo que

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\vec{r}' \times \vec{\mathcal{J}}) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \vec{r}' - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \vec{\mathcal{J}}$$

Então,

$$\vec{\mathcal{J}}[\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}'] = \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \vec{r}' \right] - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}} \times (\vec{r}' \times \vec{\mathcal{J}}) \quad (25.56)$$

Vamos considerar agora inicialmente o potencial vetor magnético gerado apenas pela parte anti-simétrica, isto é,

$$\vec{\mathcal{A}}_A(\vec{r}) = -\frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \left[-\frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}} \times (\vec{r}' \times \vec{\mathcal{J}}) \right] dV$$

onde o índice A em $\vec{\mathcal{A}}_A$ indica que é o potencial gerado pela parte anti-simétrica. Podemos escrever

$$\vec{\mathcal{A}}_A(\vec{r}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \left[\int_V \frac{\vec{r}' \times \vec{\mathcal{J}}}{2} dV \right]$$

Agora, relembrando a equação 15.45, que define o momento de dipolo magnético, temos

$$\vec{\mathbf{m}} = \int_V \frac{\vec{r}' \times \vec{\mathcal{J}}}{2} dV$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{A}}_A(\vec{r}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{m}} \quad (25.57)$$

Assim, esse é o potencial vetor magnético que está associado ao dipolo magnético definido pela distribuição de cargas e correntes. Para calcular $\vec{\mathcal{B}}$, precisamos da identidade 1.58f,

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = \nabla \Phi \times \vec{A} + \Phi \nabla \times \vec{A}$$

de modo que, usando 25.57, temos

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A}_A \\
&= \nabla \times \left[\frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \vec{m} \right] \\
\vec{B} &= \frac{ik\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \times [\hat{r} \times \vec{m}] + \frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times [\hat{r} \times \vec{m}]
\end{aligned} \tag{25.58}$$

O primeiro fator fica

$$\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = \frac{r(ik)e^{ikr} - e^{ikr}}{r^2} \hat{r}$$

ou

$$\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = ik \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{r} \tag{25.59}$$

O segundo fator tem um desenvolvimento semelhante àquele feito após a equação 25.48, e o resultado é

$$\nabla \times [\hat{r} \times \vec{m}] = -\frac{1}{r} [\vec{m} + (\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \tag{25.60}$$

Utilizando as equações 25.59 e 25.60 em 25.58, temos

$$\vec{B} = \frac{ik\mu_0}{4\pi} ik \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{r} \times [\hat{r} \times \vec{m}] - \frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{r} [\vec{m} + (\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r}]$$

No entanto, devemos lembrar que na zona de radiação, $r \rightarrow \infty$, e apenas os termos com a potência mais baixa em r são relevantes, de modo que

$$\vec{B} = -\frac{k^2\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times [\hat{r} \times \vec{m}] \tag{25.61}$$

que pode ser reescrita, se compararmos o duplo produto vetorial com a equação 25.54, de modo que

$$\hat{r} \times [\hat{r} \times \vec{m}] = (\hat{r} \cdot \vec{m}) \hat{r} - \vec{m}$$

e então,

$$\vec{B} = -\frac{k^2\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} [(\hat{r} \cdot \vec{m}) \hat{r} - \vec{m}] \tag{25.62}$$

Assim, $\vec{\mathcal{H}}$ fica

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} = -\frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{m}}) \hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{m}}] \quad (25.63)$$

Para determinar $\vec{\mathcal{E}}$, usamos a expressão 25.29,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}$$

e usamos novamente a identidade 1.58f, de modo que, de 25.63,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{iZ_0}{k} \frac{k^2}{4\pi} \nabla \times \left\{ \frac{e^{ikr}}{r} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{m}}) \hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{m}}] \right\} \\ \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{iZ_0 k}{4\pi} \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \times [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{m}}) \hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{m}}] + \frac{iZ_0 k}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{m}}) \hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{m}}] \end{aligned}$$

Agora, usando a equação 25.59, achamos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{iZ_0 k}{4\pi} ik \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{r}} \times [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{m}}) \hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{m}}] + \\ &\quad \frac{iZ_0 k}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{m}}) \hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{m}}] \end{aligned}$$

A expressão acima simplifica-se bastante, já que $\vec{\mathbf{m}}$ é irrotacional, assim como qualquer função apenas de r , o que elimina todo o segundo termo. Além disso, $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$, e resta, considerando também apenas a potência mais baixa em r ,

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{Z_0 k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{m}} \quad (25.64)$$

Note que tanto $\vec{\mathcal{E}}$ como $\vec{\mathcal{B}}$ são perpendiculares entre si, e também o são com relação ao versor $\hat{\mathbf{r}}$. Os campos completos são

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{Z_0 k^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{m}}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{k^2 \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{m}}]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{Z_0 \omega^2}{4\pi c^2} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{m}}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi c^2} \frac{e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{m}}]$$

cujas partes reais são

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{Z_0 \omega^2}{4\pi c^2} \frac{\cos \omega(t - \frac{r}{c})}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{m}} \quad (25.65)$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi c^2} \frac{\cos \omega(t - \frac{r}{c})}{r} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{m}}] \quad (25.66)$$

Definindo $\vec{\mathbf{m}} = m_0 \hat{\mathbf{k}}$, temos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{m_0 \mu_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \hat{\phi}$$

onde substituímos Z_0 e c em termos de μ_0 e ϵ_0 e

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{m_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi c^2} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \hat{\theta}$$

que são as expressões 25.19 e 25.20 obtidas anteriormente na seção 25.1.2. Vamos agora estudar o termo simétrico na equação 25.56, o qual, conforme veremos, nos levará ao momento de quadrupolo elétrico.

25.4.3 Quadrupolo Elétrico

Nosso objetivo agora é calcular o potencial vetor magnético referente à parte simétrica da equação 25.56,

$$\vec{\mathcal{J}}[\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}'] = \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \vec{r}' \right] - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}} \times (\vec{r}' \times \vec{\mathcal{J}})$$

ou seja, o potencial

$$\vec{A}_S(\vec{r}) = -\frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \vec{r}' \right] dV \quad (25.67)$$

que consiste na integral do primeiro termo entre colchetes. Vamos reescrever esse termo e, para isso, consideramos que

$$\nabla' \cdot \left[x'_i \vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \right] = \vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \cdot \nabla' x'_i + x'_i \nabla' \cdot \left[\vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \right]$$

onde x_i é uma coordenada espacial e usamos a identidade 1.58e. Usando novamente 1.58e no segundo termo, essa expressão fica

$$\nabla' \cdot \left[x'_i \vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \right] = \vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i + x'_i (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{\mathcal{J}} + x'_i \vec{\mathcal{J}} \cdot \nabla' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}')$$

ou, usando a expressão 25.40,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = i\omega \wp(\vec{r})$$

temos

$$\nabla' \cdot \left[x'_i \vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \right] = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \mathcal{J}_i + x'_i (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') (i\omega) \wp + x'_i \vec{\mathcal{J}} \cdot \nabla' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \quad (25.68)$$

Agora, precisamos calcular $\nabla' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}')$. Para isso, usamos a identidade 1.58h,

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

que fica

$$\nabla' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla') \vec{r}' + \hat{\mathbf{r}} \times (\nabla' \times \vec{r}') + (\vec{r}' \cdot \nabla') \hat{\mathbf{r}} + \vec{r}' \times (\nabla' \times \hat{\mathbf{r}}) \quad (25.69)$$

Os três últimos termos são nulos. O primeiro usa a identidade 25.51,

$$(\vec{A} \cdot \nabla) [\Phi(r) \hat{\mathbf{r}}] = \frac{\Phi}{r} [\vec{A} - (\vec{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] + (\vec{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}$$

com $\vec{A} = \hat{\mathbf{r}}$ e $\Phi(r') = r'$. Nesse caso,

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla') [r' \hat{\mathbf{r}}] = \frac{r'}{r'} [\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \hat{\mathbf{r}}'] + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \frac{\partial r'}{\partial r'} \hat{\mathbf{r}}'$$

ou

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla') \vec{r}' = \hat{\mathbf{r}} \quad (25.70)$$

Então, voltando à equação 25.69, temos

$$\nabla'(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') = \hat{\mathbf{r}} \quad (25.71)$$

Substituindo 25.71 em 25.68, achamos

$$\nabla' \cdot [x'_i \vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}')] = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \mathcal{J}_i + i\omega x'_i (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp + x'_i \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (25.72)$$

Agora, integramos essa expressão em todo o volume V , isto é,

$$\begin{aligned} \int_V \nabla' \cdot [x'_i \vec{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}')] dV = \\ \int_V (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \mathcal{J}_i dV + \int_V i\omega x'_i (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV + \int_V x'_i \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dV \end{aligned}$$

e usamos o teorema do divergente 1.54 para transformar a integral do lado esquerdo numa integral de superfície, ou seja,

$$\begin{aligned} \oint_S x'_i (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dA = \\ \int_V (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \mathcal{J}_i dV + i\omega \int_V x'_i (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV + \int_V x'_i \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dV \end{aligned}$$

Agora, como $\vec{\mathcal{J}}$ é localizada e V é muito maior do que o tamanho dessa distribuição, a componente normal à superfície se anula e a integral de superfície é nula, de modo que

$$\int_V (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \mathcal{J}_i dV + i\omega \int_V x'_i (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV + \int_V x'_i \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dV = 0$$

Vamos multiplicar essa expressão por $\hat{\mathbf{e}}'_i$ e somar as três componentes, isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_i \int_V (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \mathcal{J}_i dV \\ + \sum_{i=1}^3 i\omega \hat{\mathbf{e}}'_i \int_V x'_i (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV + \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_i \int_V x'_i \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dV = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\int_V (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \vec{\mathcal{J}} dV + i\omega \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV + \int_V \vec{r}' (\vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) dV = 0$$

de forma que

$$\int_V [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \vec{\mathcal{J}} + \vec{r}' (\vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathbf{r}})] dV = -i\omega \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV \quad (25.73)$$

Substituindo a equação 25.73 em 25.67, temos

$$\vec{\mathcal{A}}_S(\vec{r}) = \frac{ik\mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} (i\omega) \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}}_S(\vec{r}) = -\frac{k\omega\mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV$$

Para calcular $\vec{\mathcal{B}}$, usaremos novamente 1.58f, e vamos considerar apenas a menor potência em r , pois estamos interessados na radiação emitida. Assim, temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}} &= \nabla \times \vec{\mathcal{A}}_A \\ \vec{\mathcal{B}} &= \nabla \times \left[-\frac{k\omega\mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}} &= -\frac{k\omega\mu_0}{8\pi} \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \times \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV \\ &\quad - \frac{k\omega\mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV \quad (25.74) \end{aligned}$$

Para o primeiro termo, temos, pela equação 25.59,

$$\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = ik \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{\mathbf{r}}$$

ou, mantendo apenas o termo relevante,

$$\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \simeq ik \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad (25.75)$$

Para o segundo termo, usamos inicialmente a identidade 1.58f,

$$\nabla \times [\vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp(\vec{r}')] = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp(\vec{r}') \nabla \times \vec{r}' + \wp(\vec{r}') \vec{r}' \nabla (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \quad (25.76)$$

O primeiro termo é nulo, já que ∇ age apenas nas coordenadas $\vec{r}$. O segundo fica, usando a identidade 1.58h e adaptando a equação 25.69,

$$\nabla (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \vec{r}' + \hat{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \vec{r}') + (\vec{r}' \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} + \vec{r}' \times (\nabla \times \hat{\mathbf{r}}) \quad (25.77)$$

Os dois primeiros termos são nulos, assim como o último. O terceiro usa a identidade 25.51,

$$(\vec{A} \cdot \nabla) [\Phi(r) \hat{\mathbf{r}}] = \frac{\Phi}{r} [\vec{A} - (\vec{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] + (\vec{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}$$

com $\vec{A} = \vec{r}'$ e $\Phi(r') = 1$. Nesse caso,

$$(\vec{r}' \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r} [\vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] \quad (25.78)$$

Usando 25.78 em 25.77, temos

$$\nabla (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') = \frac{1}{r} [\vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}]$$

e retornando à equação 25.76, achamos

$$\nabla \times [\vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp(\vec{r}')] = \wp(\vec{r}') \vec{r}' \frac{1}{r} [\vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] \quad (25.79)$$

Agora, reunindo as equações 25.75 e 25.79 em 25.74, temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}} = & -\frac{k\omega\mu_0}{8\pi} ik \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV \\ & - \frac{k\omega\mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \wp(\vec{r}') \vec{r}' \frac{1}{r} [\vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] dV \end{aligned}$$

ou

$$\vec{B} = -\frac{ik^2\omega\mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp dV - \frac{k\omega\mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r^2} \int_V \wp(\vec{r}') \vec{r}' [\vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] dV$$

Agora, percebemos que o segundo termo acima envolve fatores proporcionais a r^{-2} , de modo que esse termo pode ser desprezado quando comparado com o outro. Assim, ficamos com

$$\vec{B} = -\frac{ik^2\omega\mu_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \int_V \vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp(\vec{r}') dV \quad (25.80)$$

Precisamos agora reescrever essa expressão, para colocá-la numa forma mais conhecida. Inicialmente, escrevemos

$$\vec{B} = -\frac{ik^2\omega\mu_0}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \int_V 3\vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') \wp(\vec{r}') dV$$

Agora, adicionamos a essa expressão o fator

$$\frac{ik^2\omega\mu_0}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} \int_V r'^2 \wp(\vec{r}') dV = \frac{ik^2\omega\mu_0}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \int_V \hat{\mathbf{r}} r'^2 \wp(\vec{r}') dV$$

Note que esse fator, na verdade, é nulo, já que $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$. Ficamos então com

$$\vec{B} = -\frac{ik^2\omega\mu_0}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \int_V [3\vec{r}' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{r}') - \hat{\mathbf{r}} r'^2] \wp(\vec{r}') dV \quad (25.81)$$

que, agora sim, assemelha-se a algo que conhecemos. Vamos relembrar a definição do tensor momento de quadrupolo $\vec{\mathcal{Q}}$, dada por 8.8,

$$\vec{\mathcal{Q}}_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] dV$$

Vamos definir agora um vetor $\vec{\mathcal{Q}}(\hat{\mathbf{r}})$ mediante

$$\vec{\mathcal{Q}}(\hat{\mathbf{r}}) = \vec{\mathcal{Q}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (25.82)$$

cujas componentes são

$$\mathcal{Q}_i(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_j \vec{\mathcal{Q}}_{ij} \hat{\mathbf{r}}_j \quad (25.83)$$

ou, explicitamente,

$$Q_i(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_j \left\{ \int_V \wp(\vec{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] dV \right\} \hat{\mathbf{r}}_j$$

que pode ser escrita como

$$Q_i(\hat{\mathbf{r}}) = \int_V \wp(\vec{r}') \left[3x'_i \sum_j x'_j \hat{\mathbf{r}}_j - r'^2 \sum_j \delta_{ij} \hat{\mathbf{r}}_j \right] dV$$

ou

$$Q_i(\hat{\mathbf{r}}) = \int_V \wp(\vec{r}') [3x'_i (\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) - r'^2 \hat{\mathbf{r}}_i] dV$$

Agora, multiplicamos essa expressão por $\hat{\mathbf{e}}_i$, e somamos sobre i , isto é,

$$\sum_i Q_i(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i \int_V \wp(\vec{r}') [3x'_i (\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) - r'^2 \hat{\mathbf{r}}_i] dV$$

ou

$$\vec{Q} = \int_V \wp(\vec{r}') [3\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) - r'^2 \hat{\mathbf{r}}] dV$$

que é a integral que aparece na expressão 25.81, que fica, então,

$$\vec{\mathcal{B}} = -\frac{ik^2 \omega \mu_0}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{Q} \quad (25.84)$$

que fornece o valor do campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$ em função do momento de quadrupolo elétrico da distribuição de cargas que é fonte da radiação. O campo $\vec{\mathcal{H}}$ fica

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} = -\frac{ik^2 \omega}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{Q} \quad (25.85)$$

Para determinar $\vec{\mathcal{E}}$, usamos a expressão 25.29,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}$$

e usamos novamente a identidade 1.58f, de modo que, de 25.85,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} &= -\frac{iZ_0}{k} \frac{ik^2\omega}{24\pi} \nabla \times \left[\frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}} \right] \\ \vec{\mathcal{E}} &= \frac{Z_0 k \omega}{24\pi} \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}] + \frac{Z_0 k \omega}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}]\end{aligned}\quad (25.86)$$

Nessa expressão, apenas o primeiro termo é relevante, já que é possível mostrar que o segundo termo envolve potências de $\frac{1}{r}$ maiores que 2 (veja o exercício 25.1). Utilizando a equação 25.75 na expressão 25.86, temos

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Z_0 k \omega}{24\pi} ik \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{iZ_0 k^2 \omega}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}] \quad (25.87)$$

É interessante expressar os campos em termos da frequência (angular) ω , isto é,

$$\vec{\mathcal{H}} = -\frac{i\omega^3}{24\pi c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}} \quad (25.88)$$

e

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{iZ_0 \omega^3}{24\pi c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}] \quad (25.89)$$

Vamos agora calcular a potência média irradiada por unidade de ângulo sólido, isto é, lembrando a equação 24.6,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = (\vec{\mathcal{S}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) R^2 = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E}_a^2 [R(t_r)]^2$$

temos

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = (\langle \vec{\mathcal{S}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{R}}) R^2$$

ou, utilizando a equação 22.52, que define a média do vetor de Poynting,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

temos

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2} (\Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] \cdot \hat{R}) R^2 = \frac{1}{2} (\Re[\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}] \cdot \hat{R}) R^2$$

ou então, lembrando que estamos considerando $R \simeq r$ e que $\hat{\mathbf{r}}$ é um vetor fixo, podendo ser incluído dentro da média,

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}] \quad (25.90)$$

Com o uso das expressões 25.88 e 25.89, a equação 25.90 torna-se

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re \left\{ r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\frac{iZ_0\omega^3}{24\pi c^2} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}) \right] \times \left[\frac{i\omega^3}{24\pi c^2} \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}^* \right] \right\}$$

ou

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = -\frac{Z_0\omega^6}{1152\pi^2 c^4} \Re \left\{ \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}) \right] \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}^*] \right\}$$

Agora, usamos a identidade 1.17, válida para o produto misto

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

de modo que achamos

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = -\frac{Z_0\omega^6}{1152\pi^2 c^4} \Re \left\{ \left[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}) \right] \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}^*] \times \hat{\mathbf{r}} \right\}$$

ou, invertendo a ordem do último produto vetorial,

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0\omega^6}{1152\pi^2 c^4} \Re \left\{ \left[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}) \right] \cdot \left[\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}^*) \right] \right\}$$

O produto escalar resulta no módulo ao quadrado do vetor, que é uma grandeza real, ou seja,

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0\omega^6}{1152\pi^2 c^4} |\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}})|^2 \quad (25.91)$$

A expressão 25.91 fornece a distribuição de potência média irradiada por unidade de ângulo sólido. Em geral, tal distribuição não é descrita por uma função simples em termos dos ângulos θ e ϕ , o que a torna difícil de ser interpretada para uma situação geral. Apesar disso, a potência média total emitida pode ser calculada de um modo relativamente simples. Nosso objetivo é, então, calcular

$$\langle P(t) \rangle = \int_{\Omega} \frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} d\Omega$$

ou, fazendo uso de 25.91,

$$\langle P(t) \rangle = \int_{\Omega} \frac{Z_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^4} |\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}})|^2 d\Omega$$

que fica

$$\langle P(t) \rangle = \frac{Z_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^4} \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}})|^2 d\Omega \quad (25.92)$$

Para resolver a integral, vamos primeiro usar a propriedade 1.19a para duplos produtos vetoriais, isto é,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

que fica

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{Q}})\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\vec{\mathcal{Q}}$$

ou

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{Q}})\hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathcal{Q}}$$

Além disso,

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}^*) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{Q}}^*)\hat{\mathbf{r}} - \vec{\mathcal{Q}}^*$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{Q})|^2 &= [\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{Q})] \cdot [\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{Q}^*)] \\
&= [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q})\hat{\mathbf{r}} - \vec{Q}] \cdot [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}^*)\hat{\mathbf{r}} - \vec{Q}^*] \\
&= |\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}|^2 - |\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}|^2 - |\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}|^2 + \vec{Q} \cdot \vec{Q}^* \\
|\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{Q})|^2 &= \vec{Q} \cdot \vec{Q}^* - |\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}|^2
\end{aligned} \tag{25.93}$$

Podemos escrever essa expressão utilizando somatórias, que se mostrarão bastante úteis. Assim,

$$\vec{Q} \cdot \vec{Q}^* = \sum_i Q_i Q_i^* \tag{25.94}$$

$$\begin{aligned}
|\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}|^2 &= (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}^*) \\
&= \left[\sum_i \hat{\mathbf{r}}_i Q_i \right] \left[\sum_j \hat{\mathbf{r}}_j Q_j^* \right] \\
|\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}|^2 &= \sum_{i,j} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j Q_i Q_j^*
\end{aligned} \tag{25.95}$$

Agora, usamos a definição 25.83 para as componentes do vetor $\vec{Q}$,

$$Q_i(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_j \vec{Q}_{ij} \hat{\mathbf{r}}_j$$

para reescrever as equações acima. A expressão 25.94 fica

$$\vec{Q} \cdot \vec{Q}^* = \sum_i \left[\sum_j \vec{Q}_{ij} \hat{\mathbf{r}}_j \right] \left[\sum_k \vec{Q}_{ik}^* \hat{\mathbf{r}}_k \right]$$

ou

$$\vec{Q} \cdot \vec{Q}^* = \sum_{i,j,k} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \vec{Q}_{ij} \vec{Q}_{ik}^* \tag{25.96}$$

A expressão 25.95, por sua vez, torna-se

$$|\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{Q}|^2 = \sum_{i,j} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \left[\sum_k \vec{Q}_{ik}^* \hat{\mathbf{r}}_k \right] \left[\sum_l \vec{Q}_{jl} \hat{\mathbf{r}}_l \right]$$

ou

$$|\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{Q}}|^2 = \sum_{i,j,k,l} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l \vec{\mathcal{Q}}_{jl} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* \quad (25.97)$$

Com o uso das equações 25.96 e 25.97, a expressão 25.93 fica

$$|\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}})|^2 = \sum_{i,j,k} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \vec{\mathcal{Q}}_{ij} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* - \sum_{i,j,k,l} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l \vec{\mathcal{Q}}_{jl} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^*$$

de modo que a potência média 25.92 fica

$$\langle P(t) \rangle = \frac{Z_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^4} \oint_{\Omega} \left[\sum_{i,j,k} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \vec{\mathcal{Q}}_{ij} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* - \sum_{i,j,k,l} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l \vec{\mathcal{Q}}_{jl} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* \right] d\Omega$$

ou

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle = & \frac{Z_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^4} \sum_{i,j,k} \vec{\mathcal{Q}}_{ij} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* \oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k d\Omega \\ & - \frac{Z_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^4} \sum_{i,j,k,l} \vec{\mathcal{Q}}_{jl} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* \oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l d\Omega \quad (25.98) \end{aligned}$$

Agora, precisamos determinar as integrais. As componentes do vetor $\hat{\mathbf{r}}$ são dadas pela expressão 1.37a, ou seja,

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_1 &= \sin \theta \cos \phi \\ \hat{\mathbf{r}}_2 &= \sin \theta \sin \phi \\ \hat{\mathbf{r}}_3 &= \cos \theta \end{aligned}$$

Assim, notamos imediatamente que produtos do tipo $\hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k$, onde $j \neq k$, são funções ímpares, o que faz com que a integração em Ω se anule para essas funções, ou seja,

$$\oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k d\Omega = 0, \quad j \neq k$$

Portanto, resta saber quanto vale a integração quando $j = k$. Neste caso, admitindo que a integral tenha valor a , temos

$$\oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_j d\Omega = a$$

Somando esta integral sobre j , teremos

$$\sum_j \oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_j d\Omega = \sum_j a$$

$$\oint_{\Omega} \sum_j^1 \hat{\mathbf{r}}_j^2 d\Omega = 3a$$

$$\oint_{\Omega} d\Omega = 3a$$

ou

$$a = \frac{4\pi}{3}$$

Então,

$$\oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{jk} \quad (25.99)$$

Para calcular a outra integral na expressão 25.98, devemos ter em mente que, como ela envolve produtos do tipo $\hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l$, sempre vão ocorrer dois índices iguais, o que resulta numa função par. Portanto, os outros dois índices devem também ser iguais entre si, para que também resultem numa função par, caso contrário a integral se anula. Um modo de escrever essa condição é

$$\oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l d\Omega = a(\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (25.100)$$

que satisfaz a condição requerida. Por exemplo, se $i = j$, mas $k \neq l$, as deltas se anulam porque não é possível satisfazer, ao mesmo tempo, $i = k$ e $i = l$ além de $j = l$ e $j = k$. Para determinar a , vamos considerar agora que $i = j$ e vamos somar sobre i , isto é,

$$\begin{aligned}
\sum_i \oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l d\Omega &= a \sum_i \{ \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{il} + \delta_{il} \delta_{ik} \} \\
\oint_{\Omega} \sum_i^1 \hat{\mathbf{r}}_i^2 \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l d\Omega &= 5a \delta_{kl} \\
\oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l d\Omega &= 5a \delta_{kl}
\end{aligned} \tag{25.101}$$

Agora, utilizamos a expressão 25.99, isto é,

$$\frac{4\pi}{3} \delta_{kl} = 5a \delta_{kl}$$

ou

$$a = \frac{4\pi}{15}$$

Então, a equação 25.100 fica

$$\oint_{\Omega} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_k \hat{\mathbf{r}}_l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \tag{25.102}$$

Usando as expressões 25.99 e 25.102 em 25.98, temos

$$\begin{aligned}
\langle P(t) \rangle &= \frac{Z_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^4} \sum_{i,j,k} \vec{\mathcal{Q}}_{ij} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* \frac{4\pi}{3} \delta_{jk} \\
&\quad - \frac{Z_0 \omega^6}{1152 \pi^2 c^4} \sum_{i,j,k,l} \vec{\mathcal{Q}}_{jl} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\langle P(t) \rangle &= \frac{Z_0 \omega^6}{864 \pi c^4} \sum_{i,j,k} \vec{\mathcal{Q}}_{ij} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* \delta_{jk} \\
&\quad - \frac{Z_0 \omega^6}{4320 \pi c^4} \sum_{i,j,k,l} \vec{\mathcal{Q}}_{jl} \vec{\mathcal{Q}}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \tag{25.103}
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular as somatórias. Iniciamos com

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ij} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{jk} &= \sum_{i,j} \sum_k \vec{Q}_{ij} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{jk} \\ \sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ij} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{jk} &= \sum_{i,j} \vec{Q}_{ij} \vec{Q}_{ij}^*\end{aligned}$$

ou

$$\sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ij} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{jk} = \sum_{i,j} |\vec{Q}_{ij}|^2 \quad (25.104)$$

A outra somatória fica

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \\ \sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{ij} \delta_{kl} + \sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{ik} \delta_{jl} + \sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{il} \delta_{jk}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \\ \sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{ij} \sum_l \vec{Q}_{jl} \delta_{kl} + \sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{ik} \sum_l \vec{Q}_{jl} \delta_{jl} + \sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{jk} \sum_l \vec{Q}_{jl} \delta_{il}\end{aligned}$$

que fica

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \\ \sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{ij} \vec{Q}_{jk} + \sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{ik} \vec{Q}_{jj} + \sum_{i,j,k} \vec{Q}_{ik}^* \delta_{jk} \vec{Q}_{ji}\end{aligned}$$

Agora, temos, levando em conta o fato de que $\vec{Q}$ é simétrico, isto é, $\vec{Q}_{ij} = \vec{Q}_{ji}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \\ \sum_{j,k} \vec{Q}_{jk} \sum_i \vec{Q}_{ik}^* \delta_{ij} + \sum_{i,j} \vec{Q}_{jj} \sum_k \vec{Q}_{ik}^* \delta_{ik} + \sum_{i,k} \vec{Q}_{ik}^* \sum_j \delta_{jk} \vec{Q}_{ij}\end{aligned}$$

ou

$$\sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \sum_{j,k} \vec{Q}_{jk} \vec{Q}_{jk}^* + \sum_{i,j} \vec{Q}_{jj} \vec{Q}_{ii}^* + \sum_{i,k} \vec{Q}_{ik}^* \vec{Q}_{ik}$$

ou ainda,

$$\sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \sum_{j,k} |\vec{Q}_{jk}|^2 + \sum_i \vec{Q}_{ii}^* \sum_j \vec{Q}_{jj} + \sum_{i,k} |\vec{Q}_{ik}|^2$$

que pode ser reescrita considerando que os índices i , j , k e l são mudos, podendo ser intercambiados entre si, isto é,

$$\sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \sum_{i,j} |\vec{Q}_{ij}|^2 + \sum_i \vec{Q}_{ii}^* \sum_j \vec{Q}_{jj} + \sum_{i,j} |\vec{Q}_{ij}|^2$$

ou, lembrando ainda que o tensor $\vec{Q}$ tem traço nulo (equação 8.9), de modo que $\sum_j \vec{Q}_{jj} = 0$, temos

$$\sum_{i,j,k,l} \vec{Q}_{jl} \vec{Q}_{ik}^* (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = 2 \sum_{i,j} |\vec{Q}_{ij}|^2 \quad (25.105)$$

Utilizando as expressões 25.104 e 25.105 na equação 25.103, temos

$$\langle P(t) \rangle = \frac{Z_0 \omega^6}{864 \pi c^4} \sum_{i,j} |\vec{Q}_{ij}|^2 - \frac{Z_0 \omega^6}{4320 \pi c^4} 2 \sum_{i,j} |\vec{Q}_{ij}|^2$$

ou

$$\langle P(t) \rangle = \frac{Z_0 \omega^6}{1440 \pi c^4} \sum_{i,j} |\vec{Q}_{ij}|^2 \quad (25.106)$$

Note que a potência total irradiada é proporcional a ω^6 , enquanto ela cresce com ω^4 no caso da radiação emitida por um dipolo elétrico ou

magnético. O exemplo mais simples de configuração que exhibe um quadrupolo elétrico consiste numa distribuição esferoidal de cargas, ou seja, uma esfera que foi alongada ou achatada na direção de um dos eixos coordenados, mantendo-se os outros dois inalterados. Pela simetria existente, os elementos do tensor momento de quadrupolo situados fora da diagonal principal se anulam, restando apenas aqueles pertencentes à diagonal principal. Considerando que a distorção ocorreu no eixo representado pelo número 3, temos

$$Q_{11} = Q_{22}$$

e, como o tensor tem traço nulo,

$$Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$$

isto é,

$$Q_{11} = -\frac{Q_{33}}{2}$$

Chamando

$$Q_0 = Q_{33}$$

temos

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_0}{2}$$

Assim, o vetor $\vec{Q}$ fica, considerando as expressões 25.82 e 25.83, e orientando os eixos de modo que o eixo 3 coincida com o eixo z ,

$$\vec{Q} = \sum_i Q_i \hat{e}_i = \sum_{i,j} Q_{ij} \hat{r}_j \hat{e}_i$$

ou, como $Q_{i,j} = 0$, se $i \neq j$, temos

$$\vec{Q} = Q_{11} \hat{r}_1 \hat{e}_1 + Q_{22} \hat{r}_2 \hat{e}_2 + Q_{33} \hat{r}_3 \hat{e}_3$$

ou

$$\vec{Q} = -\frac{Q_0}{2} \sin \theta \cos \phi \hat{i} - \frac{Q_0}{2} \sin \theta \sin \phi \hat{j} + Q_0 \cos \theta \hat{k}$$

Agora, calculamos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}} &= [\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}] \\ &\quad \times \left[-\frac{\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} - \frac{\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \mathcal{Q}_0 \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \right]\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}} &= -\frac{\mathcal{Q}_0}{2} \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{k}} - \mathcal{Q}_0 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + \frac{\mathcal{Q}_0}{2} \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{k}} + \mathcal{Q}_0 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} \\ &\quad - \frac{\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}} = \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} - \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{j}}$$

Em seguida, precisamos de

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}] &= [\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}] \\ &\quad \times \left[\frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} - \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{j}} \right]\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}] &= -\frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \phi \hat{\mathbf{k}} - \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin^2 \theta \cos \theta \sin^2 \phi \hat{\mathbf{k}} \\ &\quad + \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos^2 \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos^2 \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}] &= \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos^2 \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} \\ &\quad + \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin \theta \cos^2 \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} - \frac{3\mathcal{Q}_0}{2} \sin^2 \theta \cos \theta \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

de modo que

$$|\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}]|^2 = \frac{9Q_0}{4} \sin^2 \theta \cos^4 \theta \cos^2 \phi + \frac{9Q_0}{4} \sin^2 \theta \cos^4 \theta \sin^2 \phi + \frac{9Q_0}{4} \sin^4 \theta \cos^2 \theta$$

ou

$$|\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}]|^2 = \frac{9Q_0}{4} \sin^2 \theta \cos^4 \theta + \frac{9Q_0}{4} \sin^4 \theta \cos^2 \theta$$

ou então,

$$|\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}]|^2 = \frac{9Q_0}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

e, finalmente,

$$|\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{Q}}]|^2 = \frac{9Q_0}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

Portanto, a equação 25.91 torna-se

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^6}{1152\pi^2} \frac{9Q_0}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

ou

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^6 Q_0}{512\pi^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (25.107)$$

Note que, por causa da simetria da situação, a potência média emitida por unidade de ângulo sólido é independente do ângulo ϕ . Uma representação para o padrão emitido pode ser vista na figura 25.4.

A expressão 25.107 pode ser reescrita lembrando que

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

de modo que achamos

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^6 Q_0}{2048\pi^2} \sin^2 2\theta$$

Os máximos dessa função ocorrem quando $|\sin 2\theta| = 1$, isto é, em $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$, em acordo com a figura 25.4. Além disso, a radiação emitida no eixo

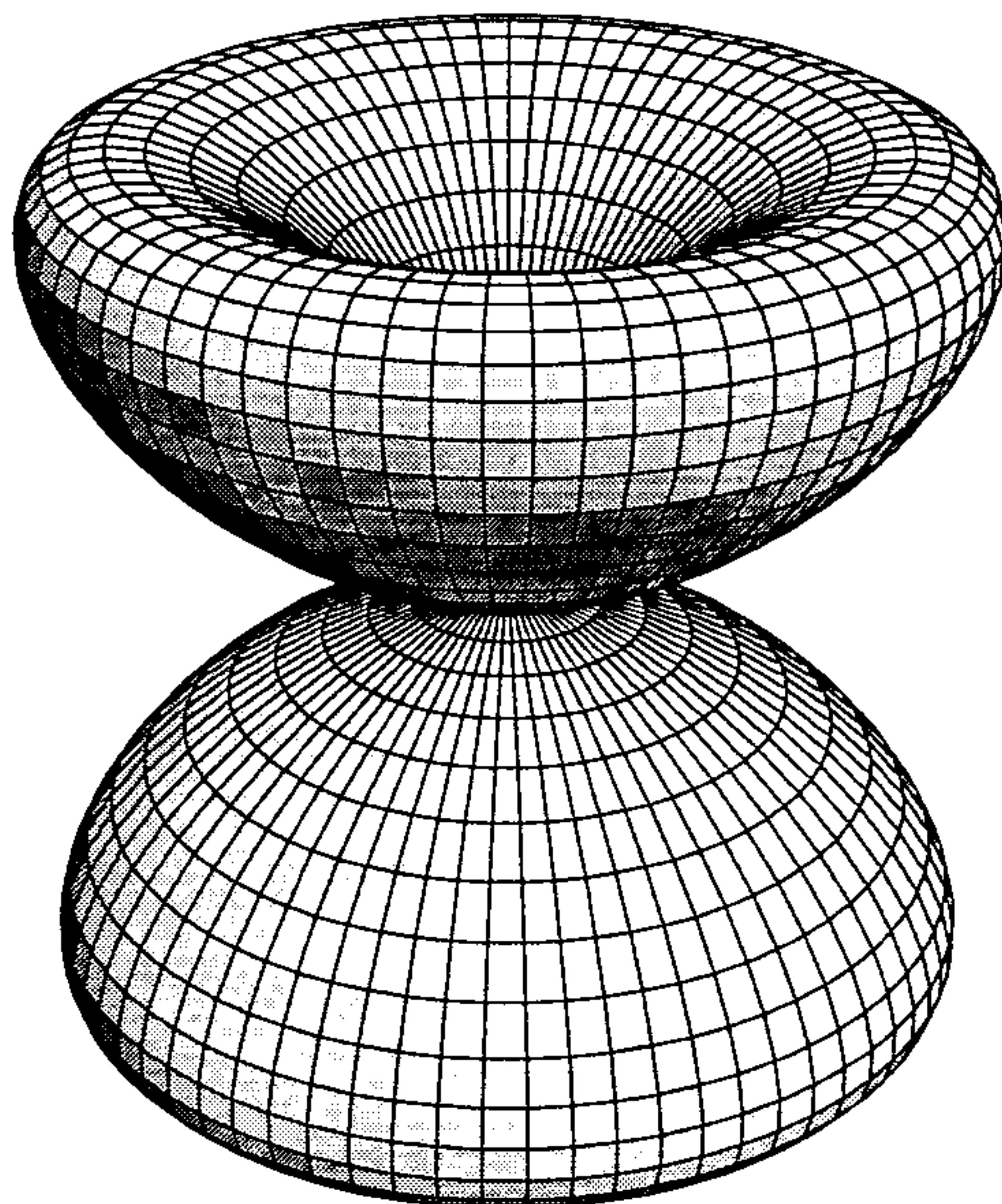


Figura 25.4: Representação do padrão da radiação emitida por um quadrupolo elétrico.

z , bem como no plano xy , é nula. A potência total média emitida, obtida da equação 25.106, fica

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0 \omega^6}{1440\pi} \left[\frac{Q_0^2}{4} + \frac{Q_0^2}{4} + Q_0^2 \right]$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0 Q_0^2 \omega^6}{960\pi}$$

Conforme se vê pelos desenvolvimentos feitos, há uma crescente complexidade matemática envolvendo termos de ordem maior na expansão 25.37, o que acaba tornando uma análise de termos como octopolos, hexadecapolos, etc proibitiva na forma atual. Outro problema é que campos de radiação produzidos por distribuições fisicamente diferentes, como dipolos magnéticos e quadrupolos elétricos, por exemplo, aparecem combinados nos termos da expansão, o que é bastante indesejável. Por fim, estamos limitados ao limite em que $a \ll \lambda$, onde a é o tamanho característico da fonte. Assim, quando o comprimento de onda da radiação é da ordem ou eventualmente menor que o

tamanho da fonte, tal expansão não se aplica. Em particular, ela não se aplica à zona intermediária ou de indução, o que faz com que tenhamos que fazer novas considerações para poder resolver as dificuldades mencionadas acima. Vejamos então tais considerações.

25.5 Expansão em Multipolos para os Campos

Nesta seção veremos como podemos determinar os campos de radiação na forma de uma expansão em termos de multipolos elétricos e magnéticos, começando com a situação mais simples, ou seja, uma região no vácuo sem a presença de fontes.

25.5.1 Expansão em Multipolos para os Campos para uma Região sem Fontes

Vamos começar considerando as equações de Maxwell no vácuo na ausência de fontes, dadas pelas expressões 22.14,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

Considerando que os campos sejam tais que a parte temporal possa ser escrita como $e^{-i\omega t}$, ficamos com

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (25.108a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (25.108b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{\mathcal{E}} \quad (25.108c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i\omega \vec{\mathcal{B}} \quad (25.108d)$$

ou, substituindo $\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}}$, $k = \frac{\omega}{c}$ e $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, além de $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (25.109a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0 \quad (25.109b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -\frac{ik}{Z_0} \vec{\mathcal{E}} \quad (25.109c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = ikZ_0 \vec{\mathcal{H}} \quad (25.109d)$$

Vamos agora considerar o rotacional da equação 25.109c, isto é,

$$\nabla \times [\nabla \times \vec{\mathcal{H}}] = -\frac{ik}{Z_0} \nabla \times \vec{\mathcal{E}}$$

ou, usando a propriedade 1.58c,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

além das equações 25.109b e 25.109d, obtemos

$$-\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} = -\frac{ik}{Z_0} ikZ_0 \vec{\mathcal{H}}$$

ou

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} = -k^2 \vec{\mathcal{H}}$$

que pode ser reescrita como

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{\mathcal{H}} = 0 \quad (25.110)$$

que é uma equação diferencial de Helmholtz para $\vec{\mathcal{H}}$, podendo ser decomposta em três equações diferenciais, uma para cada componente do vetor $\vec{\mathcal{H}}$. Além disso, temos também que $\vec{\mathcal{H}}$ deve satisfazer a equação 25.109b,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$$

Neste caso, o campo elétrico é obtido da expressão 25.109c,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}} \quad (25.111)$$

No desenvolvimento acima optamos por escrever $\vec{\mathcal{E}}$ em termos de $\vec{\mathcal{H}}$, mas podemos também escolher o caminho inverso. Nesse caso, consideramos o rotacional da equação 25.109d, ou seja,

$$\nabla \times [\nabla \times \vec{\mathcal{E}}] = ikZ_0 \nabla \times \vec{\mathcal{H}}$$

Usando a propriedade 1.58c e as equações 25.109a e 25.109c, temos

$$-\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = k^2 \vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (25.112)$$

que também é uma equação de Helmholtz para $\vec{\mathcal{E}}$, podendo ser decomposta em três equações, uma para cada componente de $\vec{\mathcal{E}}$. Além disso, é preciso satisfazer também a equação 25.109a,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

e o campo $\vec{\mathcal{H}}$ é obtido da equação 25.109d,

$$\vec{\mathcal{H}} = -\frac{i}{kZ_0} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} \quad (25.113)$$

Em qualquer um dos casos acima, satisfazer o requisito de que as divergências de $\vec{\mathcal{E}}$ ou $\vec{\mathcal{H}}$ sejam nulas não é uma tarefa simples, dada a solução geral das equações de Helmholtz 25.110 ou 25.112, a qual é apresentada no apêndice H (veja a equação H.37). Vamos considerar, então, um procedimento um pouco diferente, sugerido por Bouwkamp e Casimir⁹, que facilitará em parte a obtenção de resultados. Primeiro, temos que demonstrar uma identidade, a saber,

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{V}) = 2\nabla \cdot \vec{V} + \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{V}) \quad (25.114)$$

que é válida para qualquer campo vetorial $\vec{V}$. Vejamos sua demonstração.

⁹ C. J. Bouwkamp e H. B. G. Casimir, *Physica* **20**, 1954, pág. 539.

Demonstração. Para demonstrar a identidade 25.114, vamos precisar de algumas outras identidades. Primeiro, vamos calcular $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{V})$, usando a identidade 1.58h corrigida, isto é,

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

que fica, então,

$$\nabla(\vec{r} \cdot \vec{V}) = (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{V} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{V}) + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{r} + \vec{V} \times (\nabla \times \vec{r})$$

Agora, temos que $\nabla \times \vec{r} = 0$, e também que

$$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{r} = \vec{V}$$

então,

$$\nabla(\vec{r} \cdot \vec{V}) = (\vec{r} \cdot \nabla)\vec{V} + \vec{r} \times (\nabla \times \vec{V}) + \vec{V}$$

Agora, calculamos $\nabla \cdot [\nabla(\vec{r} \cdot \vec{V})]$, ou seja,

$$\nabla \cdot [\nabla(\vec{r} \cdot \vec{V})] = \nabla \cdot [(\vec{r} \cdot \nabla)\vec{V}] + \nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{V})] + \nabla \cdot \vec{V} \quad (25.115)$$

Aqui lembramos que $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. Além disso, pela identidade 1.58g, temos

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

ou

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{V})] = (\nabla \times \vec{r}) \cdot (\nabla \times \vec{V}) - \vec{r} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{V})]$$

que fica

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{V})] = -\vec{r} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{V})]$$

e, usando a identidade 1.58c, que é

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

temos

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{V})] = -\vec{r} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}]$$

ou

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{V})] = \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{V}) - \vec{r} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \vec{V})]$$

de modo que a equação 25.115 fica

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V}] + \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{V}) - \vec{r} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \vec{V})] + \nabla \cdot \vec{V} \quad (25.116)$$

Agora, precisamos reescrever o primeiro termo do lado direito da equação acima. Explicitamente, temos

$$(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V} = \left[(x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k})$$

ou

$$(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V} = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k})$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V} = & \hat{i} \left(x \frac{\partial V_x}{\partial x} + y \frac{\partial V_x}{\partial y} + z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ & + \hat{j} \left(x \frac{\partial V_y}{\partial x} + y \frac{\partial V_y}{\partial y} + z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(x \frac{\partial V_z}{\partial x} + y \frac{\partial V_z}{\partial y} + z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V}] = & \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial V_x}{\partial x} + y \frac{\partial V_x}{\partial y} + z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial V_y}{\partial x} + y \frac{\partial V_y}{\partial y} + z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(x \frac{\partial V_z}{\partial x} + y \frac{\partial V_z}{\partial y} + z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V}] = & \frac{\partial V_x}{\partial x} + x \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} \\ & + x \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + y \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} + x \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial x} + y \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + z \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V}] &= \nabla \cdot \vec{V} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ &\quad + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

onde nos valem os fatos de que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

Assim, temos

$$\nabla \cdot [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V}] = \nabla \cdot \vec{V} + x \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{V}) + y \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{V}) + z \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \vec{V})$$

ou

$$\nabla \cdot [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V}] = \nabla \cdot \vec{V} + x \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{V}) + y \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{V}) + z \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \vec{V})$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{V}] = \nabla \cdot \vec{V} + \vec{r} \cdot [\nabla (\nabla \cdot \vec{V})]$$

de modo que a equação 25.116 torna-se

$$\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot \vec{V} + \vec{r} \cdot [\nabla (\nabla \cdot \vec{V})] + \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{V}) - \vec{r} \cdot [\nabla (\nabla \cdot \vec{V})] + \nabla \cdot \vec{V}$$

ou, finalmente,

$$\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{V}) = 2 \nabla \cdot \vec{V} + \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{V})$$

que é a identidade 25.114, agora demonstrada.

□

Após demonstrar a identidade 25.114, vamos aplicá-la tanto para $\vec{\mathcal{E}}$ quanto para $\vec{\mathcal{H}}$, isto é,

$$\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}) = 2 \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} + \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{\mathcal{E}})$$

e

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}) = 2\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} + \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{\mathcal{H}})$$

Agora, lembramos que $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{H}}$ têm divergência nula e satisfazem as equações de Helmholtz 25.110 e 25.112, de modo que temos

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}) = \vec{r} \cdot (-k^2 \vec{\mathcal{E}})$$

e

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}) = \vec{r} \cdot (-k^2 \vec{\mathcal{H}})$$

ou

$$(\nabla^2 + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}) = 0 \quad (25.117a)$$

$$(\nabla^2 + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}) = 0 \quad (25.117b)$$

que são também equações de Helmholtz, agora para as grandezas $\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}$, com soluções similares à dada pela equação H.37, a qual envolve uma soma de termos relacionados aos índices ℓ e m . Então, definimos convenientemente os campos de multipolo elétrico mediante a especificação dada pelas condições

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e = -Z_0 \frac{\ell(\ell+1)}{k} f_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.118a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}^e = 0 \quad (25.118b)$$

onde o superescrito e indica os multipolos elétricos e os fatores multiplicativos utilizados são apenas para conveniência. Além disso,

$$f_\ell(kr) = A_\ell^1 \mathfrak{h}_\ell^1(kr) + A_\ell^2 \mathfrak{h}_\ell^2(kr) \quad (25.119)$$

em acordo com H.37. Consideremos agora a equação 25.109c, isto é,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -\frac{ik}{Z_0} \vec{\mathcal{E}}$$

Efetuando o produto escalar com $\vec{r}$, temos

$$\frac{ik}{Z_0} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r} = -\nabla \times \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{r}$$

ou, usando as propriedades de produto misto,

$$\frac{k}{Z_0} \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} = i(\vec{r} \times \nabla) \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

Lembrando a definição H.10 para o operador momento angular $\vec{\mathcal{L}}$, temos

$$\frac{k}{Z_0} \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

Agora, usamos a equação 25.118a para os multipolos elétricos, isto é,

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e = -\frac{k}{Z_0} \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e = \left(-\frac{k}{Z_0}\right) \left(-Z_0 \frac{\ell(\ell+1)}{k} f_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)\right)$$

ou

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) = \ell(\ell+1) f_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.120)$$

Note que, como o operador $\vec{\mathcal{L}}$ só age nas variáveis angulares, a dependência de $\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$ na coordenada radial r deve ser descrita pela função $f_\ell(kr)$. Sabemos também que a parte angular de $\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$ é descrita por harmônicos esféricos e que $\vec{\mathcal{L}}$ está relacionado aos operadores $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_-$ e $\mathcal{L}_z$ descritos pelas equações H.12, os quais não podem alterar o valor de ℓ , apenas, eventualmente, o de m . Então, na expressão explícita de $\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$ só devem aparecer harmônicos esféricos $Y_{\ell,m}$ de mesmo valor ℓ que o que aparece no lado direito de 25.120. Além disso, se no lado direito aparece um único $Y_{\ell,m}$, no lado esquerdo (em $\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$) não é possível termos qualquer valor arbitrário para m . Recordando a equação H.8,

$$\mathcal{L}^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}$$

percebemos que a equação 25.120 lembra muito esta equação, desde que $\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$ seja dado por

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) = f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.121)$$

já que, nesse caso,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e &= \vec{\mathcal{L}} \cdot [f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}] = f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} = f_\ell(kr) \mathcal{L}^2 Y_{\ell,m} \\ \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e &= \ell(\ell+1) f_\ell(kr) Y_{\ell,m} \end{aligned}$$

O campo elétrico associado ao multipolo elétrico, nesse caso, é dado pela equação 25.109c, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e \quad (25.122)$$

É importante notar que, da equação 25.118b,

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}^e = 0$$

vemos que o campo magnético do multipolo de ordem (ℓ, m) é ortogonal ao vetor posição $\vec{r}$, de modo que ele é considerado um *campo magnético transversal*, ou então um *modo magnético transversal* (modo MT). Partimos agora para os campos de multipolo magnético, definidos por

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = \frac{\ell(\ell+1)}{k} g_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.123a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M = 0 \quad (25.123b)$$

onde novamente os fatores multiplicativos são escolhidos de acordo com a conveniência, e o superescrito M refere-se aos multipolos magnéticos. Temos também

$$g_\ell(kr) = B_\ell^1 h_\ell^1(kr) + B_\ell^2 h_\ell^2(kr) \quad (25.124)$$

em acordo com H.37. Consideramos agora a equação 25.109d, isto é,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = ikZ_0 \vec{\mathcal{H}}$$

e efetuamos o produto escalar com $\vec{r}$, de modo que

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M \cdot \vec{r} = ikZ_0 \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M \cdot \vec{r}$$

ou

$$\overbrace{(\vec{r} \times \nabla)}^{i\vec{\mathcal{L}}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M = ikZ_0 \frac{\ell(\ell+1)}{k} g_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M = Z_0 \ell(\ell+1) g_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.125)$$

que é similar à equação 25.120. Fazendo as mesmas considerações descritas anteriormente, temos como solução para os campos elétricos de multipolos magnéticos a expressão

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M(r, \theta, \phi) = Z_0 g_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.126)$$

enquanto o campo magnético é descrito por 25.109d, isto é,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = -\frac{i}{kZ_0} \nabla \times \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M \quad (25.127)$$

Como, pela equação 25.123b, temos

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M = 0$$

vemos que aqui é o campo elétrico que é ortogonal a $\vec{r}$, e temos um *campo elétrico transversal* ou um *modo elétrico transversal* (modo ET). A solução geral para os campos envolve tanto os multipolos elétricos quanto magnéticos, na forma de uma combinação linear de todos os campos. Para simplificar, vamos definir o vetor

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.128)$$

que é um vetor normalizado, conforme se vê se fizermos ¹⁰

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} d\Omega = \int \frac{1}{\sqrt{\ell'(\ell'+1)}} Y_{\ell',m'}^* \vec{\mathcal{L}}^\dagger \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right) d\Omega$$

ou, como $\vec{\mathcal{L}}$ é hermitiano, e como $\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^2$, além de usar a equação H.8, temos

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} d\Omega = \frac{\ell(\ell+1)}{\sqrt{\ell'(\ell'+1)}\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y_{\ell',m'}^* Y_{\ell,m} d\Omega$$

Utilizando a relação de ortogonalidade C.31 para os harmônicos esféricos,

$$\int Y_{\ell',m'}^* Y_{\ell,m} d\Omega = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

¹⁰ Note que $\vec{\mathfrak{J}}_{0,0} = 0$.

temos, fazendo as devidas simplificações,

$$\int \vec{\mathfrak{I}}_{\ell',m'}^* \cdot \vec{\mathfrak{I}}_{\ell,m} d\Omega = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'} \quad (25.129)$$

O campo elétrico total pode ser escrito então como

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{\ell,m} \left\{ -\frac{Z_0}{ik} C_{\ell,m}^e \nabla \times [f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)] + C_{\ell,m}^M Z_0 g_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \right\}$$

onde fizemos uso das expressões 25.121, 25.121 e 25.126. Os coeficientes $C_{\ell,m}^e$ e $C_{\ell,m}^M$ definem as proporções dos respectivos multipolos de ordem (ℓ, m) . Utilizando a definição 25.128 e incorporando as constantes $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ que aparecem nos coeficientes, temos

$$\vec{\mathcal{E}} = Z_0 \sum_{\ell,m} \left\{ \frac{i}{k} C_{\ell,m}^e \nabla \times [f_\ell(kr) \vec{\mathfrak{I}}_{\ell,m}] + C_{\ell,m}^M g_\ell(kr) \vec{\mathfrak{I}}_{\ell,m} \right\} \quad (25.130)$$

O campo $\vec{\mathcal{H}}$ é obtido de forma semelhante, utilizando as equações 25.121, 25.126 e 25.127,

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell,m} \left\{ C_{\ell,m}^e f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) - \frac{i}{k Z_0} C_{\ell,m}^M \nabla \times [Z_0 g_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)] \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell,m} \left\{ C_{\ell,m}^e f_\ell(kr) \vec{\mathfrak{I}}_{\ell,m} - \frac{i}{k} C_{\ell,m}^M \nabla \times [g_\ell(kr) \vec{\mathfrak{I}}_{\ell,m}] \right\} \quad (25.131)$$

Podemos agora determinar os coeficientes $C_{\ell,m}^e$ e $C_{\ell,m}^M$ se manipularmos as equações 25.130 e 25.131. Iniciamos reescrevendo estas equações em termos do vetor $\vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}$, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = Z_0 \sum_{\ell,m} \left\{ \frac{i}{k} C_{\ell,m}^e \nabla \times \left[f_\ell(kr) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right] \right. \\ \left. + C_{\ell,m}^M g_\ell(kr) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right\} \end{aligned}$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell, m} \left\{ C_{\ell, m}^e f_\ell(kr) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m} - \frac{i}{k} C_{\ell, m}^M \nabla \times \left[g_\ell(kr) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m} \right] \right\}$$

ou então,

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{\ell, m} \frac{Z_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \frac{i}{k} C_{\ell, m}^e \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^e + C_{\ell, m}^M \frac{1}{Z_0} \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M \right\}$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell, m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ C_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^e - \frac{i}{k} C_{\ell, m}^M \nabla \times \frac{\vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M}{Z_0} \right\}$$

onde usamos as definições 25.121 e 25.126. Continuando, utilizamos as expressões 25.122 e 25.127, achando

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{\ell, m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ C_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^e + C_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M \right\} \quad (25.132)$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell, m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ C_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^e + C_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^M \right\} \quad (25.133)$$

Agora, consideramos a equação 25.132 e fazemos o produto escalar de $\vec{r}$ com ela, ou seja,

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \sum_{\ell, m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ C_{\ell, m}^e \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^e + C_{\ell, m}^M \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M \right\}$$

Fazemos uso agora da expressão 25.123b,

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M = 0$$

e também de 25.118a,

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e = -Z_0 \frac{\ell(\ell+1)}{k} f_\ell(kr) Y_{\ell,m}$$

de modo que

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\frac{Z_0}{k} \sum_{\ell,m} \sqrt{\ell(\ell+1)} C_{\ell,m}^e f_\ell(kr) Y_{\ell,m}$$

Fazendo agora o produto com a função $Y_{\ell',m'}^*$ e integrando, temos

$$\int Y_{\ell',m'}^* \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\Omega = -\frac{Z_0}{k} \int Y_{\ell',m'}^* \sum_{\ell,m} \sqrt{\ell(\ell+1)} C_{\ell,m}^e f_\ell(kr) Y_{\ell,m} d\Omega$$

ou

$$\sum_{\ell,m} \sqrt{\ell(\ell+1)} C_{\ell,m}^e f_\ell(kr) \int Y_{\ell',m'}^* Y_{\ell,m} d\Omega = -\frac{k}{Z_0} \int Y_{\ell',m'}^* \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\Omega$$

e, usando a ortogonalidade dos harmônicos esféricos, temos

$$\sum_{\ell,m} \sqrt{\ell(\ell+1)} C_{\ell,m}^e f_\ell(kr) \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'} = -\frac{k}{Z_0} \int Y_{\ell',m'}^* \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\Omega$$

ou, efetuando as somas e eliminando as linhas desnecessárias em ℓ' e m' ,

$$C_{\ell,m}^e f_\ell(kr) = -\frac{k}{Z_0 \sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y_{\ell,m}^* \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\Omega \quad (25.134)$$

Efetuada o mesmo procedimento para $\vec{\mathcal{H}}$, achamos

$$C_{\ell,m}^M g_\ell(kr) = \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y_{\ell,m}^* \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}} d\Omega \quad (25.135)$$

e a demonstração é deixada como exercício (veja o exercício 25.2). Com estas expressões, é possível determinar as constantes $C_{\ell,m}^e$ e $C_{\ell,m}^M$, além das constantes existentes nas funções $f_\ell(kr)$ e $g_\ell(kr)$, desde que se saiba os valores de $\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}$ para pelo menos dois valores diferentes de r . Devemos notar que as soluções acima foram determinadas sem considerar as fontes do campo, isto é, para uma região sem fontes. Em seguida, consideramos o que ocorre ao explicitarmos as fontes.

25.5.2 Expansão em Multipolos para os Campos para uma Região com Fontes

Vamos agora supor que haja fontes, descritas por uma densidade de carga $\rho(\vec{r}, t)$ e uma densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r}, t)$. Consideraremos, também, uma eventual magnetização $\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}, t)$, que gera, de acordo com 17.6, uma densidade de corrente de magnetização $\vec{J}_{\mathcal{M}}(\vec{r}, t)$ dada por

$$\vec{J}_{\mathcal{M}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

Neste caso, fazendo as devidas extensões complexas para ρ ($\wp$), $\vec{J}$ ($\vec{J}$) e $\vec{\mathcal{M}}$ ($\vec{\mathcal{M}}$), as equações de Maxwell tornam-se, na forma complexa,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\wp}{\epsilon_0} \quad (25.136a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (25.136b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_{\mathcal{M}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (25.136c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (25.136d)$$

Como antes, na seção 25.5.1, vamos fazer a hipótese de que dependência temporal dos campos e fontes é do tipo descrito pela função $e^{-i\omega t}$, de modo que

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

e

$$\wp(\vec{r}, t) = \wp(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{M}}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

e, substituindo nas equações 25.136, ficamos com

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\wp}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \nabla \times \vec{\mathcal{M}} - i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{\mathcal{E}}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i\omega \vec{\mathcal{B}}$$

Vamos reescrever estas equações de modo a facilitar sua resolução. Para tanto, inicialmente definimos um campo $\vec{\mathcal{H}}$ por meio de

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{\vec{\mathcal{B}}}{\mu_0}$$

Substituindo este campo e também $k = \frac{\omega}{c}$, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ e $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\wp}{\epsilon_0} \quad (25.137a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0 \quad (25.137b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}} - \frac{ik}{Z_0} \vec{\mathcal{E}} \quad (25.137c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = ikZ_0 \vec{\mathcal{H}} \quad (25.137d)$$

A equação de continuidade 12.21 estabelece que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0$$

Sua extensão complexa torna-se

$$-i\omega\wp + \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0$$

ou

$$\wp = -\frac{i}{\omega} \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} \quad (25.138)$$

Então, a equação 25.137a pode ser reescrita como

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\frac{i}{\omega\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}$$

ou

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = 0$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot \left[\vec{\mathcal{E}} + \frac{i\vec{\mathcal{J}}}{\omega\epsilon_0} \right] = 0$$

Definindo

$$\vec{\tilde{\mathcal{E}}} = \vec{\mathcal{E}} + \frac{i\vec{\mathcal{J}}}{\omega\epsilon_0} \quad (25.139)$$

temos

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\tilde{\mathcal{E}}} - \frac{i\vec{\mathcal{J}}}{\omega\epsilon_0}$$

e então,

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}} = 0 \quad (25.140)$$

Utilizando a expressão 25.139 na equação 25.137c, temos

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}} - \frac{ik}{Z_0} \left[\vec{\tilde{\mathcal{E}}} - \frac{i\vec{\mathcal{J}}}{\omega\epsilon_0} \right]$$

ou, simplificando devidamente as constantes,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}} - \frac{ik}{Z_0} \vec{\tilde{\mathcal{E}}} - \vec{\mathcal{J}}$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} + \frac{ik}{Z_0} \vec{\tilde{\mathcal{E}}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}} \quad (25.141)$$

Por fim, a equação de Maxwell 25.137d fica

$$\nabla \times \left[\vec{\tilde{\mathcal{E}}} - \frac{i\vec{\mathcal{J}}}{\omega\epsilon_0} \right] = ikZ_0 \vec{\mathcal{H}}$$

ou

$$\nabla \times \vec{\tilde{\mathcal{E}}} - \frac{i\nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{\omega\epsilon_0} = ikZ_0 \vec{\mathcal{H}}$$

ou ainda,

$$\nabla \times \vec{\tilde{\mathcal{E}}} - ikZ_0 \vec{\mathcal{H}} = \frac{i\nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{\omega\epsilon_0} \quad (25.142)$$

Portanto, as equações de Maxwell 25.137 ficam sendo

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (25.143a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0 \quad (25.143b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} + \frac{ik}{Z_0} \vec{\mathcal{E}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}} \quad (25.143c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} - ikZ_0 \vec{\mathcal{H}} = \frac{i \nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{\omega \epsilon_0} \quad (25.143d)$$

que são os análogos das equações 25.109, só que agora temos fontes para os campos. Vamos considerar o rotacional da equação 25.143c, ou seja,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{H}} + \frac{ik}{Z_0} \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

Usamos agora a equação 25.143d além da identidade 1.58c,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

para obter

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{H}} + \frac{ik}{Z_0} \left[\frac{i \nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{\omega \epsilon_0} + ikZ_0 \vec{\mathcal{H}} \right] = \nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

ou, aplicando a equação 25.143b,

$$-\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} - k^2 \vec{\mathcal{H}} = \nabla \times \vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{M}}$$

ou

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{\mathcal{H}} = -\nabla \times (\vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}}) \quad (25.144)$$

que é uma equação de Helmholtz, só que não-homogênea. Podemos obter a equação para $\vec{\mathcal{E}}$ considerando o rotacional da equação 25.143d,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} - ikZ_0 \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{i \nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{\omega \epsilon_0}$$

ou, usando 1.58c e 25.143d,

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - ikZ_0 \left[\nabla \times \vec{\mathcal{M}} - \frac{ik}{Z_0} \vec{\mathcal{E}} \right] = \frac{i \nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{\omega \epsilon_0}$$

Lembrando de empregar a equação 25.143a, temos

$$-\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - k^2 \vec{\mathcal{E}} = ikZ_0 \nabla \times \vec{\mathcal{M}} + \frac{iZ_0 \nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{k}$$

ou

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{\mathcal{E}} = -ikZ_0 \nabla \times \left[\vec{\mathcal{M}} + \frac{\nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{k^2} \right] \quad (25.145)$$

que é, por sua vez, uma equação de Helmholtz não-homogênea para o campo $\vec{\mathcal{E}}$. As equações 25.144 e 25.145 são as equivalentes das equações 25.110 e 25.112, só que agora envolvendo as fontes. Lembrando que no desenvolvimento anterior as grandezas $\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}$ definiam muito bem o problema, vamos considerar aqui a mesma idéia. Assim, vamos efetuar o produto escalar das equações 25.144 e 25.145 com $\vec{r}$, iniciando com a primeira delas, ou seja,

$$(\nabla^2 \vec{\mathcal{H}}) \cdot \vec{r} + k^2 (\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{r}) = -\nabla \times (\vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}}) \cdot \vec{r}$$

Demonstramos anteriormente a propriedade 25.114,

$$\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{V}) = 2 \nabla \cdot \vec{V} + \vec{r} \cdot (\nabla^2 \vec{V})$$

Além disso, para qualquer $\vec{V}$,

$$(\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \nabla) \cdot \vec{V}$$

e, usando a definição H.10,

$$\vec{\mathcal{L}} = -i(\vec{r} \times \nabla)$$

temos

$$(\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{r} = i\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{V} \quad (25.146)$$

Portanto, lembrando também que $\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$, ficamos com

$$\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}) + k^2 \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}} = -i\vec{\mathcal{L}} \cdot (\vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}})$$

ou

$$(\nabla^2 + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}) = -i\vec{\mathcal{L}} \cdot (\vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}}) \quad (25.147)$$

Vamos considerar agora o produto escalar de $\vec{r}$ com a equação 25.145, isto é,

$$(\nabla^2 \vec{\mathcal{E}}) \cdot \vec{r} + k^2(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r}) = -ik\mathcal{Z}_0 \nabla \times \left[\vec{\mathcal{M}} + \frac{\nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{k^2} \right] \cdot \vec{r}$$

que fica

$$\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}) + k^2(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r}) = k\mathcal{Z}_0 \vec{\mathcal{L}} \cdot \left[\vec{\mathcal{M}} + \frac{\nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{k^2} \right]$$

ou

$$(\nabla^2 + k^2)(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}) = k\mathcal{Z}_0 \vec{\mathcal{L}} \cdot \left[\vec{\mathcal{M}} + \frac{\nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{k^2} \right] \quad (25.148)$$

que é a equação para $\vec{\mathcal{E}}$. Tanto esta equação quanto a 25.147 são equações de Helmholtz não-homogêneas, e podemos resolvê-las utilizando o método de funções de Green desenvolvido na seção 20.5. A equação de Helmholtz 20.41,

$$\nabla^2 \Upsilon + k^2 \Upsilon = -4\pi v$$

tem como solução geral a equação 20.85,

$$\Upsilon = \int_V \mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}') v(\vec{r}') dV$$

onde $\mathfrak{F}_k(\vec{r}, \vec{r}')$ é a função de Green apropriada. No presente caso, como há emissão de radiação pelas fontes, queremos a função de Green dada em 20.43,

$$\mathfrak{F}_k^+(R) = \frac{e^{ikR}}{R}$$

sendo $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Então, temos

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\frac{k\mathcal{Z}_0}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\mathcal{L}}' \cdot \left[\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') + \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')}{k^2} \right] dV \quad (25.149)$$

e

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}} = \frac{i}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\mathcal{L}}' \cdot [\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')] dV \quad (25.150)$$

Seguindo o procedimento utilizado para o caso sem fontes, queremos que $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{H}}$ sejam escritos de forma similar às equações 25.132 e 25.133, isto é,

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{\ell, m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^e + \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M \right\} \quad (25.151)$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell, m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^e + \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^M \right\} \quad (25.152)$$

onde, de acordo com as expressões 25.121, 25.122, 25.126 e 25.127, temos, para as componentes de multipolo elétrico,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^e(r, \theta, \phi) = f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (25.153a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^e = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^e \quad (25.153b)$$

e, para as componentes de multipolo magnético,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M(r, \theta, \phi) = Z_0 g_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (25.154a)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^M = -\frac{i}{kZ_0} \nabla \times \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M \quad (25.154b)$$

Para determinar as constantes, seguimos o desenvolvimento feito lá, o que resulta nas equações 25.134 e 25.135, que ficam, para o presente caso,

$$\check{C}_{\ell, m}^e f_\ell(kr) = -\frac{k}{Z_0 \sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y_{\ell, m}^*(\theta, \phi) \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\Omega \quad (25.155)$$

e

$$\check{C}_{\ell, m}^M g_\ell(kr) = \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y_{\ell, m}^*(\theta, \phi) \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}} d\Omega \quad (25.156)$$

Com o uso das equações 25.149 e 25.150, as expressões 25.155 e 25.156 tornam-se

$$\check{C}_{\ell,m}^e f_\ell(kr) = -\frac{k}{Z_0 \sqrt{\ell(\ell+1)}} \times \int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \left\{ -\frac{kZ_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\mathcal{L}}' \cdot \left[\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') + \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')}{k^2} \right] dV' \right\} d\Omega$$

e

$$\check{C}_{\ell,m}^M g_\ell(kr) = \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \times \int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \left\{ \frac{i}{4\pi} \int_{V'} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\mathcal{L}}' \cdot [\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')] dV' \right\} d\Omega$$

ou

$$\check{C}_{\ell,m}^e f_\ell(kr) = \frac{k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \times \int_{\Omega} \int_{V'} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\mathcal{L}}' \cdot \left[\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') + \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')}{k^2} \right] dV' d\Omega \quad (25.157)$$

e

$$\check{C}_{\ell,m}^M g_\ell(kr) = \frac{ik}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \times \int_{\Omega} \int_{V'} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\mathcal{L}}' \cdot [\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')] dV' d\Omega \quad (25.158)$$

Como nossos campos devem ser tais que eles se propaguem a partir das fontes em direção ao infinito, nas funções f_ℓ e g_ℓ , dadas pelas equações 25.119 e 25.124,

$$f_\ell(kr) = A_\ell^1 \mathfrak{h}_\ell^1(kr) + A_\ell^2 \mathfrak{h}_\ell^2(kr) \quad g_\ell(kr) = B_\ell^1 \mathfrak{h}_\ell^1(kr) + B_\ell^2 \mathfrak{h}_\ell^2(kr)$$

as constantes A_ℓ^2 e B_ℓ^2 , que multiplicam $\mathfrak{h}_\ell^2$, devem se anular, para que os campos se propaguem “para fora”, como requerido. Então, devemos ter, desconsiderando as constantes, que serão incorporadas nas constantes $\check{C}_{\ell,m}^{e,M}$,

$$f_\ell(kr) = h_\ell^1(kr) \qquad g_\ell(kr) = h_\ell^1(kr) \qquad (25.159)$$

Além disso, a equação H.59 nos fornece a expansão

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = ik \sum_{\ell,m} j_\ell(kr_{<}) h_\ell^1(kr_{>}) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

válida para propagação a partir de um ponto. No caso presente, em que as fontes são localizadas numa região finita, devemos ter $r_{<} = r'$ e $r_{>} = r$, ou seja,

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = ik \sum_{\ell,m} j_\ell(kr') h_\ell^1(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \qquad (25.160)$$

Empregando esta equação na expressão 25.157, ficamos com

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,m}^e h_\ell^1(kr) &= \frac{k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \\ &\times \int_{\Omega} \int_{V'} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) ik \sum_{\ell',m'} \left[j_{\ell'}(kr') h_{\ell'}^1(kr) Y_{\ell',m'}^*(\theta', \phi') Y_{\ell',m'}(\theta, \phi) \right] \\ &\times \vec{\mathcal{L}}' \cdot \left[\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') + \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')}{k^2} \right] dV' d\Omega \end{aligned}$$

onde utilizamos linhas nos índices (ℓ', m') para diferenciá-los de (ℓ, m) . Podemos reescrever a expressão acima trocando as ordens de integração e de soma, para dar

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,m}^e h_\ell^1(kr) &= \frac{ik^3}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_{V'} \left\{ \vec{\mathcal{L}}' \cdot \left[\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') + \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')}{k^2} \right] \right. \\ &\times \sum_{\ell',m'} \left[j_{\ell'}(kr') h_{\ell'}^1(kr) Y_{\ell',m'}^*(\theta', \phi') \int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell',m'}(\theta, \phi) d\Omega \right] \left. \right\} dV' \end{aligned}$$

A última integral é dada pela condição de ortogonalidade C.31 dos harmônicos esféricos, e ela resulta em

$$\check{C}_{\ell,m}^e h_\ell^1(kr) = \frac{ik^3}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_{V'} \left\{ \vec{\mathcal{L}}' \cdot \left[\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') + \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')}{k^2} \right] \right. \\ \left. \times \sum_{\ell',m'} \left[j_{\ell'}(kr') h_{\ell'}^1(kr) Y_{\ell',m'}^*(\theta', \phi') \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'} \right] \right\} dV'$$

Efetuada as somas, temos

$$\check{C}_{\ell,m}^e h_\ell^1(kr) = \frac{ik^3}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_{V'} j_\ell(kr') h_\ell^1(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') \vec{\mathcal{L}}' \cdot \left[\vec{\mathcal{M}}(\vec{r}') + \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')}{k^2} \right] dV'$$

ou, como a integral é feita nas variáveis com linha, de modo que podemos retirar $h_\ell^1(kr)$ da integral,

$$\check{C}_{\ell,m}^e = \frac{ik^3}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \vec{\mathcal{L}} \cdot \left[\vec{\mathcal{M}} + \frac{\nabla \times \vec{\mathcal{J}}}{k^2} \right] dV \quad (25.161)$$

onde também retiramos as linhas, por serem redundantes. Vejamos agora os coeficientes $\check{C}_{\ell,m}^M$. Para tanto, empregamos as equações 25.159 e 25.160 na expressão 25.158, e obtemos

$$\check{C}_{\ell,m}^M h_\ell^1(kr) = \frac{ik}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \\ \times \int_\Omega \int_{V'} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) ik \sum_{\ell',m'} \left[j_{\ell'}(kr') h_{\ell'}^1(kr) Y_{\ell',m'}^*(\theta', \phi') Y_{\ell',m'}(\theta, \phi) \right] \\ \times \vec{\mathcal{L}}' \cdot [\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')] dV' d\Omega$$

Fazendo novamente a troca de ordem de integração e soma, temos

$$\check{C}_{\ell,m}^M h_\ell^1(kr) = -\frac{k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_{V'} \left\{ \vec{\mathcal{L}}' \cdot [\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')] \right. \\ \left. \times \sum_{\ell',m'} \left[j_{\ell'}(kr') h_{\ell'}^1(kr) Y_{\ell',m'}^*(\theta', \phi') \int_\Omega Y_{\ell,m}(\theta, \phi) Y_{\ell',m'}^*(\theta, \phi) d\Omega \right] \right\} dV'$$

ou então, usando C.31,

$$\check{C}_{\ell,m}^M h_\ell^1(kr) = -\frac{k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_{V'} \left\{ \vec{\mathcal{L}}' \cdot [\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')] \right. \\ \left. \times \sum_{\ell',m'} \left[j_{\ell'}(kr') h_{\ell'}^1(kr) Y_{\ell',m'}^*(\theta', \phi') \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'} \right] \right\} dV'$$

que fica, após efetuar a somatória,

$$\check{C}_{\ell,m}^M h_\ell^1(kr) = -\frac{k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \\ \times \int_{V'} j_\ell(kr') h_\ell^1(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') \vec{\mathcal{L}}' \cdot [\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') + \nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\vec{r}')] dV'$$

ou, finalmente,

$$\check{C}_{\ell,m}^M = -\frac{k^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \vec{\mathcal{L}} \cdot [\vec{\mathcal{J}} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}}] dV \quad (25.162)$$

As equações 25.161 e 25.162 fornecem os coeficientes $\check{C}_{\ell,m}^e$ e $\check{C}_{\ell,m}^M$ para as expressões 25.151 e 25.152, especificando completamente o problema desde que as fontes sejam conhecidas. Estas expressões podem ser reescritas de forma a deixar mais clara a dependência com relação às fontes. Para tanto, lembre-se de que, pela equação 25.146, temos

$$(\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{r} = i\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{V}$$

que pode também ser reescrita como

$$\nabla \cdot (\vec{V} \times \vec{r}) = i\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{V}$$

ou

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{V} = i\nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{V}) \quad (25.163)$$

Se $\vec{V}$ for escrito como $\vec{V} = \nabla \times \vec{U}$, a expressão acima torna-se

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot (\nabla \times \vec{U}) = i\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{U})] \quad (25.164)$$

A identidade 1.58g estabelece que

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

de modo que achamos

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{U})] = (\nabla \times \vec{r}) \cdot (\nabla \times \vec{U}) - \vec{r} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{U})]$$

ou

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{U})] = -\vec{r} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U}]$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{U})] = \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{U} - \vec{r} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{U})$$

Usamos agora a propriedade 25.114, e obtemos

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{U})] = \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{U}) - 2\nabla \cdot \vec{U} - \vec{r} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) \quad (25.165)$$

Em coordenadas esféricas, temos, pela equação B.16,

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Assim,

$$\vec{r} \cdot \nabla = r \frac{\partial}{\partial r} \quad (25.166)$$

Vamos calcular agora

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \nabla \cdot \vec{U}) = 2r \nabla \cdot \vec{U} + r^2 \frac{\partial}{\partial r}(\nabla \cdot \vec{U})$$

ou, usando a equação 25.166,

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \nabla \cdot \vec{U}) = r[2\nabla \cdot \vec{U} + \vec{r} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{U})]$$

de modo que

$$2\nabla \cdot \vec{U} + \vec{r} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \nabla \cdot \vec{U}) \quad (25.167)$$

Com o uso da expressão 25.167, a equação 25.165 fica

$$\nabla \cdot [\vec{r} \times (\nabla \times \vec{U})] = \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{U}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \nabla \cdot \vec{U}) \quad (25.168)$$

Aplicando a equação 25.168 em 25.164, achamos

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot (\nabla \times \vec{U}) = i \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{U}) - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \nabla \cdot \vec{U}) \quad (25.169)$$

que é válida para qualquer vetor $\vec{U}$. Se $\vec{V} = \vec{\mathcal{M}}$, a equação 25.163 fica

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{M}} = i \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{M}}) \quad (25.170)$$

Se $\vec{U} = \vec{\mathcal{J}}$, a expressão 25.169 torna-se ¹¹

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{J}}) = i \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}) \quad (25.171)$$

Utilizando as equações 25.170 e 25.171, a expressão 25.161 fica

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,m}^e &= \frac{ik^3}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \\ &\times \left\{ i \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{M}}) + \frac{i}{k^2} \left[\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}) \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (25.172)$$

Utilizando a equação 25.138, temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = i\omega\wp \quad (25.173)$$

Com o uso de 25.173, a expressão 25.172 fica

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,m}^e &= -\frac{k^3}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \\ &\times \left\{ \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{M}}) + \frac{1}{k^2} \left[\nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) - \frac{ick}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \wp) \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (25.174)$$

que pode ainda ser manipulada. Considere o termo

¹¹ Note que $\nabla \times \vec{\mathcal{M}}$ não é igual a $\vec{\mathcal{J}}$.

$$\int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{1}{k^2} \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV = \frac{1}{k^2} \int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV \quad (25.175)$$

O teorema de Green 1.62 estabelece que

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot \hat{n} dA$$

Assim, considerando

$$\Psi = j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \quad \Phi = \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_V \left[j_\ell Y_{\ell,m}^* \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) - (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \nabla^2(j_\ell Y_{\ell,m}^*) \right] dV = \\ \oint_S \left[j_\ell Y_{\ell,m}^* \nabla(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) - (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \nabla(j_\ell Y_{\ell,m}^*) \right] \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

O volume de integração deve ser suficientemente grande para envolver as fontes, podendo ser maior do que elas, de modo que $\vec{\mathcal{J}} = 0$ na superfície que delimita o volume, e a integral de superfície se anula. Então,

$$\int_V j_\ell Y_{\ell,m}^* \nabla^2(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV = \int_V (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) \nabla^2(j_\ell Y_{\ell,m}^*) dV \quad (25.176)$$

Pela relação 6.79,

$$Y_{\ell,m}^* = (-1)^m Y_{\ell,-m} \quad (25.177)$$

Além disso, devemos lembrar que a equação de Helmholtz homogênea H.1,

$$\nabla^2 f(\vec{r}) + \lambda^2 f(\vec{r}) = 0$$

tem justamente como soluções as funções $j_\ell Y_{\ell,m}$, conforme mostramos no apêndice H. Então,

$$\nabla^2 [j_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)] = -k^2 j_\ell(kr) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

e, usando a expressão 25.177, podemos escrever

$$\nabla^2 [j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi)] = -k^2 j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \quad (25.178)$$

Com o uso da equação 25.178, a expressão 25.176 fica

$$\int_V j_\ell Y_{\ell,m}^* \nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV = -k^2 \int_V j_\ell Y_{\ell,m}^* (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV$$

de modo que a equação 25.175 torna-se

$$\int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{1}{k^2} \nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV = - \int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) dV \quad (25.179)$$

Considere agora, em 25.174, o termo

$$\int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{ick}{k^2 r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dV = \frac{ic}{k} \int_V \frac{1}{r} j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dV \quad (25.180)$$

Lembrando que o elemento de volume em coordenadas esféricas pode ser escrito como $dV = r^2 dr d\Omega$, podemos reescrever o lado direito da expressão 25.180 como

$$\begin{aligned} \frac{ic}{k} \int_V \frac{1}{r} j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dV = \\ \frac{ic}{k} \int_\Omega Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \left\{ \int_r r j_\ell(kr) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dr \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (25.181)$$

Podemos realizar uma integração por partes da integral radial, mediante

$$\begin{aligned} u &= r j_\ell(kr) & du &= \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] \\ dv &= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dr & v &= r^2 \wp \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_r r j_\ell(kr) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dr = \left[r^3 j_\ell(kr) \wp(\vec{r}) \right]_0^r - \int_r r^2 \wp \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] dr$$

Note que, como a densidade de carga $\wp$ é localizada, ao considerarmos um volume V que envolva completamente as fontes, a aplicação em r no primeiro termo do lado direito da equação acima se anula, ou seja ¹²,

$$\int_r r j_\ell(kr) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dr = - \int_r r^2 \wp \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] dr \quad (25.182)$$

Com o uso de 25.182, a expressão 25.181 torna-se

$$\begin{aligned} \frac{ic}{k} \int_V \frac{1}{r} j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dV = \\ - \frac{ic}{k} \int_\Omega Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \left\{ \int_r r^2 \wp \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] dr \right\} d\Omega \end{aligned}$$

ou

$$\frac{ic}{k} \int_V \frac{1}{r} j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dV = - \frac{ic}{k} \int_V Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \wp \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] dV$$

de modo que a expressão 25.180 fica

$$\int_V j_\ell(kr) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \frac{ick}{k^2 r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \wp) dV = - \frac{ic}{k} \int_V Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \wp \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] dV \quad (25.183)$$

Com o uso das expressões 25.179 e 25.183, a equação 25.174 torna-se, após as devidas simplificações,

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,m}^e = - \frac{ik^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_V Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \left\{ c \wp(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] \right. \\ \left. + ik j_\ell(kr) (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{J}}) - ik j_\ell(kr) \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{M}}) \right\} dV \quad (25.184) \end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos, o que é deixado como exercício (veja o exercício 25.3), mostra-se que a equação 25.162 pode ser reescrita como

¹² O termo se anula também em $r = 0$, por causa do fator r^3 .

$$\check{C}_{\ell,m}^M = -\frac{ik^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_V Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \left\{ \nabla \cdot \vec{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] \right. \\ \left. + j_\ell(kr) \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}) - k^2 j_\ell(kr) (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \right\} dV \quad (25.185)$$

As equações 25.184 e 25.185 são válidas em geral, para qualquer frequência e tamanho de fonte, e elas explicitam a dependência dos coeficientes de multipolos elétricos e magnéticos em termos das fontes. Veremos algumas aplicações importantes das equações acima em seguida.

Exemplo 25.1. *Uma aplicação imediata das equações acima consiste em determinar os campos de radiação emitidos por uma antena linear alimentada pelo seu centro por um gerador que gera uma corrente oscilante, como mostra a figura 25.5.*

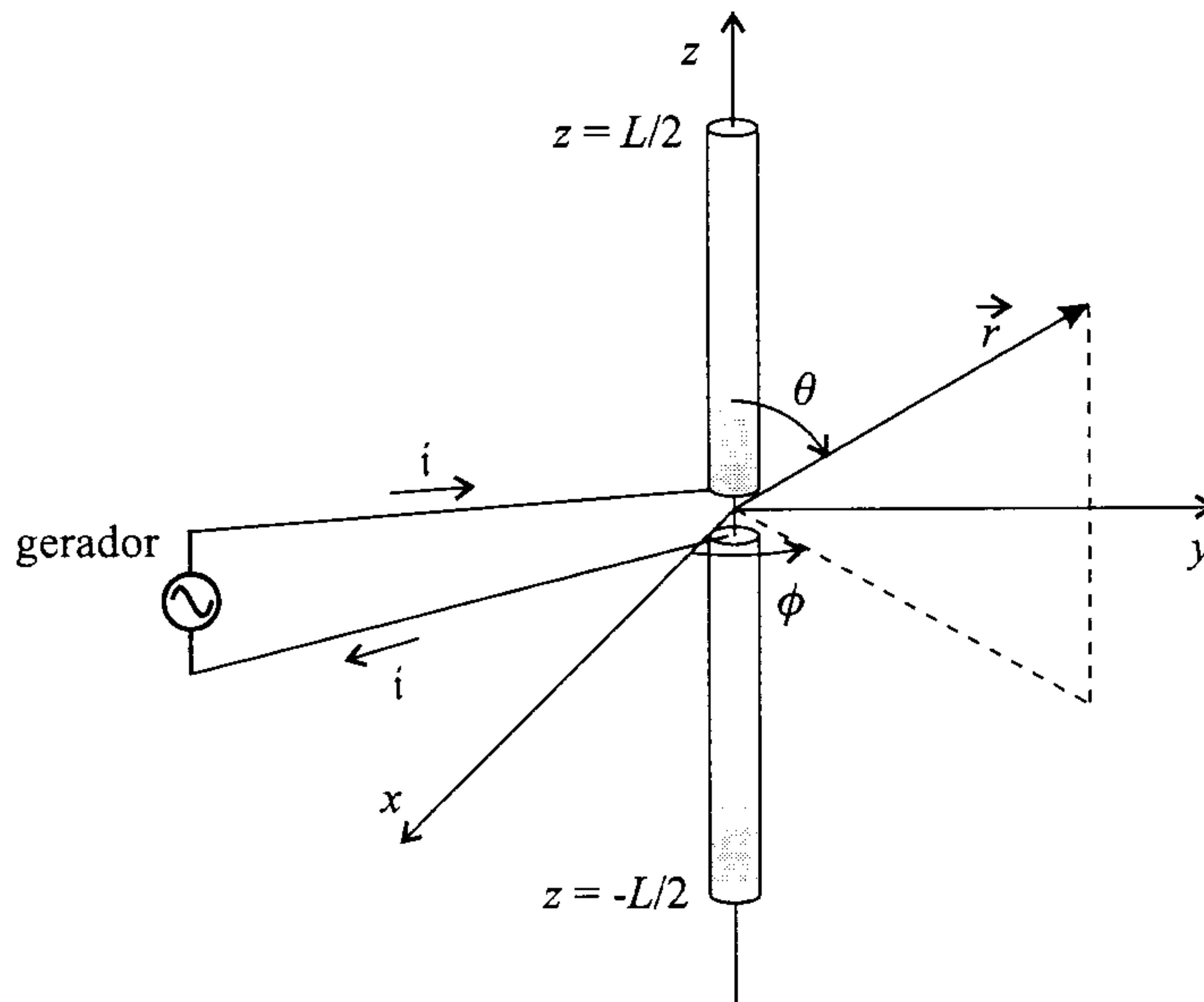


Figura 25.5: Modelo para uma antena linear alimentada pelo centro por um gerador que fornece corrente alternada.

A antena tem tamanho total L e está paralela ao eixo z . Nosso objetivo é

determinar os coeficientes 25.184 e 25.185 para esse problema.

Pelas condições do problema, a corrente nas extremidades da antena deve ser nula, e pela simetria da situação, deve ser uma função par de z , de modo que podemos escrever, de forma bastante geral,

$$\mathcal{J}(z, t) = \mathcal{J}(|z|)e^{-i\omega t} \quad (25.186)$$

com a condição auxiliar

$$\mathcal{J}\left(\frac{L}{2}\right) = \mathcal{J}\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (25.187)$$

onde supusemos uma dependência temporal harmônica para a corrente, considerando que o gerador de corrente produza uma corrente senoidal, por exemplo, além de já escrevermos a extensão complexa da corrente. Como a corrente flui ao longo do eixo z , a densidade de corrente $\vec{\mathcal{J}}$ é paralela a esse eixo, de modo que em pontos pertencentes à antena temos

$$\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}} = 0 \quad (25.188)$$

Além disso, a antena não possui, em geral, magnetização, de modo que

$$\vec{\mathcal{M}} = 0 \quad (25.189)$$

A consequência imediata das condições que levam às equações 25.188 e 25.189 é que, se olharmos a equação 25.185, veremos que todos os coeficientes $\check{C}_{\ell,m}^M$ serão nulos, isto é,

$$\check{C}_{\ell,m}^M = 0 \quad (25.190)$$

para uma antena linear, alimentada pelo centro, de modo que a antena não tem termos de multipolo magnético, apenas elétrico. Para calcular os coeficientes $\check{C}_{\ell,m}^e$, dados pela equação 25.184, precisamos de $\vec{\mathcal{J}}$ e $\wp$. Lembrando as funções delta de Dirac estudadas na seção 4.7, em particular a delta associada com uma distribuição linear de cargas num fio, dada pela equação 4.51, vemos que podemos escrever a densidade de corrente no fio ¹³ por meio de

$$\vec{\mathcal{J}} = \frac{\mathcal{J}(r)}{2\pi r^2} [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] \hat{\mathbf{r}}, \quad r \leq \frac{L}{2} \quad (25.191)$$

¹³ Na verdade, a parte espacial da densidade de corrente.

onde as funções delta forçam a corrente a circular pelo eixo z . A verificação explícita de que essa expressão concorda com uma corrente $\mathcal{J}$ circulando na antena é deixada como exercício (veja o exercício 25.4). Se $\vec{\mathcal{J}}$ for conhecido, a densidade de carga $\wp$ pode ser obtida por intermédio da equação 25.138,

$$\wp = -\frac{i}{\omega} \nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}$$

onde devemos lembrar também que o divergente, em coordenadas esféricas, é dado pela equação B.18,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Como $\vec{\mathcal{J}}$ só tem componente radial, temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \mathcal{J})$$

de modo que a densidade de carga fica

$$\wp = -\frac{i}{\omega} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \mathcal{J})$$

ou, substituindo $\mathcal{J}$ dado por 25.191,

$$\wp(\vec{r}) = -\frac{i}{\omega} \frac{[\delta(\cos \theta - 1) + \delta(\cos \theta + 1)]}{2\pi r^2} \frac{d\mathcal{J}}{dr} \quad (25.192)$$

Usamos agora as expressões 25.191 e 25.192 na equação 25.184, ou seja,

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,m}^e = & -\frac{ik^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_V Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \\ & \times \left\{ c \left\{ -\frac{i}{\omega} \frac{[\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)]}{2\pi r^2} \frac{d\mathcal{J}}{dr} \right\} \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] \right. \\ & \left. + ik j_\ell(kr) \left(\vec{r} \cdot \frac{\mathcal{J}(r)}{2\pi r^2} [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] \hat{\mathbf{r}} \right) \right\} dV \end{aligned}$$

ou

$$\check{C}_{\ell,m}^e = \frac{k^2}{2\pi\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_0^{\frac{L}{2}} \left\{ \left\{ kr j_\ell(kr) \mathcal{I}(r) - \frac{1}{k} \frac{d\mathcal{I}}{dr} \frac{d}{dr} [r j_\ell(kr)] \right\} \right. \\ \left. \times \int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d\Omega \right\} dr \quad (25.193)$$

A integral angular é

$$\int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d\Omega = \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_{\ell,m}^* [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d(\cos \theta) d\phi \quad (25.194)$$

Os harmônicos esféricos são dados pela equação 6.78, isto é,

$$Y_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Seu complexo conjugado é

$$Y_{\ell,m}^* = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{-im\phi}$$

Assim, a equação 25.194 pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d\Omega = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \\ \times \int_{-1}^1 P_{\ell,m}(\cos \theta) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] \left[\int_0^{2\pi} e^{-im\phi} d\phi \right] d(\cos \theta) \quad (25.195)$$

A integral em ϕ pode ser realizada de um modo simples se lembrarmos que, pela expressão C.29,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,m'}$$

Com $m = 0$, temos

$$\int_0^{2\pi} e^{-im'\phi} d\phi = 2\pi\delta_{0,m'}$$

de modo que a expressão 25.195 simplifica-se para

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] d\Omega &= 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \\ &\times \int_{-1}^1 P_{\ell,m}(\cos\theta) [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] \delta_{0,m} d(\cos\theta) \end{aligned}$$

ou, como a função delta só permite que termos com $m = 0$ sejam não-nulos, o que pode ser entendido se lembrarmos a simetria do problema em torno do eixo z , achamos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] d\Omega &= \\ 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int_{-1}^1 P_{\ell,0}(\cos\theta) [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] d(\cos\theta) \end{aligned}$$

Além disso, temos também que $P_{\ell,0} = P_{\ell}$, onde P_{ℓ} são os polinômios de Legendre, de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] d\Omega &= \\ 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int_{-1}^1 P_{\ell}(\cos\theta) [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] d(\cos\theta) \quad (25.196) \end{aligned}$$

Efetuada a integral restante em 25.196, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] d\Omega &= \\ 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} [P_{\ell}(1) - P_{\ell}(-1)] \quad (25.197) \end{aligned}$$

Agora, sabemos que, de acordo com a definição dos polinômios de Legendre,

$$P_{\ell}(1) = 1 \qquad P_{\ell}(-1) = (-1)^{\ell}$$

Então, a expressão 25.197 fica

$$\int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d\Omega = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} [1 - (-1)^\ell]$$

O termo entre colchetes é nulo se ℓ é par, e ele vale 2 se ℓ é ímpar, de modo que temos

$$\int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d\Omega = \sqrt{4\pi(2\ell+1)}, \ell \text{ ímpar}, m = 0 \quad (25.198)$$

Com o uso da equação 25.198, a expressão 25.193 fica sendo, para ℓ ímpar,

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}} k^2 \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left\{ kr j_\ell(kr) \mathcal{J}(r) - \frac{1}{k} \frac{d\mathcal{J}}{dr} \frac{d}{dr} [r j_\ell(kr)] \right\} dr \quad (25.199)$$

Vamos reescrever esta equação considerando o termo

$$\frac{d}{dr} [r j_\ell(kr) \frac{d\mathcal{J}}{dr}] = \frac{d\mathcal{J}}{dr} \frac{d}{dr} [r j_\ell(kr)] + r j_\ell(kr) \frac{d^2\mathcal{J}}{dr^2}$$

de modo que

$$\frac{d\mathcal{J}}{dr} \frac{d}{dr} [r j_\ell(kr)] = \frac{d}{dr} [r j_\ell(kr) \frac{d\mathcal{J}}{dr}] - r j_\ell(kr) \frac{d^2\mathcal{J}}{dr^2} \quad (25.200)$$

Empregando 25.200 em 25.199, achamos

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,0}^e &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}} k^2 \\ &\times \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left\{ kr j_\ell(kr) \mathcal{J}(r) - \frac{1}{k} \left\{ \frac{d}{dr} [r j_\ell(kr) \frac{d\mathcal{J}}{dr}] - r j_\ell(kr) \frac{d^2\mathcal{J}}{dr^2} \right\} \right\} dr \end{aligned}$$

ou, reescrevendo melhor a expressão,

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,0}^e &= \\ &\sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}} k \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left\{ r j_\ell(kr) \mathcal{J}(r) \left[k^2 + \frac{d^2\mathcal{J}}{dr^2} \right] - \frac{d}{dr} [r j_\ell(kr) \frac{d\mathcal{J}}{dr}] \right\} dr \quad (25.201) \end{aligned}$$

Para podermos continuar, precisamos da expressão explícita de $\mathcal{J}(|z|)$. Como hipótese, vamos supor que a corrente possa ser descrita pela aproximação

$$\mathcal{J}(z) = \mathcal{J}_0 \sin\left(\frac{kL}{2} - k|z|\right) \quad (25.202)$$

que seria rigorosamente válida apenas se a antena fosse uma linha no sentido matemático, já que não leva em conta o diâmetro da antena, por exemplo, além de desprezar a própria resistência elétrica do material que a forma, o que altera a distribuição de corrente de forma a gerar um problema com condições de contorno bastante complicado. Esta aproximação, feita pela primeira vez por H. C. Pocklington, em 1897, tem como vantagens permitir que efetue os cálculos de forma relativamente simples e também fornecer uma boa idéia a respeito do fenômeno físico considerado. Com o uso de 25.202, é simples mostrar que

$$\frac{d^2\mathcal{J}}{dz^2} = -k^2\mathcal{J}$$

o que faz com que o primeiro colchetes na integral em 25.201 se anule. Então,

$$\check{C}_{\ell,0}^e = -\sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}}k \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d}{dr} \left[r j_\ell(kr) \frac{d\mathcal{J}}{dr} \right] dr$$

ou

$$\check{C}_{\ell,0}^e = -\sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}}k \left[r j_\ell(kr) \frac{d\mathcal{J}}{dr} \right]_0^{\frac{L}{2}} \quad (25.203)$$

Vamos precisar da derivada de 25.202, ou seja,

$$\frac{d\mathcal{J}}{dr} = \mathcal{J}_0 \frac{d}{dr} \left[\sin\left(\frac{kL}{2} - kr\right) \right] = -k\mathcal{J}_0 \cos\left(\frac{kL}{2} - kr\right) \quad (25.204)$$

Com o uso de 25.204, a equação 25.203 torna-se

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}} \frac{k^2 L \mathcal{J}_0}{2} j_\ell\left(\frac{kL}{2}\right)$$

ou

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \frac{2J_0}{L} \sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}} \left(\frac{kL}{2}\right)^2 j_\ell\left(\frac{kL}{2}\right) \quad (25.205)$$

Dois casos importantes são os que correspondem a uma antena de meia-onda e uma antena de onda completa, caracterizadas pela situação em que o comprimento L da antena corresponde, respectivamente, a meio e a um comprimento de onda λ da radiação emitida. Temos então, para uma antena de meia-onda,

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$$

ou

$$kL = \pi, \quad \text{meia-onda} \quad (25.206)$$

onde usamos $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Com isso, temos, para uma antena de meia-onda, os coeficientes dados por 25.205 como sendo

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \frac{2J_0}{L} \sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 j_\ell\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (25.207)$$

lembrando que ℓ deve ser ímpar. Alguns valores para esses coeficientes são dados na tabela 25.1, que mostra também os valores aproximados da razão entre os coeficientes com $\ell > 1$ e o coeficiente com $\ell = 1$.

Para uma onda completa, temos

$$L = \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

ou

$$kL = 2\pi, \quad \text{onda completa} \quad (25.208)$$

e, usando a equação 25.205, achamos

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \frac{2J_0}{L} \sqrt{\frac{2\ell+1}{\pi\ell(\ell+1)}} \pi^2 j_\ell(\pi) \quad (25.209)$$

Alguns valores são apresentados na tabela 25.2, juntamente com a razão entre os coeficientes com $\ell > 1$ e o coeficiente com $\ell = 1$.

ℓ	$\frac{L}{\mathfrak{I}_0} \check{C}_{\ell,0}^e$	$\frac{\check{C}_{\ell,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e}$
1	$\sqrt{\frac{6}{\pi}}$	1
3	$-\frac{2(\pi^2-10)}{\pi^2} \sqrt{\frac{21}{\pi}}$	$\approx -4,94 \times 10^{-2}$
5	$\frac{\pi^4-112\pi^2+1008}{\pi^4} \sqrt{\frac{330}{\pi}}$	$\approx 1,02 \times 10^{-3}$
7	$-\frac{\pi^6-450\pi^4+35640\pi^2-308880}{\pi^6} \sqrt{\frac{210}{\pi}}$	$\approx -9,84 \times 10^{-6}$

Tabela 25.1: Alguns coeficientes $\check{C}_{\ell,0}^e$ dados pela equação 25.207 para as antenas de meia-onda alimentadas pelo centro, juntamente com as razões aproximadas entre os coeficientes com $\ell > 1$ e com $\ell = 1$.

Observando as tabelas, vemos que os coeficientes diminuem de valor à medida que ℓ aumenta, mostrando que os multipolos de ℓ menor são os mais importantes, em particular o primeiro. Além disso, quanto maior a fonte quando comparada com o comprimento de onda da radiação emitida, mais lentamente caem os coeficientes, que é o que ocorre na antena de onda completa, onde $\lambda = L$, quando a comparamos com a antena de meia-onda, na qual $\lambda = 2L$.

Os campos de radiação são dados pelas expressões 25.151 e 25.152, lembrando que os coeficientes dos multipolos magnéticos são nulos e que $m = 0$, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{\ell} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \check{C}_{\ell,0}^e \vec{\mathcal{E}}_{\ell,0}^e \tag{25.210}$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \check{C}_{\ell,0}^e \vec{\mathcal{H}}_{\ell,0}^e \tag{25.211}$$

onde ℓ é ímpar e $\vec{\mathcal{H}}$ e $\vec{\mathcal{E}}$ são dados mediante as equações 25.153, isto é,

ℓ	$\frac{L}{J_0} \check{C}_{\ell,0}^e$	$\frac{\check{C}_{\ell,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e}$
1	$\sqrt{6\pi}$	1
3	$\frac{15-\pi^2}{3\pi} \sqrt{\frac{21}{\pi}}$	$\approx 0,324$
5	$\frac{\pi^4-105\pi^2+935}{15\pi^3} \sqrt{\frac{330}{\pi}}$	$\approx 3,10 \times 10^{-2}$
7	$-\frac{\pi^6-374\pi^4+17325\pi^2-135135}{14\pi^5} \sqrt{\frac{210}{\pi}}$	$\approx -1,47 \times 10^{-3}$

Tabela 25.2: Alguns coeficientes $\check{C}_{\ell,0}^e$ dados pela equação 25.209 para as antenas de onda completa, juntamente com as razões aproximadas entre os coeficientes com $\ell > 1$ e com $\ell = 1$.

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,0}^e(r, \theta, \phi) = f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,0}(\theta, \phi) \tag{25.212a}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,0}^e = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell,0}^e \tag{25.212b}$$

É possível escrever expressões explícitas para alguns termos dos campos, utilizando também as equações H.13 e H.14, mas isso é deixado como exercício para o leitor (veja o exercício 25.5). Vejamos agora outro sistema radiante importante.

Exemplo 25.2. *Vamos considerar agora uma antena linear de tamanho L alimentada por um extremo, como na figura 25.6. Obtenha os coeficientes, como no caso anterior.*

No presente caso, também podemos escrever

$$\mathcal{J}(z, t) = \mathcal{J}(z) e^{-i\omega t} \tag{25.213}$$

com a condição auxiliar

$$\mathcal{J}(L) = 0 \tag{25.214}$$

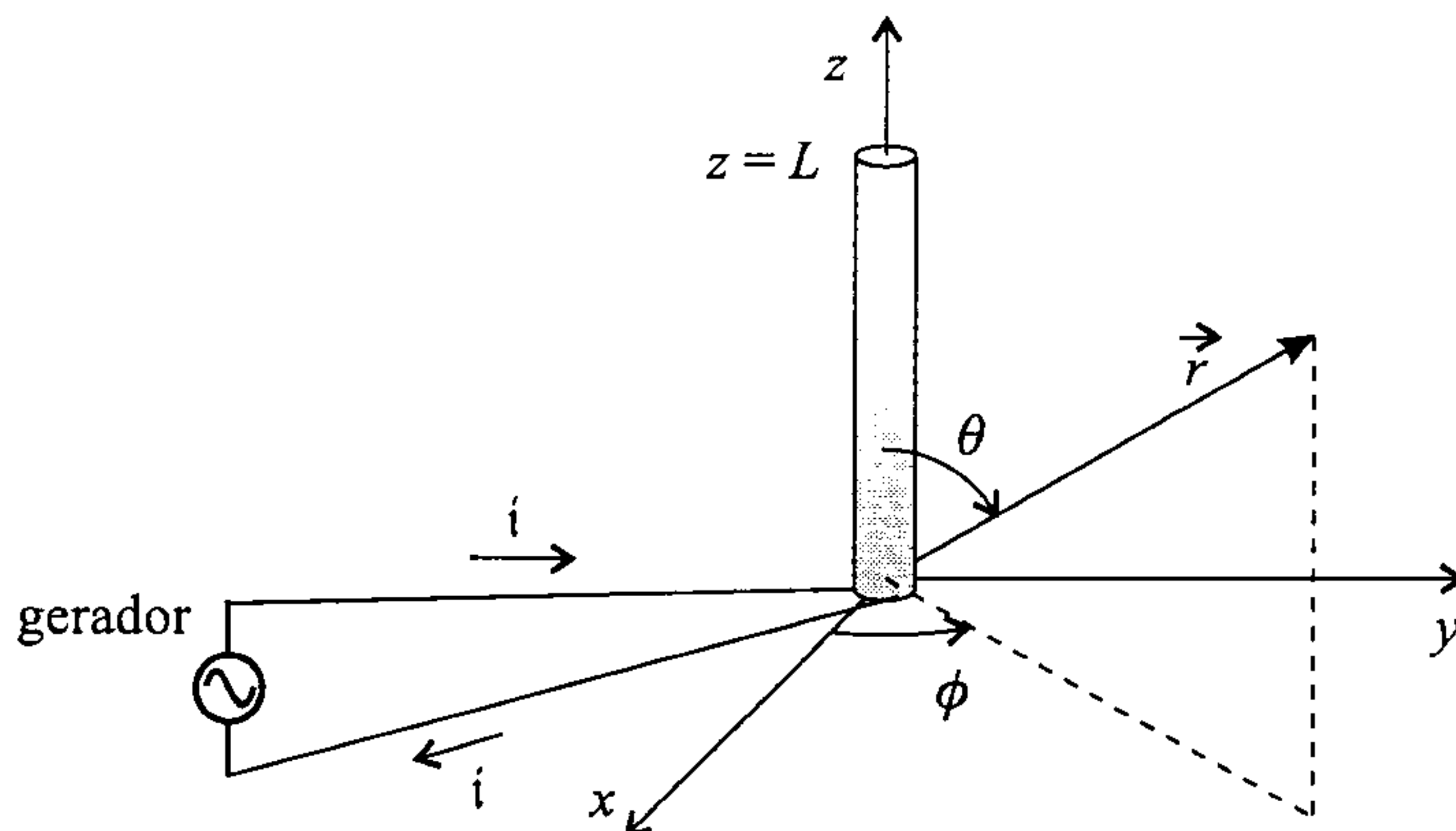


Figura 25.6: Modelo para uma antena linear alimentada pela extremidade por um gerador que fornece corrente alternada.

A densidade de corrente é semelhante à do caso da antena alimentada pelo centro, de modo que

$$\vec{\mathcal{J}} = \frac{J(r)}{2\pi r^2} \delta(\cos \theta - 1) \hat{\mathbf{r}}, \quad r \leq L \quad (25.215)$$

Assim, como antes, temos

$$\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}} = 0 \quad (25.216)$$

e, como não há magnetização,

$$\vec{\mathcal{M}} = 0 \quad (25.217)$$

o que, como no caso anterior, faz com que todos os coeficientes $\check{C}_{\ell,m}^M$ sejam nulos, isto é,

$$\check{C}_{\ell,m}^M = 0 \quad (25.218)$$

Como $\vec{\mathcal{J}}$ é muito similar ao caso discutido no exemplo anterior, praticamente todo o desenvolvimento é o mesmo, excetuando-se a integral na equação 25.196, que fica

$$\int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d\Omega =$$

$$2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int_{-1}^1 P_{\ell}(\cos \theta) \delta(\cos \theta - 1) d(\cos \theta)$$

ou

$$\int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d\Omega = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_{\ell}(1)$$

ou, como $P_{\ell}(1) = 1$,

$$\int_{\Omega} Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] d\Omega = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

As diferenças são um fator multiplicativo igual a 2 e também o fato de que agora é possível ter ℓ par, o que faz com que os coeficientes dados pela equação 25.201 tornem-se

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi\ell(\ell+1)}} k \int_0^L \left\{ r j_{\ell}(kr) \mathcal{J}(r) \left[k^2 + \frac{d^2 \mathcal{J}}{dr^2} \right] - \frac{d}{dr} \left[r j_{\ell}(kr) \frac{d\mathcal{J}}{dr} \right] \right\} dr$$

(25.219)

Note que ainda há simetria cilíndrica em torno do eixo z , de modo que apenas termos com $m = 0$ são possíveis. Fazendo a mesma suposição para a forma explícita da corrente, dada em 25.202,

$$\mathcal{J}(z) = \mathcal{J}_0 \sin k(L - z)$$

chegamos à expressão análoga a 25.205, ou seja,

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \frac{\mathcal{J}_0}{L} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi\ell(\ell+1)}} (kL)^2 j_{\ell}(kL)$$

(25.220)

onde agora todos os ℓ inteiros positivos são possíveis ¹⁴. Para uma antena de meia-onda, temos $kL = \pi$, e então 25.220 fica

¹⁴ Lembre-se de que, pela definição dos campos de multipolo $\vec{\mathcal{H}}_{\ell}$ e $\vec{\mathcal{E}}_{\ell}$, os termos com $\ell = 0$ são nulos.

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \frac{J_0}{L} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi\ell(\ell+1)}} \pi^2 j_\ell(\pi)$$

(25.221)

e alguns valores dos coeficientes são dados na tabela 25.3.

ℓ	$\frac{L}{J_0} \check{C}_{\ell,0}^e$	$\frac{\check{C}_{\ell,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e}$
1	$\frac{\sqrt{6\pi}}{4}$	1
2	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{30}{\pi}}$	$\approx 0,772$
3	$\frac{15-\pi^2}{12\pi} \sqrt{\frac{21}{\pi}}$	$\approx 0,324$
4	$\frac{5(21-2\pi^2)}{\pi^4}$	$\approx 0,111$
5	$\frac{\pi^4-105\pi^2+945}{60\pi^3} \sqrt{\frac{330}{\pi}}$	$\approx 3,10 \times 10^{-2}$
6	$\frac{\pi^4-60\pi^2+495}{4\pi^4} \sqrt{\frac{546}{\pi}}$	$\approx 7,25 \times 10^{-3}$
7	$-\frac{\pi^6-378\pi^4+17325\pi^2-135135}{56\pi^5} \sqrt{\frac{210}{\pi}}$	$\approx 1,47 \times 10^{-3}$

Tabela 25.3: Alguns coeficientes $\check{C}_{\ell,0}^e$ dados pela equação 25.221 para as antenas de meia-onda alimentadas pelo seu extremo, juntamente com as razões aproximadas entre os coeficientes com $\ell > 1$ e com $\ell = 1$.

Note, na tabela 25.3, que os coeficientes agora caem um pouco mais lentamente do que no caso da antena de meia-onda alimentada pelo centro, sendo que agora seria preciso considerar pelo menos 4 termos de multipolo ($\ell = 1$ até $\ell = 4$) para obter uma aproximação razoável para os campos de radiação emitidos pela antena. No caso anterior, os dois primeiros termos, com $\ell = 1$ e $\ell = 3$, já seriam suficientes para exprimir os campos de radiação.

Para uma antena de onda completa, temos $kL = 2\pi$, de modo que a expressão 25.220 fica

$$\check{C}_{\ell,0}^e = \frac{J_0}{L} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi\ell(\ell+1)}} (2\pi)^2 j_\ell(2\pi) \tag{25.222}$$

Alguns valores dos coeficientes são dados na tabela 25.4.

ℓ	$\frac{L}{J_0} \check{C}_{\ell,0}^e$	$\frac{\check{C}_{\ell,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e}$
1	$-\frac{\sqrt{6\pi}}{2}$	1
2	$-\frac{1}{4} \sqrt{\frac{30}{\pi}}$	$\approx 0,356$
3	$\frac{4\pi^2-15}{24\pi} \sqrt{\frac{21}{\pi}}$	$\approx -0,387$
4	$\frac{3(8\pi^2-21)}{16\pi^2} \sqrt{\frac{5}{\pi}}$	$\approx -0,640$
5	$-\frac{16\pi^4-420\pi^2+945}{480\pi^3} \sqrt{\frac{330}{\pi}}$	$\approx -0,521$
6	$-\frac{16\pi^4-240\pi^2+495}{64\pi^4} \sqrt{\frac{546}{\pi}}$	$\approx -0,307$
7	$\frac{64\pi^6-6048\pi^4+69300\pi^2-135135}{1792\pi^5} \sqrt{\frac{210}{\pi}}$	$\approx -0,146$

Tabela 25.4: Alguns coeficientes $\check{C}_{\ell,0}^e$ dados pela equação 25.222 para as antenas de onda completa alimentadas pelo seu extremo, juntamente com as razões aproximadas entre os coeficientes com $\ell > 1$ e com $\ell = 1$.

Neste caso, os coeficientes decaem muito mais lentamente que no caso da antena de onda completa alimentada pelo centro. Seria preciso considerar mais termos de multipolo para termos uma aproximação razoável para os campos emitidos pela antena. Como no exemplo anterior, os campos são obtidos por meio das equações 25.151 e 25.152, lembrando que os coeficientes dos multipolos magnéticos são nulos e que $m = 0$, ou seja,

$$\vec{\check{\mathcal{E}}} = \sum_{\ell} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \check{C}_{\ell,0}^e \vec{\check{\mathcal{E}}}_{\ell,0}^e \tag{25.223}$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \check{C}_{\ell,0}^e \vec{\mathcal{H}}_{\ell,0}^e \quad (25.224)$$

onde $\vec{\mathcal{H}}$ e $\vec{\mathcal{E}}$ são dados mediante as equações 25.153, isto é,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,0}^e(r, \theta, \phi) = f_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,0}(\theta, \phi) \quad (25.225a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,0}^e = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell,0}^e \quad (25.225b)$$

Após estudar esses dois exemplos, vamos passar a considerar um tema de grande importância prática, que é a distribuição angular da potência irradiada pelas fontes em termos dos momentos de multipolo dos campos de radiação.

25.6 Distribuição Angular da Potência Irradiada pelos Momentos de Multipolo

Para determinar a distribuição angular da potência irradiada, e a potência total irradiada, em termos dos momentos de multipolos, vamos considerar que estamos na zona de radiação, descrita pela condição 25.32,

$$kr \gg 1$$

ou seja, a distância entre as fontes de radiação e o ponto de observação é muito maior que um comprimento de onda típico da radiação emitida. Os campos de radiação, em termos de uma expansão multipolar, são dados pelas equações 25.151 e 25.152,

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{\ell, m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^e + \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{E}}_{\ell, m}^M \right\} \quad (25.226)$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell, m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^e + \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{H}}_{\ell, m}^M \right\} \quad (25.227)$$

onde os campos são dados por 25.153,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) &= f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \\ \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e &= \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e\end{aligned}$$

e 25.154,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M(r, \theta, \phi) &= Z_0 g_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \\ \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M &= -\frac{i}{kZ_0} \nabla \times \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M\end{aligned}$$

Para expressar a potência irradiada por unidade de ângulo sólido, vamos precisar de algumas expressões adicionais. Primeiramente, note que as equações 25.153 podem ser transformadas nas 25.154, e vice-versa, se usarmos as equivalências

$$\vec{\mathcal{E}}^e \leftrightarrow -Z_0 \vec{\mathcal{H}}^M \quad (25.230a)$$

$$\vec{\mathcal{H}}^e \leftrightarrow \frac{1}{Z_0} \vec{\mathcal{E}}^M \quad (25.230b)$$

Consideremos inicialmente a equação 25.153b,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$$

Usando 25.230, temos

$$-Z_0 \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \frac{1}{Z_0} \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = -\frac{i}{kZ_0} \nabla \times \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M$$

que é a equação 25.154b. Tomemos agora 25.153a,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) = f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Utilizando 25.230, achamos

$$\frac{1}{Z_0} \vec{\mathcal{E}}^M(r, \theta, \phi) = f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}^M(r, \theta, \phi) = Z_0 f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

que é a expressão 25.154a quando $f_\ell(kr)$ e $g_\ell(kr)$ são descritos pela mesma função. No caso da zona de radiação, lembrando que, quando r é muito grande e queremos radiação propagando-se para fora a partir de um ponto, essas funções são dadas por 25.159,

$$f_\ell(kr) = \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \qquad g_\ell(kr) = \mathfrak{h}_\ell^1(kr)$$

vemos que as funções são de fato iguais, o que justifica o uso de 25.230. Quando $x \gg 1$, as funções $\mathfrak{h}_\ell^1(x)$ podem ser aproximadas pela forma assintótica

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) \sim (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ix}}{x}, \qquad x \gg 1 \qquad (25.231)$$

Para continuar, precisamos mostrar a identidade

$$i \nabla \times \vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \nabla^2 + \nabla \left(1 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \qquad (25.232)$$

onde $\vec{\mathcal{L}}$ é dado por H.10,

$$\vec{\mathcal{L}} = -i(\vec{r} \times \nabla)$$

Vejamos então a demonstração.

Demonstração. Para demonstrar 25.232, inicialmente calculamos

$$i \nabla \times \vec{\mathcal{L}} = \nabla \times (\vec{r} \times \nabla) \qquad (25.233)$$

Utilizando a identidade 1.58i, temos

$$\nabla \times (\vec{r} \times \nabla) = \vec{r}(\nabla \cdot \nabla) - \nabla(\nabla \cdot \vec{r}) + (\nabla \cdot \nabla)\vec{r} - (\vec{r} \cdot \nabla)\nabla$$

Como $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ e $\nabla \cdot \vec{r} = 3$, temos

$$\nabla \times (\vec{r} \times \nabla) = \vec{r} \nabla^2 + \nabla^2 \vec{r} - \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla$$

Agora, utilizamos a identidade 1.58c,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

para escrever

$$\nabla \times (\vec{r} \times \nabla) = \vec{r} \nabla^2 + \nabla(\nabla \cdot \vec{r}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{r}) - \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla$$

ou, como $\nabla \times \vec{r} = 0$, temos

$$\nabla \times (\vec{r} \times \nabla) = \vec{r} \nabla^2 - \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla \quad (25.234)$$

Considerando agora o operador ∇ em coordenadas esféricas, temos

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla = \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

ou

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla = r \hat{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{r \hat{\theta}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{r \hat{\theta}}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{r \hat{\phi}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{r \hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla &= \overbrace{\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)}^{\nabla \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)} \\ &\quad - \overbrace{\left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]}^{\nabla} \end{aligned}$$

ou

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \nabla = \nabla \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \nabla$$

e então,

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \nabla = \nabla \left(-1 + r \frac{\partial}{\partial r}\right) \quad (25.235)$$

Voltando à equação 25.234, obtemos

$$\nabla \times (\vec{r} \times \nabla) = \vec{r} \nabla^2 + \nabla \left(1 - r \frac{\partial}{\partial r}\right) \quad (25.236)$$

e, retornando à equação 25.233, ficamos com

$$i \nabla \times \vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \nabla^2 + \nabla \left(1 - r \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

que é a equação 25.232, agora demonstrada. □

Consideremos agora a expressão 25.153a,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) = f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Na zona de radiação, podemos usar a forma assintótica 25.231 para $\mathfrak{h}_\ell^1(jr)$, de modo que

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e = (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \quad (25.237)$$

Consideremos agora a equação 25.153b,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$$

Utilizando a expressão 25.237, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e = \frac{iZ_0}{k} \nabla \times \left[(-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^e = \frac{(-i)^\ell Z_0}{k} \nabla \times \left[\frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right]$$

que fica, usando a identidade 1.58f,

$$\vec{\xi}_{\ell,m}^e = \frac{(-i)^\ell Z_0}{k} \left\{ \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{kr} \right] \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} + \frac{e^{ikr}}{kr} \nabla \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right\}$$

Agora, lembrando que estamos na zona de radiação, onde apenas a menor potência de $\frac{1}{r}$ sobrevive, utilizamos a equação 25.75,

$$\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \simeq ik \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

e obtemos

$$\vec{\xi}_{\ell,m}^e = \frac{(-i)^\ell Z_0}{k} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ i \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} + \frac{1}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right\}$$

Empregando agora a identidade 25.232, achamos

$$\vec{\xi}_{\ell,m}^e = i \frac{(-i)^\ell Z_0}{k} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} - \frac{1}{k} \left[\vec{r} \nabla^2 + \nabla \left(1 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] Y_{\ell,m} \right\} \quad (25.238)$$

Agora, lembramos que $Y_{\ell,m}$ não é função de r , de modo que a última derivada no lado direito acima se anula. Além disso, usando a expressão H.16, temos

$$\nabla^2 Y_{\ell,m} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r Y_{\ell,m}) - \frac{\mathcal{L}^2 Y_{\ell,m}}{r^2}$$

Mas, de H.8, temos

$$\mathcal{L}^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}$$

e então, como a primeira derivada do lado direito se anula, temos

$$\nabla^2 Y_{\ell,m} = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_{\ell,m} \quad (25.239)$$

O termo que falta considerar é

$$\nabla Y_{\ell,m} = \left[\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_{\ell,m}$$

ou

$$\nabla Y_{\ell,m} = \frac{1}{r} \left[\hat{\theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right] \quad (25.240)$$

Utilizando as equações 25.239 e 25.240 em 25.238, ficamos com

$$\vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^e = -\frac{(-i)^{\ell+1} \mathcal{Z}_0 e^{ikr}}{k} \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} - \frac{1}{k} \left[-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_{\ell,m} \vec{r} + \frac{1}{r} \left[\hat{\theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right] \right] \right\}$$

ou

$$\vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^e = -\frac{(-i)^{\ell+1} \mathcal{Z}_0 e^{ikr}}{k} \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} - \frac{1}{kr} \left[-\ell(\ell+1) Y_{\ell,m} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right] \right\}$$

Note que o termo entre colchetes é uma função angular que não depende de r , e ele está multiplicado por $\frac{1}{kr}$, de modo que esse termo, em comparação com o outro, pode ser desprezado na zona de radiação, restando então,

$$\vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^e = -(-i)^{\ell+1} \mathcal{Z}_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \quad (25.241)$$

ou, utilizando a expressão 25.237, achamos

$$\vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^e = -\mathcal{Z}_0 \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e \quad (25.242)$$

Vamos usar agora as equivalências 25.230, para obter

$$-\mathcal{Z}_0 \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = -\mathcal{Z}_0 \hat{\mathbf{r}} \times \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^M$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^M \quad (25.243)$$

Empregando as equivalências 25.230 na equação 25.237, achamos

$$\frac{1}{Z_0} \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M = (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M = (-i)^{\ell+1} Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \quad (25.244)$$

de modo que a expressão 25.243 torna-se

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{r}} \times \left[(-i)^{\ell+1} Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \quad (25.245)$$

Utilizando essa expressão e também a equação 25.237, a equação 25.227 pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell,m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell,m} \frac{(-i)^{\ell+1}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right\} \quad (25.246)$$

Agora usamos as equações 25.241 e 25.244 em 25.226, e obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= \sum_{\ell,m} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \\ &\times \left\{ -\check{C}_{\ell,m}^e (-i)^{\ell+1} Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M (-i)^{\ell+1} Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = -Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell,m} \frac{(-i)^{\ell+1}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} - \check{C}_{\ell,m}^M \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \right\} \quad (25.247)$$

Agora, vamos calcular o produto $\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}$, usando a expressão 25.246,

$$\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell, m} \frac{(-i)^{\ell+1}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m} + \check{C}_{\ell, m}^M \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}) \right\} \quad (25.248)$$

Usando a propriedade 1.19a para duplos produtos vetoriais,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

obtemos, para o fator $\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m})$, o valor

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}) \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}$$

Lembrando que $\vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}$ não tem componente radial, achamos

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}) = -\vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}$$

Retornando à expressão 25.248, obtemos

$$\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell, m} \frac{(-i)^{\ell+1}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m} - \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m} \right\}$$

e, comparando com a expressão 25.247, vemos que podemos escrever

$$\vec{\mathcal{E}} = -Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}} \quad (25.249)$$

Assim, por meio de 25.249, podemos estabelecer $\vec{\mathcal{E}}$ em termos de $\vec{\mathcal{H}}$. Note que tanto $\vec{\mathcal{H}}$ quanto $\vec{\mathcal{E}}$ são ortogonais a $\vec{r}$, e também entre si, na zona de radiação. Lembrando da definição 25.128,

$$\vec{\mathcal{L}}_{\ell, m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

podemos reescrever 25.246 na forma

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{L}}_{\ell, m} + \check{C}_{\ell, m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{L}}_{\ell, m} \right\} \quad (25.250)$$

Por fim, relembrando a dependência temporal descrita pela função $e^{-i\omega t}$, achamos, para a zona de radiação, e usando 25.250,

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{kr} \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} + \check{C}_{\ell, m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \right\} \quad (25.251)$$

sendo que, de 25.249, temos também

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) \quad (25.252)$$

Podemos agora determinar algumas grandezas importantes. Primeiro, vamos lembrar que a potência média emitida, por unidade de ângulo sólido, é dada por 25.90,

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

Vamos inicialmente calcular

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* = -(Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{H}}^*$$

onde usamos a expressão 25.252. Usando agora a identidade 1.19b, temos

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* = -Z_0 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{H}}^*) \vec{\mathcal{H}} + Z_0 \hat{\mathbf{r}} (\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)$$

ou, como $\vec{r}$ e $\vec{\mathcal{H}}$ são ortogonais,

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* = Z_0 \hat{\mathbf{r}} |\vec{\mathcal{H}}|^2 \quad (25.253)$$

de modo que

$$r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* = Z_0 r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} |\vec{\mathcal{H}}|^2$$

ou

$$r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* = Z_0 r^2 |\vec{\mathcal{H}}|^2 \quad (25.254)$$

Com o uso de 25.254, a equação 25.90 torna-se

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re[Z_0 r^2 |\vec{\mathcal{H}}|^2]$$

ou

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2} r^2 |\check{\mathcal{H}}|^2 \quad (25.255)$$

Considerando o complexo conjugado da equação 25.251, temos

$$\check{\mathcal{H}}^*(\vec{r}, t) = \frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{kr} \sum_{\ell, m} i^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^{e*} \check{\mathbf{J}}_{\ell, m}^* + \check{C}_{\ell, m}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell, m}^* \right\} \quad (25.256)$$

Multiplicando as equações 25.251 e 25.256, achamos

$$\begin{aligned} |\check{\mathcal{H}}|^2 &= \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{kr} \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \check{\mathbf{J}}_{\ell, m} + \check{C}_{\ell, m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell, m} \right\} \\ &\quad \cdot \frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{kr} \sum_{\ell, m} i^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^{e*} \check{\mathbf{J}}_{\ell, m}^* + \check{C}_{\ell, m}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell, m}^* \right\} \end{aligned} \quad (25.257)$$

ou

$$|\check{\mathcal{H}}|^2 = \frac{1}{k^2 r^2} \left| \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \check{\mathbf{J}}_{\ell, m} + \check{C}_{\ell, m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell, m} \right\} \right|^2 \quad (25.258)$$

de modo que 25.255 torna-se

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \left| \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \check{\mathbf{J}}_{\ell, m} + \check{C}_{\ell, m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell, m} \right\} \right|^2 \quad (25.259)$$

Vejamos agora alguns casos particulares importantes com relação a essa expressão.

25.6.1 Distribuição Angular da Potência Irradiada por um Multipolo Puro

O caso mais simples que pode ocorrer é o de um sistema emissor de radiação descrito por um multipolo puro, isto é, com um único valor de (ℓ, m) . Nesse caso, a potência irradiada por unidade de ângulo sólido para um multipolo puro dada por 25.259 torna-se

$$\frac{d\langle P \rangle_{\ell, m}}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} |\check{C}_{\ell, m}|^2 |\check{\mathbf{J}}_{\ell, m}|^2 \quad (25.260)$$

onde $\check{C}_{\ell,m}$ pode ser tanto referente a um multipolo puro elétrico quanto magnético.

Para ver isso, consideremos inicialmente, na expressão 25.257, que temos um multipolo elétrico puro, de modo que $\check{C}_{\ell,m}^M = 0, \forall \ell, m$. Nesse caso, temos

$$|\mathcal{H}|^2 = \frac{1}{k^2 r^2} (-i)^{\ell+1} \check{C}_{\ell,m}^e \mathfrak{J}_{\ell,m} \cdot [i^{\ell+1} \check{C}_{\ell,m}^{e*} \mathfrak{J}_{\ell,m}^*]$$

ou

$$|\mathcal{H}|^2 = \frac{1}{k^2 r^2} |\check{C}_{\ell,m}^e|^2 |\mathfrak{J}_{\ell,m}|$$

Utilizando esta equação na expressão 25.255, obtemos

$$\frac{d\langle P \rangle_{\ell,m}}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} |\check{C}_{\ell,m}^e|^2 |\mathfrak{J}_{\ell,m}| \quad (25.261)$$

que corresponde à equação 25.260. Se, por outro lado, o multipolo puro for magnético, temos $\check{C}_{\ell,m}^e = 0, \forall \ell, m$, e a expressão 25.257 fica

$$|\mathcal{H}|^2 = \frac{1}{k^2 r^2} (-i)^{\ell+1} \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \mathfrak{J}_{\ell,m} \cdot [i^{\ell+1} \check{C}_{\ell,m}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \mathfrak{J}_{\ell,m}^*]$$

ou

$$|\mathcal{H}|^2 = \frac{1}{k^2 r^2} |\check{C}_{\ell,m}^M|^2 (\hat{\mathbf{r}} \times \mathfrak{J}_{\ell,m}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathfrak{J}_{\ell,m}^*) \quad (25.262)$$

Podemos reescrever esta expressão considerando a propriedade 1.20, que é

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Então, temos

$$(\hat{\mathbf{r}} \times \mathfrak{J}_{\ell,m}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathfrak{J}_{\ell,m}^*) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathfrak{J}_{\ell,m} \cdot \mathfrak{J}_{\ell,m}^*) - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathfrak{J}_{\ell,m}^*)(\mathfrak{J}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{r}})$$

ou, como $\vec{r}$ e $\mathfrak{J}_{\ell,m}$ são ortogonais,

$$(\hat{\mathbf{r}} \times \mathfrak{J}_{\ell,m}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathfrak{J}_{\ell,m}^*) = |\mathfrak{J}_{\ell,m}|^2$$

Retornando à equação 25.262, obtemos

$$|\check{\mathfrak{J}}|^2 = \frac{1}{k^2 r^2} |\check{C}_{\ell,m}^M|^2 |\mathfrak{J}_{\ell,m}|^2 \quad (25.263)$$

e, fazendo uso de 25.255,

$$\frac{d\langle P \rangle_{\ell,m}}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} |\check{C}_{\ell,m}^M|^2 |\mathfrak{J}_{\ell,m}| \quad (25.264)$$

que também corresponde à equação 25.260.

Com o uso da definição 25.128 para $\check{\mathfrak{J}}_{\ell,m}$ e também das expressões H.13 e H.14, é possível obter uma expressão explícita para $\frac{d\langle P \rangle_{\ell,m}}{d\Omega}$ em termos dos harmônicos esféricos, o que é feito no exercício 25.6. A potência média total irradiada é obtida de

$$\langle P(t) \rangle_{\ell,m} = \oint_{\Omega} \frac{d\langle P(t) \rangle_{\ell,m}}{d\Omega} d\Omega$$

ou, utilizando 25.260,

$$\langle P(t) \rangle_{\ell,m} = \oint_{\Omega} \frac{Z_0}{2k^2} |\check{C}_{\ell,m}|^2 |\mathfrak{J}_{\ell,m}| d\Omega \quad (25.265)$$

Considerando a condição de ortogonalidade 25.129,

$$\int \check{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \check{\mathfrak{J}}_{\ell,m} d\Omega = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

vemos que

$$\int |\mathfrak{J}_{\ell,m}|^2 d\Omega = 1$$

e a expressão 25.265 torna-se

$$\langle P(t) \rangle_{\ell,m} = \frac{Z_0}{2k^2} |\check{C}_{\ell,m}|^2 \quad (25.266)$$

Vejamos agora o próximo caso importante.

25.6.2 Distribuição Angular da Potência Irradiada por Multipolos com Mesmo ℓ

O próximo passo consiste em considerar multipolos para um dado valor de ℓ , com m variando de $-\ell$ até ℓ . Nesse caso, a expressão 25.259 torna-se

$$\frac{d\langle P(t) \rangle_\ell}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \left| (-i)^{\ell+1} \sum_m \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} \right\} \right|^2$$

ou

$$\frac{d\langle P(t) \rangle_\ell}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \left| \sum_m \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} \right\} \right|^2$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P(t) \rangle_\ell}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_m \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} \right\} \\ \cdot \sum_{m'} \left\{ \check{C}_{\ell,m'}^{e*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* \right\} \end{aligned}$$

que fica

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P(t) \rangle_\ell}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{m,m'} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{e*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{e*} (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{M*} (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) \right\} \end{aligned}$$

Usando a identidade 1.20, temos

$$(\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*)(\vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{r}})$$

ou, como $\vec{\mathbf{r}}$ e $\vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}$ são ortogonais,

$$(\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) = \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* \quad (25.267)$$

de modo que achamos

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P(t) \rangle_\ell}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{m, m'} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^*) \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell, m'}^{e*} (\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m}) \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* \right\} \quad (25.268) \end{aligned}$$

A potência total média irradiada pelo conjunto de multipolos de mesmo índice ℓ é dada por

$$\langle P \rangle_\ell = \oint_{\Omega} \frac{d\langle P(t) \rangle_\ell}{d\Omega} d\Omega$$

ou, usando a equação 25.268,

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_\ell = \frac{Z_0}{2k^2} \oint_{\Omega} \sum_{m, m'} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^*) \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell, m'}^{e*} (\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m}) \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* \right\} d\Omega \end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_\ell = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{m, m'} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \oint_{\Omega} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* d\Omega \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \oint_{\Omega} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^*) d\Omega + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \oint_{\Omega} (\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m}) \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* d\Omega \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \oint_{\Omega} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* d\Omega \right\} \end{aligned}$$

Usando a condição de ortogonalidade 25.129, obtemos

$$\begin{aligned} \langle P \rangle_\ell = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{m, m'} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \delta_{m, m'} + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \oint_{\Omega} \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^*) d\Omega \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \oint_{\Omega} (\hat{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m}) \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\ell, m'}^* d\Omega + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \delta_{m, m'} \right\} \quad (25.269) \end{aligned}$$

Para simplificar ainda mais esta expressão, vamos calcular inicialmente

$$\vec{r} \times \nabla = \vec{r} \times \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

ou

$$\vec{r} \times \nabla = \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Lembrando a equação H.10,

$$\vec{\mathcal{L}} = -i(\vec{r} \times \nabla)$$

temos

$$\vec{\mathcal{L}} = -i \left[\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (25.270)$$

Com $\vec{\mathcal{L}}$ dado por 25.270, temos, utilizando a expressão 25.128,

$$\vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

ou

$$\vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right] \quad (25.271)$$

Agora, consideramos o produto vetorial entre $\vec{r}$ e a equação 25.271, ou seja,

$$\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\vec{r} \times \hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} - \frac{\vec{r} \times \hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right]$$

ou

$$\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = \frac{ir}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\hat{\theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right] \quad (25.272)$$

O complexo conjugado de 25.271 é

$$\vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}^*(\theta, \phi) = \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}^*}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}^*}{\partial \phi} \right] \quad (25.273)$$

e, para um par (ℓ', m') , temos

$$\vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^*(\theta, \phi) = \frac{i}{\sqrt{\ell'(\ell' + 1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \phi} \right] \quad (25.274)$$

Vamos calcular agora o produto escalar entre as equações 25.272 e 25.274, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^*(\theta, \phi) \cdot [\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}(\theta, \phi)] &= \frac{i}{\sqrt{\ell'(\ell' + 1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \phi} \right] \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{ir}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \left[\hat{\theta} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \phi} \right] \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^*(\theta, \phi) \cdot [\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}(\theta, \phi)] &= \\ &= - \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell + 1)} \sqrt{\ell'(\ell' + 1)}} \frac{r}{\sin \theta} \left[\frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \phi} - \frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \theta} \right] \quad (25.275) \end{aligned}$$

Se integrarmos a expressão 25.275 no ângulo sólido, teremos

$$\begin{aligned} \int \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^*(\theta, \phi) \cdot [\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}(\theta, \phi)] d\Omega &= \\ &= - \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell + 1)} \sqrt{\ell'(\ell' + 1)}} \int \frac{r}{\sin \theta} \left[\frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \phi} - \frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \theta} \right] d\Omega \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \int \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) d\Omega &= - \frac{r}{\sqrt{\ell(\ell + 1)} \sqrt{\ell'(\ell' + 1)}} \\ &\quad \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \phi} - \frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \theta} \right] \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

Efetuada a integral em ϕ , temos

$$\begin{aligned} \int \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) d\Omega &= - \frac{r}{\sqrt{\ell(\ell + 1)} \sqrt{\ell'(\ell' + 1)}} \\ &\quad \times \int_0^\pi \left\{ \frac{\partial Y_{\ell', m'}^*}{\partial \theta} [Y_{\ell, m}]_0^{2\pi} - \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \theta} [Y_{\ell', m'}^*]_0^{2\pi} \right\} d\theta \quad (25.276) \end{aligned}$$

Os harmônicos esféricos são dados pela equação 6.78, que é

$$Y_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

Sendo assim, no ângulo ϕ eles são periódicos, de período 2π , de modo que $Y_{\ell,m}(\theta, 0) = Y_{\ell,m}(\theta, 2\pi)$, o que faz com que a integral na equação 25.276 se anule, ou seja,

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}) d\Omega = 0 \quad (25.277)$$

Tomando o complexo conjugado dessa equação, temos

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'} \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}^*) d\Omega = 0 \quad (25.278)$$

Considerando as equações 25.277 e 25.278, a expressão 25.269 torna-se

$$\langle P \rangle_\ell = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{m,m'} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{e*} \delta_{m,m'} + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \delta_{m,m'} \right\}$$

ou, efetuando a soma no índice m' ,

$$\langle P \rangle_\ell = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_m \left\{ |\check{C}_{\ell,m}^e|^2 + |\check{C}_{\ell,m}^M|^2 \right\} \quad (25.279)$$

que é a extensão da equação 25.266 para o caso de multipolos que têm o mesmo índice ℓ . Note que a potência irradiada é uma soma simples das potências irradiadas por cada multipolo, que se comportam de forma independente uns dos outros. Vejamos agora o último caso relevante.

25.6.3 Distribuição Angular da Potência Irradiada por Multipolos com ℓ Quaisquer

Após termos estudado os dois casos particulares relevantes com respeito à distribuição angular da potência média irradiada e a potência média irradiada em si, podemos, seguindo os mesmos desenvolvimentos, obter as expressões equivalentes para o caso geral de uma combinação de multipolos com (ℓ, m) quaisquer. Nesse caso, a expressão 25.259 converte-se em

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{m, m'} \left\{ (-i)^{\ell+1} i^{\ell'+1} \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \right. \\ + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^*) + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell', m'}^{e*} (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m}) \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{m, m'} \left\{ i^{\ell'-\ell} \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \right. \\ + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^*) + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell', m'}^{e*} (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m}) \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \right\} \quad (25.280) \end{aligned}$$

enquanto a potência média total irradiada fica sendo

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{\ell, m} \left\{ |\check{C}_{\ell, m}^e|^2 + |\check{C}_{\ell, m}^M|^2 \right\} \quad (25.281)$$

mostrando, novamente, que os resultados envolvem somas simples, ou incoerentes, dos termos relacionados aos multipolos puros. Vejamos agora alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 25.3. *Considere a antena definida no exemplo 25.1, alimentada pelo centro e vista na figura 25.5. Fazendo as considerações pertinentes, vamos obter as funções $\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega}$ e $\langle P \rangle$ para antenas de meia-onda e onda completa.*

Conforme discutimos no exemplo 25.1, e de acordo com as tabelas 25.1 e 25.2, apenas termos com ℓ ímpar e $m = 0$ são relevantes para esse problema, em particular os primeiros termos. Além disso, os coeficientes de multipolo magnético são todos nulos, de modo que apenas importam os multipolos elétricos. Temos dois casos a considerar, a saber, antenas de meia-onda ($kL = \pi$) e onda completa ($kL = 2\pi$). Iniciando com as antenas de meia-onda, da tabela 25.1 vemos que os termos relevantes são aqueles com $\ell = 1$ (dipolo) e $\ell = 3$ (octopolo). Nesse caso, lembrando que $\ell = 1, 3$, $\ell' = 1, 3$ e $m = m' = 0$, a expressão geral 25.280 simplifica-se para

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \left\{ \check{C}_{1,0}^e \check{C}_{1,0}^{e*} \vec{\mathfrak{J}}_{1,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,0}^* - \check{C}_{1,0}^e \check{C}_{3,0}^{e*} \vec{\mathfrak{J}}_{1,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{3,0}^* \right. \\ \left. - \check{C}_{3,0}^e \check{C}_{1,0}^{e*} \vec{\mathfrak{J}}_{3,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,0}^* + \check{C}_{3,0}^e \check{C}_{3,0}^{e*} \vec{\mathfrak{J}}_{3,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{3,0}^* \right\}$$

ou

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \left\{ |\check{C}_{1,0}^e|^2 |\mathfrak{J}_{1,0}|^2 - \check{C}_{1,0}^e \check{C}_{3,0}^{e*} \vec{\mathfrak{J}}_{1,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{3,0}^* \right. \\ \left. - \check{C}_{3,0}^e \check{C}_{1,0}^{e*} \vec{\mathfrak{J}}_{3,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,0}^* + |\check{C}_{3,0}^e|^2 |\mathfrak{J}_{3,0}|^2 \right\} \quad (25.282)$$

Utilizando a expressão 25.271, temos

$$\vec{\mathfrak{J}}_{1,0} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{1,0}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{1,0}}{\partial \phi} \right] \quad (25.283)$$

e

$$\vec{\mathfrak{J}}_{3,0} = -\frac{i}{2\sqrt{3}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{3,0}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{3,0}}{\partial \phi} \right] \quad (25.284)$$

As expressões explícitas para os harmônicos esféricos necessários são (veja, por exemplo, a tabela 6.4 do volume I)

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (25.285a)$$

$$Y_{3,0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{4\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \quad (25.285b)$$

Então, temos, de 25.283,

$$\vec{\mathfrak{J}}_{1,0} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta \hat{\phi} \quad (25.286)$$

de modo que

$$\vec{\mathfrak{J}}_{1,0}^* = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta \hat{\phi} \quad (25.287)$$

Além disso, de 25.284, e usando 25.285b, achamos

$$\vec{\mathcal{J}}_{3,0} = \frac{3i}{8} \sqrt{\frac{7}{3\pi}} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \hat{\phi} \quad (25.288)$$

e

$$\vec{\mathcal{J}}_{3,0}^* = -\frac{3i}{8} \sqrt{\frac{7}{3\pi}} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \hat{\phi} \quad (25.289)$$

Usando 25.286 e 25.287, obtemos

$$|\vec{\mathcal{J}}_{1,0}|^2 = \vec{\mathcal{J}}_{1,0} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{1,0}^* = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \quad (25.290)$$

De 25.288 e 25.289, extraímos

$$|\vec{\mathcal{J}}_{3,0}|^2 = \vec{\mathcal{J}}_{3,0} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{3,0}^* = \frac{21}{64\pi} (5 \cos^2 \theta - 1)^2 \sin^2 \theta \quad (25.291)$$

Por fim, de 25.286 e 25.289, achamos

$$\vec{\mathcal{J}}_{1,0} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{3,0}^* = \frac{3}{16\pi} \sqrt{\frac{7}{2}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \quad (25.292)$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{J}}_{1,0}^* \cdot \vec{\mathcal{J}}_{3,0} = \overline{\vec{\mathcal{J}}_{1,0} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{3,0}^*} = \frac{3}{16\pi} \sqrt{\frac{7}{2}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \quad (25.293)$$

Além disso, das tabelas 25.1 e 25.2 vemos que os coeficientes são reais, de modo que $\check{C}_{1,0}^{e*} = \check{C}_{1,0}^e$ e $\check{C}_{3,0}^{e*} = \check{C}_{3,0}^e$. Com o uso das equações 25.290–25.293, a expressão 25.282 torna-se

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = & \frac{Z_0 (\check{C}_{1,0}^e)^2}{2k^2} \left\{ \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta - \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \frac{3}{16\pi} \sqrt{\frac{7}{2}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \right. \\ & \left. - \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \frac{3}{16\pi} \sqrt{\frac{7}{2}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) + \left(\frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 \frac{21}{64\pi} (5 \cos^2 \theta - 1)^2 \sin^2 \theta \right\} \end{aligned}$$

ou, lembrando, da tabela 25.1, que $\check{C}_{1,0}^e = \frac{I_0}{L} \sqrt{\frac{6}{\pi}}$ e usando também a equação 25.206 para uma antena de meia-onda, temos, para uma antena de meia-onda alimentada pelo centro, a distribuição angular de potência média irradiada como sendo

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{9Z_0 J_0^2 \sin^2 \theta}{8\pi^4} \times \left\{ 1 - \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \sqrt{\frac{7}{2}} (5 \cos^2 \theta - 1) + \frac{7}{8} \left(\frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 (5 \cos^2 \theta - 1)^2 \right\} \quad (25.294)$$

e devemos ter em mente que aproximamos a situação considerando apenas dois termos na expansão em multipolos para o problema, de modo que essa é uma expressão aproximada. Para este caso, a potência média total irradiada, dada pela equação 25.281, considerando os dois primeiros termos como aproximação, torna-se

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0}{2k^2} \left\{ (\check{C}_{1,0}^e)^2 + (\check{C}_{3,0}^e)^2 \right\}$$

ou, usando os valores numéricos dados na tabela 25.1, temos

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0}{2k^2} \left\{ \left(\frac{J_0}{L} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \right)^2 + \left[-\frac{J_0}{L} \frac{2(\pi^2 - 10)}{\pi^2} \sqrt{\frac{21}{\pi}} \right]^2 \right\}$$

ou ainda,

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0 J_0^2}{\pi^7} \left[3\pi^4 + 42(\pi^2 - 10)^2 \right]$$

e, finalmente,

$$\langle P \rangle = Z_0 \frac{45\pi^4 - 840\pi^2 + 4200}{\pi^7} J_0^2 \quad (25.295)$$

que é válida para uma antena de meia-onda alimentada pelo centro, considerando-se os dois primeiros termos ($\ell = 1$ e $\ell = 3$) da expansão em multipolos para o problema. É interessante comparar esse valor com o correspondente à emissão de um dipolo elétrico puro ($\ell = 1, m = 0$), dado por (usando 25.281)

$$\langle P \rangle_{1,0} = \frac{Z_0}{2k^2} (\check{C}_{1,0}^e)^2$$

ou

$$\langle P \rangle_{1,0} = \frac{Z_0}{2k^2} \frac{J_0^2}{L^2} \frac{6}{\pi}$$

ou então,

$$\langle P \rangle_{1,0} = Z_0 \frac{3}{\pi^3} J_0^2 \quad (25.296)$$

Portanto, temos, dividindo a equação 25.295 pela 25.296,

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{1,0}} = \frac{Z_0 \frac{45\pi^4 - 840\pi^2 + 4200}{\pi^7} J_0^2}{Z_0 \frac{3}{\pi^3} J_0^2}$$

ou

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{1,0}} = 5 \frac{3\pi^4 - 56\pi^2 + 280}{\pi^4}$$

ou, aproximadamente,

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{1,0}} \sim 1,00244 \quad (25.297)$$

de modo que a potência total média emitida pela antena de meia-onda alimentada pelo centro é um pouco maior que a de um dipolo elétrico puro, pelo fator acima. Vejamos agora a outra antena, a antena de onda completa, em que, pela equação 25.208, temos $kL = 2\pi$. Nesse caso, observando-se a tabela 25.2, vemos que, como os coeficientes caem mais lentamente, vamos precisar de pelo menos três termos da expansão de multipolos, com $\ell = 1$, $\ell = 3$ e $\ell = 5$, para obter a distribuição angular de potência média irradiada. A expressão geral 25.280 fica, então,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0}{2k^2} \left\{ \check{C}_{1,0}^e \check{C}_{1,0}^{e*} \vec{J}_{1,0} \cdot \vec{J}_{1,0}^* - \check{C}_{1,0}^e \check{C}_{3,0}^{e*} \vec{J}_{1,0} \cdot \vec{J}_{3,0}^* + \check{C}_{1,0}^e \check{C}_{5,0}^{e*} \vec{J}_{1,0} \cdot \vec{J}_{5,0}^* \right. \\ \left. - \check{C}_{3,0}^e \check{C}_{1,0}^{e*} \vec{J}_{3,0} \cdot \vec{J}_{1,0}^* + \check{C}_{3,0}^e \check{C}_{3,0}^{e*} \vec{J}_{3,0} \cdot \vec{J}_{3,0}^* - \check{C}_{3,0}^e \check{C}_{5,0}^{e*} \vec{J}_{3,0} \cdot \vec{J}_{5,0}^* \right. \\ \left. + \check{C}_{5,0}^e \check{C}_{1,0}^{e*} \vec{J}_{5,0} \cdot \vec{J}_{1,0}^* - \check{C}_{5,0}^e \check{C}_{3,0}^{e*} \vec{J}_{5,0} \cdot \vec{J}_{3,0}^* + \check{C}_{5,0}^e \check{C}_{5,0}^{e*} \vec{J}_{5,0} \cdot \vec{J}_{5,0}^* \right\} \end{aligned}$$

ou, como todos os coeficientes são reais,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0(\check{C}_{1,0}^e)^2}{2k^2} \left\{ |\mathfrak{J}_{1,0}|^2 - \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \mathfrak{J}_{1,0} \cdot \mathfrak{J}_{3,0}^* + \frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \mathfrak{J}_{1,0} \cdot \mathfrak{J}_{5,0}^* \right. \\ \left. - \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \mathfrak{J}_{3,0} \cdot \mathfrak{J}_{1,0}^* + \left(\frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 |\mathfrak{J}_{3,0}|^2 - \frac{\check{C}_{3,0}^e \check{C}_{5,0}^e}{(\check{C}_{1,0}^e)^2} \mathfrak{J}_{3,0} \cdot \mathfrak{J}_{5,0}^* \right. \\ \left. + \frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \mathfrak{J}_{5,0} \cdot \mathfrak{J}_{1,0}^* - \frac{\check{C}_{5,0}^e \check{C}_{3,0}^e}{(\check{C}_{1,0}^e)^2} \mathfrak{J}_{5,0} \cdot \mathfrak{J}_{3,0}^* + \left(\frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 |\mathfrak{J}_{5,0}|^2 \right\} \quad (25.298) \end{aligned}$$

Alguns termos já calculamos anteriormente, e outros vamos calcular agora. Vamos precisar de $\mathfrak{J}_{5,0}$, o que pode ser obtido de 25.271,

$$\mathfrak{J}_{5,0} = -\frac{i}{\sqrt{30}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{5,0}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{5,0}}{\partial \phi} \right] \quad (25.299)$$

que, por sua vez, precisa de $Y_{5,0}$. Recordando a expressão 6.78, temos

$$Y_{5,0} = \sqrt{\frac{11}{4\pi}} P_{5,0}(\cos \theta) \quad (25.300)$$

Agora, sabemos que $P_{\ell,0}(x) = P_{\ell}(x)$, onde $P_{\ell}(x)$ são os polinômios de Legendre, dados nas tabelas 6.2 ou C.1. Destas tabelas, temos

$$P_5(\cos \theta) = \frac{1}{8} (63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta)$$

de modo que 25.300 fica

$$Y_{5,0} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{11}{4\pi}} (63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta) \quad (25.301)$$

Utilizando 25.301 em 25.299, temos, já efetuando as devidas simplificações,

$$\mathfrak{J}_{5,0} = \frac{15i}{16} \sqrt{\frac{11}{30\pi}} \sin \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \hat{\phi} \quad (25.302)$$

e também, considerando seu complexo conjugado,

$$\mathfrak{J}_{5,0}^* = -\frac{15i}{16} \sqrt{\frac{11}{30\pi}} \sin \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \hat{\phi} \quad (25.303)$$

Agora, precisamos de

$$\vec{\mathfrak{J}}_{1,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0}^* = \frac{15}{64\pi} \sqrt{\frac{33}{15}} \sin^2 \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \quad (25.304)$$

onde usamos 25.286 e 25.303, e também de

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{J}}_{3,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0}^* = \\ \frac{15}{128\pi} \sqrt{\frac{77}{10}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \end{aligned} \quad (25.305)$$

onde usamos 25.288 e 25.303, além de

$$\vec{\mathfrak{J}}_{5,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0}^* = |\mathfrak{J}_{5,0}|^2 = \frac{165}{512\pi} \sin^2 \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1)^2 \quad (25.306)$$

na qual utilizamos 25.302 e 25.303. Note que essas expressões são todas reais, de modo que

$$\vec{\mathfrak{J}}_{1,0}^* \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0} = \overline{\vec{\mathfrak{J}}_{1,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0}^*}$$

ou

$$\vec{\mathfrak{J}}_{1,0}^* \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0} = \frac{15}{64\pi} \sqrt{\frac{33}{15}} \sin^2 \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \hat{\phi} \quad (25.307)$$

e

$$\vec{\mathfrak{J}}_{3,0}^* \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0} = \overline{\vec{\mathfrak{J}}_{3,0} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0}^*}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{J}}_{3,0}^* \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{5,0} = \\ \frac{15}{128\pi} \sqrt{\frac{77}{10}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \end{aligned} \quad (25.308)$$

Utilizando as expressões 25.290–25.293, além das equações 25.304–25.308, a equação 25.298 fica

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{Z_0(\check{C}_{1,0}^e)^2}{2k^2} & \left\{ \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta - \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \frac{3}{16\pi} \sqrt{\frac{7}{2}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \right. \\
& + \frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \frac{15}{64\pi} \sqrt{\frac{33}{15}} \sin^2 \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \\
& - \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \frac{3}{16\pi} \sqrt{\frac{7}{2}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) + \left(\frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 \frac{21}{64\pi} (5 \cos^2 \theta - 1)^2 \sin^2 \theta \\
& - \frac{\check{C}_{3,0}^e \check{C}_{5,0}^e}{(\check{C}_{1,0}^e)^2} \frac{15}{128\pi} \sqrt{\frac{77}{10}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \\
& + \frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \frac{15}{64\pi} \sqrt{\frac{33}{15}} \sin^2 \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \\
& - \frac{\check{C}_{5,0}^e \check{C}_{3,0}^e}{(\check{C}_{1,0}^e)^2} \frac{15}{128\pi} \sqrt{\frac{77}{10}} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1) (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \\
& \left. + \left(\frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 \frac{165}{512\pi} \sin^2 \theta (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1)^2 \right\}
\end{aligned}$$

ou, como $\check{C}_{1,0}^e = \sqrt{6\pi} \frac{J_0}{L}$ (veja a tabela 25.2), e lembrando que $kL = 2\pi$, temos, para uma antena de onda completa alimentada pelo centro,

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{9Z_0 J_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2} & \left\{ 1 - \sqrt{\frac{7}{2}} \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} (5 \cos^2 \theta - 1) \right. \\
& + \frac{5}{4} \sqrt{\frac{33}{15}} \frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) + \frac{7}{8} \left(\frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 (5 \cos^2 \theta - 1)^2 \\
& - \frac{5}{8} \sqrt{\frac{77}{10}} \frac{\check{C}_{3,0}^e \check{C}_{5,0}^e}{(\check{C}_{1,0}^e)^2} (5 \cos^2 \theta - 1) (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \\
& \left. + \frac{55}{64} \left(\frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1)^2 \right\} \quad (25.309)
\end{aligned}$$

Além disso, a potência total irradiada, considerando-se esses três primeiros momentos de multipolo, fica sendo, de acordo com a expressão 25.281,

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0}{2k^2} \left\{ |\check{C}_{1,0}^e|^2 + |\check{C}_{3,0}^e|^2 + |\check{C}_{5,0}^e|^2 \right\}$$

ou, utilizando os valores dados na tabela 25.2,

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0}{2k^2} \left\{ \left(\frac{J_0}{L} \sqrt{6\pi} \right)^2 + \left(\frac{J_0}{L} \frac{15 - \pi^2}{3\pi} \sqrt{\frac{21}{\pi}} \right)^2 + \left(\frac{J_0}{L} \frac{\pi^4 - 105\pi^2 + 945}{15\pi^3} \sqrt{\frac{330}{\pi}} \right)^2 \right\}$$

ou ainda,

$$\langle P \rangle = \frac{Z_0}{2k^2} \frac{J_0^2}{L^2} \left\{ 6\pi + \frac{7(15 - \pi^2)^2}{3\pi^3} + \frac{22(\pi^4 - 105\pi^2 + 945)^2}{15\pi^7} \right\}$$

ou, finalmente,

$$\langle P \rangle = Z_0 \frac{7(7\pi^8 - 270\pi^6 + 12905\pi^4 - 207900\pi^2 + 935550)}{40\pi^9} J_0^2 \quad (25.310)$$

que é a potência total média emitida pela antena de onda completa, alimentada pelo centro, utilizando a aproximação de que os campos são dados pelos primeiros três termos de multipolo. Novamente é interessante comparar com a potência emitida por um dipolo elétrico puro, obtida da equação 25.281, isto é,

$$\langle P \rangle_{1,0} = \frac{Z_0}{2k^2} (\check{C}_{1,0}^e)^2$$

ou

$$\langle P \rangle_{1,0} = Z_0 \frac{3}{4\pi} J_0^2 \quad (25.311)$$

Fazendo a razão entre 25.310 e 25.311, temos

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{1,0}} = \frac{Z_0 \frac{7(7\pi^8 - 270\pi^6 + 12905\pi^4 - 207900\pi^2 + 935550)}{40\pi^9} J_0^2}{Z_0 \frac{3}{4\pi} J_0^2}$$

ou

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{1,0}} = \frac{7}{3} \frac{7\pi^8 - 270\pi^6 + 12905\pi^4 - 207900\pi^2 + 935550}{10\pi^8}$$

o que dá, aproximadamente, para uma antena de onda completa alimentada pelo centro,

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle P \rangle_{1,0}} \sim 1,10604 \quad (25.312)$$

Comparando esse valor com a razão dada pela equação 25.297 determinada para uma antena de meia-onda, vemos que, à medida que o tamanho da antena torna-se maior em comparação com o comprimento de onda emitido (meio comprimento de onda na antena de meia-onda, e um comprimento de onda na antena de onda completa), a potência emitida também se torna progressivamente maior em relação à potência emitida por um dipolo elétrico puro, que seria a aproximação mais simplista que poderia ser feita para a antena. Sendo assim, quando L aumenta em relação a λ , é preciso considerar mais termos na expansão de multipolos, para descrever qualitativamente e quantitativamente, pelo menos de forma aproximada, mas razoável, o comportamento das antenas. Foi o que fizemos quando passamos da antena de meia-onda para a de onda completa, pois consideramos um termo a mais na expansão para a antena de onda completa. Se a relação entre L e λ for ainda maior, a complexidade matemática pode aumentar consideravelmente, requerendo eventualmente uma resolução numérica das equações. Além disso, outros efeitos podem complicar ainda mais a questão, como a existência de condutores, em particular a própria superfície da Terra, na região próxima à antena, o que acrescenta novas condições de contorno ao problema. Vejamos agora outro problema interessante.

Exemplo 25.4. *O problema de uma antena linear de comprimento L , alimentada pelo centro, como mostrada na figura 25.5 e discutida nos exemplos 25.1 e 25.3 em termos de uma expansão em multipolos, tem a particularidade de poder ser resolvido exatamente se considerarmos a densidade de corrente como sendo dada pela equação 25.191,*

$$\vec{J} = \frac{J(r)}{2\pi r^2} [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] \hat{r}, \quad r \leq \frac{L}{2}$$

onde, pela expressão 25.202,

$$J(z) = J_0 \operatorname{sen} \left(\frac{kL}{2} - k|z| \right)$$

de modo que

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) = \frac{J_0}{2\pi r^2} \sin\left(\frac{kL}{2} - k|z|\right) [\delta(\cos\theta - 1) - \delta(\cos\theta + 1)] \hat{r}, \quad r \leq \frac{L}{2} \quad (25.313)$$

Obtenha essa solução e compare-a com os resultados obtidos no exemplo 25.3 para antenas de meia-onda e onda completa.

Primeiramente, vamos reescrever a equação 25.313 no sistema de coordenadas retangulares, de modo que temos

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) = J_0 \sin\left(\frac{kL}{2} - k|z|\right) \delta(x) \delta(y) \hat{k}, \quad z \leq \frac{L}{2} \quad (25.314)$$

Agora, lembramos que, pela expressão 25.36,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}') e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} dV$$

podemos determinar o potencial vetorial magnético $\vec{\mathcal{A}}$ se conhecermos a densidade de corrente $\vec{\mathcal{J}}$, que é justamente o caso. Então, substituindo a equação 25.314, ficamos com

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_V J_0 \sin\left(\frac{kL}{2} - k|z'|\right) \delta(x') \delta(y') \hat{k} e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} dy' dx' dz'$$

ou, como $\vec{r}' = z' \hat{k}$, e como o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ vale θ , achamos, já efetuando as integrais em x e y ,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{k} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{kL}{2} - k|z'|\right) e^{-ikz' \cos\theta} dz'$$

Como

$$|z| = \begin{cases} z & z \geq 0 \\ -z & z < 0 \end{cases}$$

vamos separar a integral acima em duas integrais, de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = & \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{k} \int_{-\frac{L}{2}}^0 \sin\left(\frac{kL}{2} + kz'\right) e^{-ikz' \cos\theta} dz' \\ & + \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{k} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{kL}{2} - kz'\right) e^{-ikz' \cos\theta} dz' \quad (25.315) \end{aligned}$$

Agora, lembramos que

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Usando essa propriedade na expressão 25.315, ficamos com

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = & \frac{\mu_0 \mathcal{J}_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \int_{-\frac{L}{2}}^0 \frac{e^{k(\frac{L}{2}+z')} - e^{-k(\frac{L}{2}+z')}}{2i} e^{-ikz' \cos \theta} dz' \\ & + \frac{\mu_0 \mathcal{J}_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{e^{ik(\frac{L}{2}-z')} - e^{-ik(\frac{L}{2}-z')}}{2i} e^{-ikz' \cos \theta} dz' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = & -\frac{i\mu_0 \mathcal{J}_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \int_{-\frac{L}{2}}^0 e^{i\left(\frac{kL}{2}+kz'-kz' \cos \theta\right)} dz' \right. \\ & - \int_{-\frac{L}{2}}^0 e^{-i\left(\frac{kL}{2}+kz'-kz' \cos \theta\right)} dz' + \int_0^{\frac{L}{2}} e^{i\left(\frac{kL}{2}-kz'-kz' \cos \theta\right)} dz' \\ & \left. - \int_0^{\frac{L}{2}} e^{-i\left(\frac{kL}{2}-kz'-kz' \cos \theta\right)} dz' \right\} \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = & -\frac{i\mu_0 \mathcal{J}_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \left\{ e^{i\frac{kL}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^0 e^{iz'k(1-\cos \theta)} dz' \right. \\ & - e^{-i\frac{kL}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^0 e^{-iz'k(1-\cos \theta)} dz' + e^{i\frac{kL}{2}} \int_0^{\frac{L}{2}} e^{-iz'k(1+\cos \theta)} dz' \\ & \left. - e^{-i\frac{kL}{2}} \int_0^{\frac{L}{2}} e^{iz'k(1+\cos \theta)} dz' \right\} \end{aligned}$$

Agora, efetuando as integrais, achamos

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0 J_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \left\{ e^{i\frac{kL}{2}} \left[\frac{e^{iz'k(1-\cos\theta)}}{ik(1-\cos\theta)} \right]_{-\frac{L}{2}}^0 - e^{-i\frac{kL}{2}} \left[\frac{e^{-iz'k(1-\cos\theta)}}{-ik(1-\cos\theta)} \right]_{-\frac{L}{2}}^0 + e^{i\frac{kL}{2}} \left[\frac{e^{-iz'k(1+\cos\theta)}}{-ik(1+\cos\theta)} \right]_0^{\frac{L}{2}} - e^{-i\frac{kL}{2}} \left[\frac{e^{iz'k(1+\cos\theta)}}{ik(1+\cos\theta)} \right]_0^{\frac{L}{2}} \right\}$$

ou

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0 J_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \left\{ e^{i\frac{kL}{2}} \left[\frac{1}{ik(1-\cos\theta)} - \frac{e^{-ik\frac{L}{2}(1-\cos\theta)}}{ik(1-\cos\theta)} \right] - e^{-i\frac{kL}{2}} \left[-\frac{1}{ik(1-\cos\theta)} + \frac{e^{ik\frac{L}{2}(1-\cos\theta)}}{ik(1-\cos\theta)} \right] + e^{i\frac{kL}{2}} \left[-\frac{e^{-ik\frac{L}{2}(1+\cos\theta)}}{ik(1+\cos\theta)} + \frac{1}{ik(1+\cos\theta)} \right] - e^{-i\frac{kL}{2}} \left[\frac{e^{ik\frac{L}{2}(1+\cos\theta)}}{ik(1+\cos\theta)} - \frac{1}{ik(1+\cos\theta)} \right] \right\}$$

que se torna

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0 J_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{e^{i\frac{kL}{2}}}{ik(1-\cos\theta)} - \frac{e^{ik\frac{L}{2}\cos\theta}}{ik(1-\cos\theta)} + \frac{e^{-i\frac{kL}{2}}}{ik(1-\cos\theta)} - \frac{e^{-ik\frac{L}{2}\cos\theta}}{ik(1-\cos\theta)} - \frac{e^{-ik\frac{L}{2}\cos\theta}}{ik(1+\cos\theta)} + \frac{e^{i\frac{kL}{2}}}{ik(1+\cos\theta)} - \frac{e^{ik\frac{L}{2}\cos\theta}}{ik(1+\cos\theta)} + \frac{e^{-i\frac{kL}{2}}}{ik(1+\cos\theta)} \right\}$$

Reorganizando os termos, temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 J_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{e^{i\frac{kL}{2}} + e^{-i\frac{kL}{2}}}{1-\cos\theta} - \frac{e^{ik\frac{L}{2}\cos\theta} + e^{-ik\frac{L}{2}\cos\theta}}{1-\cos\theta} - \frac{e^{ik\frac{L}{2}\cos\theta} + e^{-ik\frac{L}{2}\cos\theta}}{1+\cos\theta} + \frac{e^{i\frac{kL}{2}} + e^{-i\frac{kL}{2}}}{1+\cos\theta} \right\} \quad (25.316)$$

Como

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

a expressão 25.316 torna-se

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \mathcal{J}_0}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{2 \cos \frac{kL}{2}}{1 - \cos \theta} - \frac{2 \cos(\frac{kL}{2} \cos \theta)}{1 - \cos \theta} - \frac{2 \cos(\frac{kL}{2} \cos \theta)}{1 + \cos \theta} + \frac{2 \cos \frac{kL}{2}}{1 + \cos \theta} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \mathcal{J}_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\cos \frac{kL}{2} - \cos(\frac{kL}{2} \cos \theta)}{1 - \cos \theta} - \frac{\cos(\frac{kL}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kL}{2}}{1 + \cos \theta} \right\}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mathcal{J}_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{kr} \left\{ \cos(\frac{kL}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kL}{2} \right\} \hat{\mathbf{k}} \frac{1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$$

e, finalmente,

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mathcal{J}_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\frac{\cos(\frac{kL}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \hat{\mathbf{k}} \quad (25.317)$$

Agora, para determinar $\vec{\mathcal{B}}$, precisamos calcular o rotacional de $\vec{\mathcal{A}}$, já que

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}$$

Então, usando a equação 25.317, temos

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0 \mathcal{J}_0}{2\pi} \nabla \times \left\{ \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\frac{\cos(\frac{kL}{2} \cos \theta) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \hat{\mathbf{k}} \right\} \quad (25.318)$$

O versor $\hat{\mathbf{k}}$, em coordenadas esféricas, vale, pela expressão 1.38c do volume I,

$$\hat{\mathbf{k}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (25.319)$$

Portanto, a equação 25.318 torna-se

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}_0}{2\pi} \nabla \times \left\{ \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}_0}{2\pi} \nabla \times \left\{ \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} \right. \\ \left. - \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \quad (25.320) \end{aligned}$$

Agora, precisamos usar a identidade 1.58f,

$$\nabla \times (\Phi \vec{A}) = \nabla \Phi \times \vec{A} + \Phi \nabla \times \vec{A}$$

de modo que a expressão 25.320 se desmembra em

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}_0}{2\pi} \left\{ \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{kr} \right) \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} \right\} \right. \\ + \frac{e^{ikr}}{kr} \nabla \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \cos \theta \hat{\mathbf{r}} \right\} \\ - \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{kr} \right) \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \\ \left. - \frac{e^{ikr}}{kr} \nabla \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \right\} \quad (25.321) \end{aligned}$$

Lembrando que estamos na zona de radiação, onde apenas as menores potências de $\frac{1}{r}$ precisam ser consideradas, temos a aproximação 25.75,

$$\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \simeq ik \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

de modo que a expressão 25.321 fica

$$\begin{aligned}
\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi} \left\{ i \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \cos \theta \hat{r} \right\} \right. \\
+ \frac{e^{ikr}}{kr} \nabla \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \cos \theta \hat{r} \right\} \\
- i \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\theta} \right\} \\
\left. - \frac{e^{ikr}}{kr} \nabla \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\theta} \right\} \right\} \quad (25.322)
\end{aligned}$$

Agora, façamos algumas considerações sobre os quatro termos entre chaves do lado direito que envolvem produtos vetoriais ou rotacionais. O primeiro fator se anula, pois ele é o produto vetorial de dois vetores paralelos. Considerando os dois termos que envolvem rotacional, notamos que eles são dados pelo rotacional de uma função que não depende de r . Além disso, lembrando o rotacional em coordenadas esféricas dado por B.19,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{A} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\
+ \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\
+ \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]
\end{aligned}$$

vemos que o rotacional introduz um fator $\frac{1}{r}$ ao segundo e quarto termos entre chaves, o qual já possui um fator multiplicativo $\frac{1}{r}$. Portanto, na zona de radiação esses dois termos são desprezados em comparação com os outros dois. Assim, a equação 25.322 simplifica-se inicialmente para

$$\begin{aligned}
\vec{B} = \frac{i\mu_0 J_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \hat{r} \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \cos \theta \hat{r} \right\} \right. \\
\left. - \hat{r} \times \left\{ \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\theta} \right\} \right\} \quad (25.323)
\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\vec{B} = i\hat{r} \times \left\{ \frac{\mu_0 J_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \cos \theta \hat{r} - \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \sin \theta \hat{\theta} \right\}$$

ou ainda,

$$\vec{B} = i\hat{r} \times \left\{ \frac{\mu_0 J_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \right\}$$

ou, finalmente, usando 25.319,

$$\vec{B} = ik\hat{r} \times \left\{ \frac{\mu_0 J_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{kr} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin^2 \theta} \right] \hat{k} \right\}$$

que, usando a equação 25.317, pode ser escrita como

$$\vec{B} = ik\hat{r} \times \vec{A} \quad (25.324)$$

que é válida na zona de radiação. Explicitamente, considerando novamente a equação 25.323 e efetuando os produtos vetoriais entre os versores, temos, para o campo $\vec{B}$,

$$\vec{B} = -\frac{i\mu_0 J_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\phi} \quad (25.325)$$

Assim, $\vec{H}$ fica

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{iJ_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\phi} \quad (25.326)$$

Incluindo a dependência temporal, obtemos

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = -\frac{iJ_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\phi}$$

ou

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = -\frac{iJ_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\phi} \quad (25.327)$$

Na zona de radiação, o campo elétrico pode ser obtido da expressão 25.249, de modo que temos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ -\frac{iJ_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\phi} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -Z_0 \frac{iJ_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\theta} \quad (25.328)$$

Note que a orientação do campo elétrico indica que ele está no plano definido pela antena e o vetor $\vec{r}$ que define o ponto de observação, de modo que a radiação está polarizada nesse plano. Conhecendo $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{H}}$, podemos determinar a distribuição angular de potência irradiada por meio de 25.90,

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re [r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re [r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

Tomando o complexo conjugado de 25.327, ficamos com

$$\vec{\mathcal{H}}^*(\vec{r}, t) = \frac{iJ_0}{2\pi} \frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\phi} \quad (25.329)$$

Portanto, usando as expressões 25.328 e 25.329, calculamos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* &= \left\{ -Z_0 \frac{iJ_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\theta} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{iJ_0}{2\pi} \frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right] \hat{\phi} \right\} \end{aligned} \quad (25.330)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* = Z_0 \frac{J_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (25.331)$$

Utilizando a equação 25.331 em 25.90, obtemos

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re \left\{ r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \left\{ Z_0 \frac{J_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \hat{\mathbf{r}} \right\} \right\}$$

ou

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = Z_0 \frac{J_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2}}{\sin \theta} \right]^2 \quad (25.332)$$

que fornece a distribuição angular da potência média irradiada pela antena alimentada pelo centro. Os dois casos particulares em que temos interesse são o de uma antena de meia-onda, onde $kL = \pi$ (equação 25.206), e o de uma antena de onda completa, em que $kL = 2\pi$ (equação 25.208). Para uma antena de meia-onda, a equação 25.332 torna-se

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = Z_0 \frac{J_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \theta} \right]^2$$

ou

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = Z_0 \frac{J_0^2}{8\pi^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (25.333)$$

Para uma comparação, a expressão 25.294 fornece a potência média irradiada por unidade de ângulo sólido considerando uma expansão em multipolos com sendo

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = & \frac{9Z_0 J_0^2 \sin^2 \theta}{8\pi^4} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \sqrt{\frac{7}{2}} (5 \cos^2 \theta - 1) + \frac{7}{8} \left(\frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 (5 \cos^2 \theta - 1)^2 \right\} \end{aligned}$$

onde os dois primeiros termos de multipolo foram usados na expansão ($\ell = 1, 3$). A figura 25.7 apresenta uma comparação entre as distribuições angulares de potência média irradiada dadas pelas duas equações acima. Da figura, vemos que a aproximação de dois multipolos é excelente quando comparada com o resultado exato.

Vejamos agora o que ocorre no caso de uma antena de onda completa, na qual $kL = 2\pi$. Nesse caso, a expressão exata 25.332 torna-se

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = Z_0 \frac{J_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos(\pi \cos \theta) - \cos \pi}{\sin \theta} \right]^2$$

ou

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = Z_0 \frac{J_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos(\pi \cos \theta) + 1}{\sin \theta} \right]^2$$

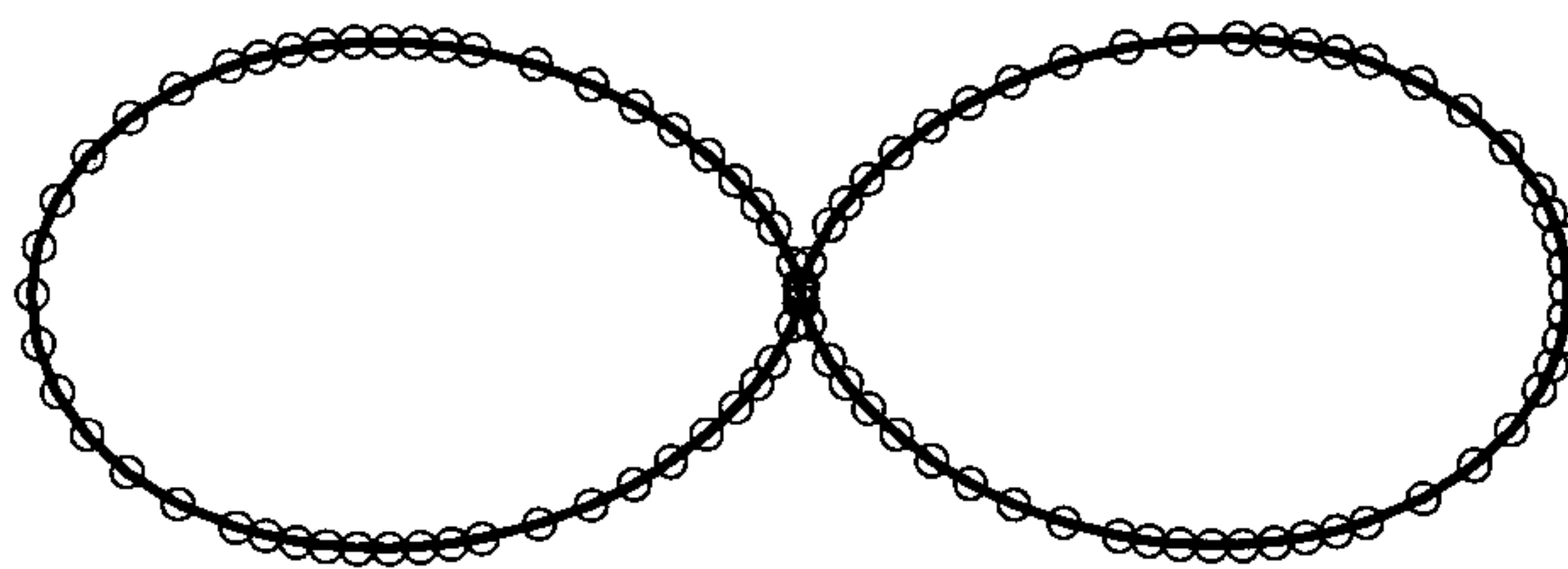


Figura 25.7: Diagrama da potência média por unidade de ângulo sólido ($\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega}$) para uma antena de meia-onda alimentada pelo centro. A linha cheia corresponde ao resultado exato dado pela equação 25.333, e os círculos correspondem à expansão em multipolos descrita pela expressão 25.294, considerando dois termos na expansão.

Lembrando a identidade

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

podemos escrever

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = Z_0 \frac{J_0^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \right]^2 - 1 + 1}{\sin \theta} \right\}^2$$

ou

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = Z_0 \frac{J_0^2}{2\pi^2} \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (25.334)$$

que fornece a expressão exata para a potência média emitida por unidade de ângulo sólido para uma antena de onda completa alimentada pelo centro. Vamos relembrar a aproximação feita no exemplo 25.3, que consistiu em considerar uma expansão de multipolos para os campos, levando em conta três termos ($\ell = 1, 3, 5$). Lá, obtivemos a equação 25.309,

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = & \frac{9Z_0 J_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{7}{2}} \frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} (5 \cos^2 \theta - 1) \right. \\
& + \frac{5}{4} \sqrt{\frac{33}{15}} \frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) + \frac{7}{8} \left(\frac{\check{C}_{3,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 (5 \cos^2 \theta - 1)^2 \\
& - \frac{5}{8} \sqrt{\frac{77}{10}} \frac{\check{C}_{3,0}^e \check{C}_{5,0}^e}{(\check{C}_{1,0}^e)^2} (5 \cos^2 \theta - 1) (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1) \\
& \left. + \frac{55}{64} \left(\frac{\check{C}_{5,0}^e}{\check{C}_{1,0}^e} \right)^2 (21 \cos^4 \theta - 14 \cos^2 \theta + 1)^2 \right\}
\end{aligned}$$

para a grandeza $\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega}$. A figura 25.8 mostra uma comparação dos padrões de emissão obtidos nos dois casos.

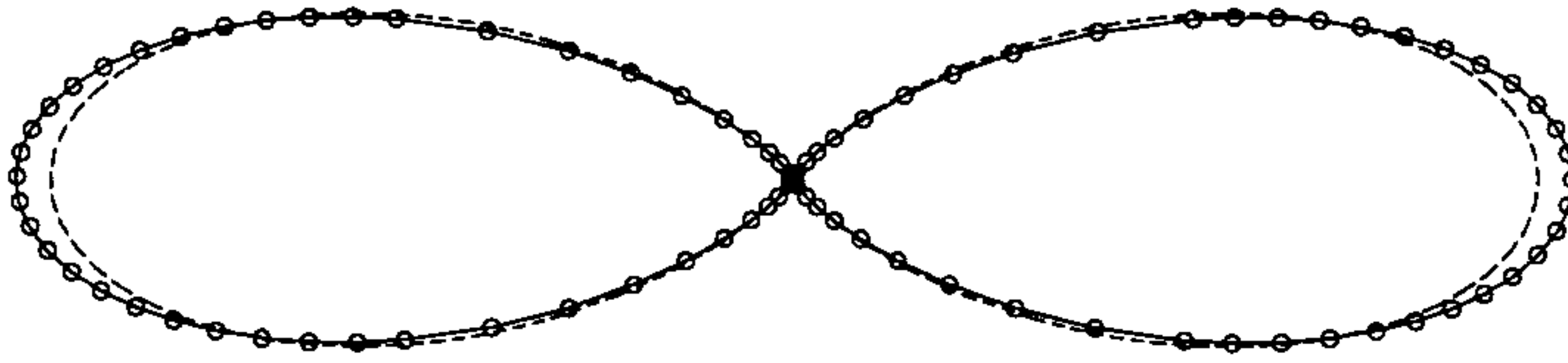


Figura 25.8: Diagrama da potência média por unidade de ângulo sólido ($\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega}$) para uma antena de onda completa alimentada pelo centro. A linha cheia corresponde ao resultado exato dado pela equação 25.334, e os círculos correspondem à expansão em multipolos descrita pela expressão 25.309, considerando três termos na expansão. A linha tracejada corresponde a uma expansão em multipolos considerando dois termos apenas, o que é feito se utilizarmos $\check{C}_{5,0}^e = 0$ em 25.309.

Além do resultado exato e da expansão em multipolos considerando três termos, a figura 25.8 também apresenta, na linha tracejada, o resultado de uma expansão envolvendo apenas dois termos, $\ell = 1$ e $\ell = 3$, o que é feito considerando $\check{C}_{5,0}^e = 0$ na expressão 25.309. Da figura, vemos que a expansão levando em conta apenas dois termos fornece uma aproximação apenas razoável para a expressão exata, diferentemente do que ocorre no caso anterior, enquanto o uso de três termos faz com que a aproximação se torne

excelente. A razão disso está relacionada aos valores dos coeficientes $\check{C}_{\ell,m}^e$, apresentados nas tabelas 25.1 e 25.2, os quais, por sua vez, dependem do tamanho da antena em comparação com o comprimento de onda. Vejamos agora mais um problema interessante.

Exemplo 25.5. No exemplo anterior consideramos a emissão de uma única antena de comprimento L alimentada pelo centro, particularizando a situação para dois casos, o de uma antena de meia-onda e o de uma antena de onda completa. Tais antenas são ditas formadas por um único **elemento**, que seria uma vara metálica, por exemplo. Em alguns casos é interessante associar vários elementos, formando uma associação de antenas, como mostra a figura 25.9.

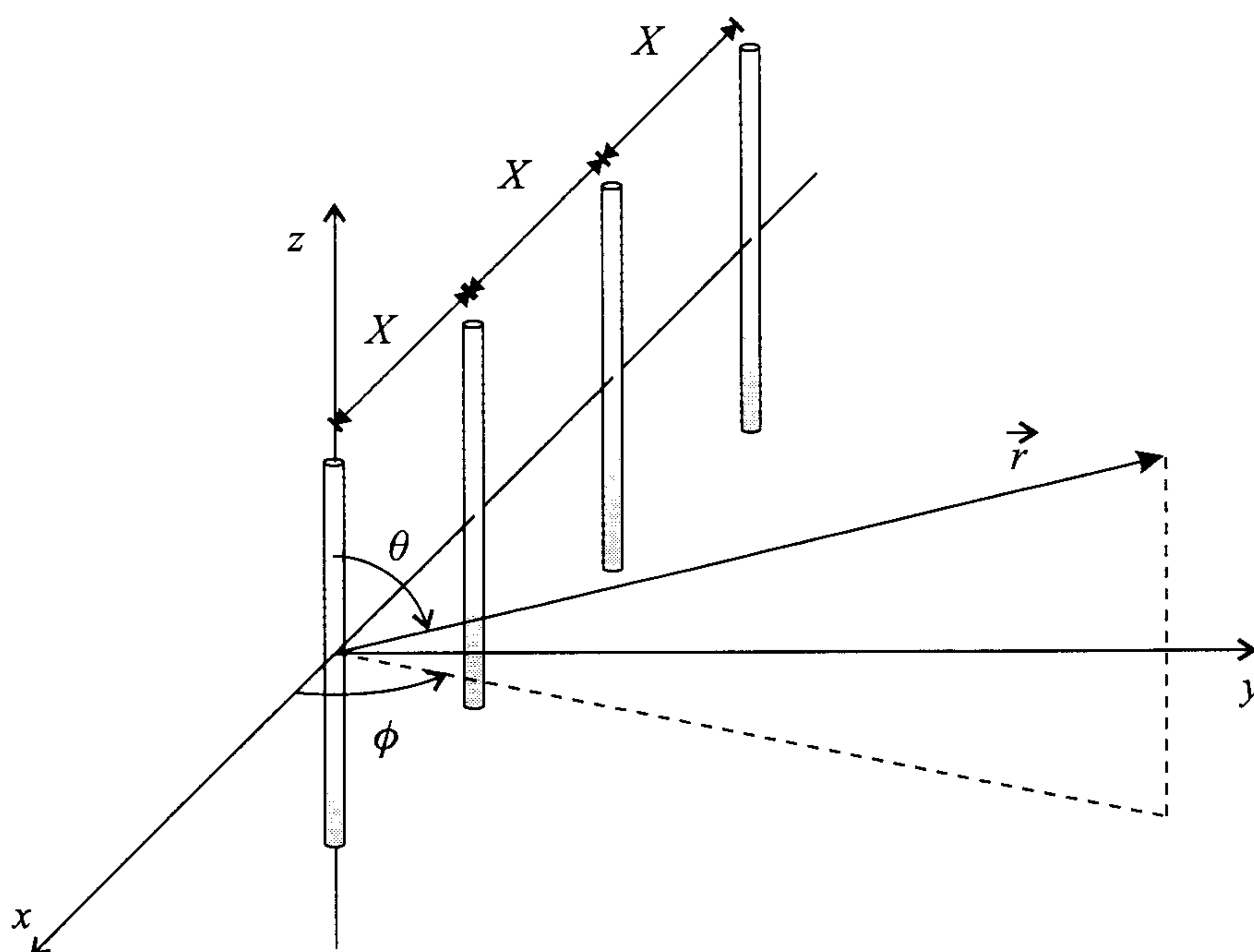


Figura 25.9: Associação de N antenas de comprimento L , alimentadas pelo centro.

Nesse caso, temos várias antenas de mesmo comprimento L dispostas paralelamente ao longo de um eixo (x , na figura) e separadas por uma mesma

distância X entre si ($X \ll r$). Nosso objetivo é obter $\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega}$ para uma associação de N antenas como essa, para o caso particular em que as antenas são de meia-onda.

Antes de mais nada, é preciso dizer que todas as N antenas são submetidas a uma fonte externa que faz com que elas emitam em fase. Entretanto, como as antenas estão situadas a distâncias diferentes do ponto de observação, situado em $\vec{r}$, o caminho que os campos devem percorrer para chegar a $\vec{r}$ é diferente. Essa diferença entre os caminhos percorridos introduz diferenças de fase entre os campos de radiação, e tais diferenças devem ser levadas em conta no cálculo da potência que chega em $\vec{r}$. Devemos lembrar ainda que r é muito grande, isto é, estamos na zona de radiação e, portanto, muito afastados da fonte.

Consideremos inicialmente os campos emitidos pela antena alimentada pelo centro situada na origem dos eixos paralelamente ao eixo z . Como ela é uma antena de meia-onda, $kL = \pi$, e os campos emitidos por ela, dados pelas expressões 25.327 e 25.328, podem ser escritos como

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = -\frac{i\mathcal{I}_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \hat{\phi} \quad (25.335)$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -Z_0 \frac{i\mathcal{I}_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \hat{\theta} \quad (25.336)$$

Note que r é justamente a distância entre a antena (que é a fonte) e o ponto de observação. Considere agora um vetor $\vec{r}_1$, que parte do centro da segunda antena, a que está situada em $x_1 = -X$, e termina no ponto de observação. Podemos escrever a relação vetorial

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - X \hat{\mathbf{i}}$$

ou

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + X \hat{\mathbf{i}} \quad (25.337)$$

Vamos lembrar agora a equação 1.38a, que expressa $\hat{\mathbf{i}}$ em termos dos versores de coordenadas esféricas, isto é,

$$\hat{\mathbf{i}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}$$

Então, a equação 25.337 pode ser escrita como

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + X \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + X \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - X \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ou

$$\vec{r}_1 = (r + X \sin \theta \cos \phi) \hat{\mathbf{r}} + X \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - X \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (25.338)$$

Agora, como r é muito grande, $\vec{r}$ e $\vec{r}_1$ são praticamente paralelos, de modo que interessa-nos apenas a eventual correção que ocorre no módulo da distância. Assim, podemos considerar uma aproximação para a expressão 25.338, que fica

$$\vec{r}_1 \simeq (r + X \sin \theta \cos \phi) \hat{\mathbf{r}} \quad (25.339)$$

Note que a variação em r é dada por

$$\Delta r = X \sin \theta \cos \phi \quad (25.340)$$

e que o módulo de $\vec{r}_1$ fica, aproximadamente,

$$r_1 \simeq r + X \sin \theta \cos \phi \quad (25.341)$$

Assim, para os campos emitidos por essa antena, teríamos, começando com o campo $\vec{\mathcal{H}}$, dado pela equação 25.335,

$$\vec{\mathcal{H}}_1(\vec{r}, t) = -\frac{i\mathcal{J}_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr_1 - \omega t)}}{r_1} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ou, utilizando 25.340 e 25.341,

$$\vec{\mathcal{H}}_1(\vec{r}, t) = -\frac{i\mathcal{J}_0}{2\pi} \frac{e^{i[k(r + \Delta r) - \omega t]}}{r + \Delta r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

que fica

$$\vec{\mathcal{H}}_1(\vec{r}, t) = \left\{ -\frac{i\mathcal{J}_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\} \left[\frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r}} \right] e^{ik\Delta r} \quad (25.342)$$

Essa expressão é composta por três fatores. O primeiro, entre chaves, é justamente o campo $\vec{\mathcal{H}}$ associado à antena situada na origem e dada pela expressão 25.335. Esse valor é corrigido por dois termos. O termo entre colchetes

pode ser expandido em série de Taylor e resultará numa soma do número 1 com potências de $\frac{\Delta r}{r}$. Como o termo entre chaves já envolve $\frac{1}{r}$, apenas o fator numérico 1 sobrevive na zona de radiação para o termo entre colchetes. Por fim, o último termo exponencial corresponde à diferença de fase entre a radiação emitida pela antena em x_1 e a antena na origem. Essa diferença de fase corresponde à diferença de caminho dada pela equação 25.340, e podemos relacioná-la ao comprimento de onda da radiação, lembrando que um deslocamento de λ numa onda introduz uma diferença de fase de 2π , de modo que um deslocamento de Δr produzirá uma diferença de fase α , dada por

$$\alpha = \overbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}^k \Delta r = kX \sin \theta \cos \phi \quad (25.343)$$

Portanto, voltando à expressão 25.342, ficamos com

$$\vec{\mathcal{H}}_1(\vec{r}, t) = e^{ik\Delta r} \vec{\mathcal{H}} = e^{i\alpha} \vec{\mathcal{H}} \quad (25.344)$$

Seguindo os mesmos passos, não é difícil verificar que o campo elétrico fica, utilizando 25.336,

$$\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}, t) = e^{ik\Delta r} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \quad (25.345)$$

Se repetirmos o mesmo procedimento para as outras $N - 2$ antenas, veremos que para todas os campos serão múltiplos dos campos $\vec{\mathcal{H}}$ e $\vec{\mathcal{E}}$ produzidos pela antena na origem, sendo que o fator multiplicativo é dado pela diferença de fase entre a antena considerada e a antena na origem. Conseqüentemente, o campo $\vec{\mathcal{H}}$ total no ponto de observação pode ser escrito como

$$\vec{\mathcal{H}}_t = [1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots + e^{(N-1)i\alpha}] \vec{\mathcal{H}} \quad (25.346)$$

Definindo

$$s = e^{i\alpha} \quad (25.347)$$

vemos que o termo entre colchetes na expressão 25.346 pode ser escrito como

$$1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots + e^{(N-1)i\alpha} = 1 + s + s^2 + \dots + s^{N-1} \quad (25.348)$$

que é uma série geométrica finita de razão $r = s$ e $n = N$ termos, sendo o primeiro termo igual a 1. Lembrando a equação 2.34 do volume I, temos, para

a soma de uma série geométrica de n termos, o valor

$$S_n = \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r}$$

de modo que a expressão 25.348 fica

$$1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots + e^{(N-1)i\alpha} = \frac{1 - s^N}{1 - s}$$

ou, substituindo o valor de s dado por 25.347,

$$1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots + e^{(N-1)i\alpha} = \frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \quad (25.349)$$

Vamos reescrever essa expressão do seguinte modo:

$$\frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\frac{N\alpha}{2}}(e^{-i\frac{N\alpha}{2}} - e^{i\frac{N\alpha}{2}})}{e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}})}$$

ou, dividindo e multiplicado por $2i$, temos

$$\frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = e^{i\frac{(N-1)\alpha}{2}} \frac{e^{i\frac{N\alpha}{2}} - e^{-i\frac{N\alpha}{2}}}{2i} \frac{2i}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}$$

Lembrando que

$$\text{sen } \delta = \frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{2i}$$

obtemos

$$\frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = e^{i\frac{(N-1)\alpha}{2}} \frac{\text{sen } \frac{N\alpha}{2}}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}} \quad (25.350)$$

Assim, utilizando a equação 25.350, a expressão 25.349 fica

$$1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots + e^{(N-1)i\alpha} = e^{i\frac{(N-1)\alpha}{2}} \frac{\text{sen } \frac{N\alpha}{2}}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}} \quad (25.351)$$

e, utilizando 25.351 na equação 25.346, achamos

$$\vec{\mathcal{H}}_t = e^{i\frac{(N-1)\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \vec{\mathcal{H}} \quad (25.352)$$

de modo que seu complexo conjugado fica

$$\vec{\mathcal{H}}_t^* = e^{-i\frac{(N-1)\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \vec{\mathcal{H}}^* \quad (25.353)$$

O campo elétrico total, por sua vez, torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}_t = e^{i\frac{(N-1)\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \vec{\mathcal{E}} \quad (25.354)$$

A potência média emitida por unidade de ângulo sólido é obtida da expressão 25.90,

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

Assim, seguindo os passos efetuados a partir da equação 25.330, veremos que a diferença nas expressões finais será o fator multiplicativo

$$e^{-i\frac{(N-1)\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{(N-1)\alpha}{2}} \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{N\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (25.355)$$

Conseqüentemente, a expressão 25.333 torna-se

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = \left[\mathcal{Z}_0 \frac{\mathcal{J}_0^2}{8\pi^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \right] \left[\frac{\sin^2 \frac{N\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right] \quad (25.356)$$

Esta expressão é bastante interessante. Ela é o produto de dois fatores independentes entre si. O primeiro fator entre colchetes corresponde à emissão de uma única antena de meia-onda alimentada pelo centro, e ele é característico para esse tipo de antena. Assim, se tivermos uma antena de onda completa, por exemplo, esse fator seria alterado para a expressão 25.334 e, por isso, ele é chamado de **função do elemento da antena**. O outro fator entre colchetes independe do elemento específico da antena, mas ele muda se mudarmos o arranjo da associação de elementos, sendo por isso chamado de **função da associação da antena**. Em particular, a função da associação para o presente caso é

$$f(\alpha) = \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (25.357)$$

Essa função ¹⁵ age como uma espécie de modulação para a radiação emitida, fazendo com que a emissão se torne bastante alta para algumas direções específicas e muito pequena para outras. A figura 25.10 apresenta $f^2(\alpha)$ para o caso de $N = 5$.

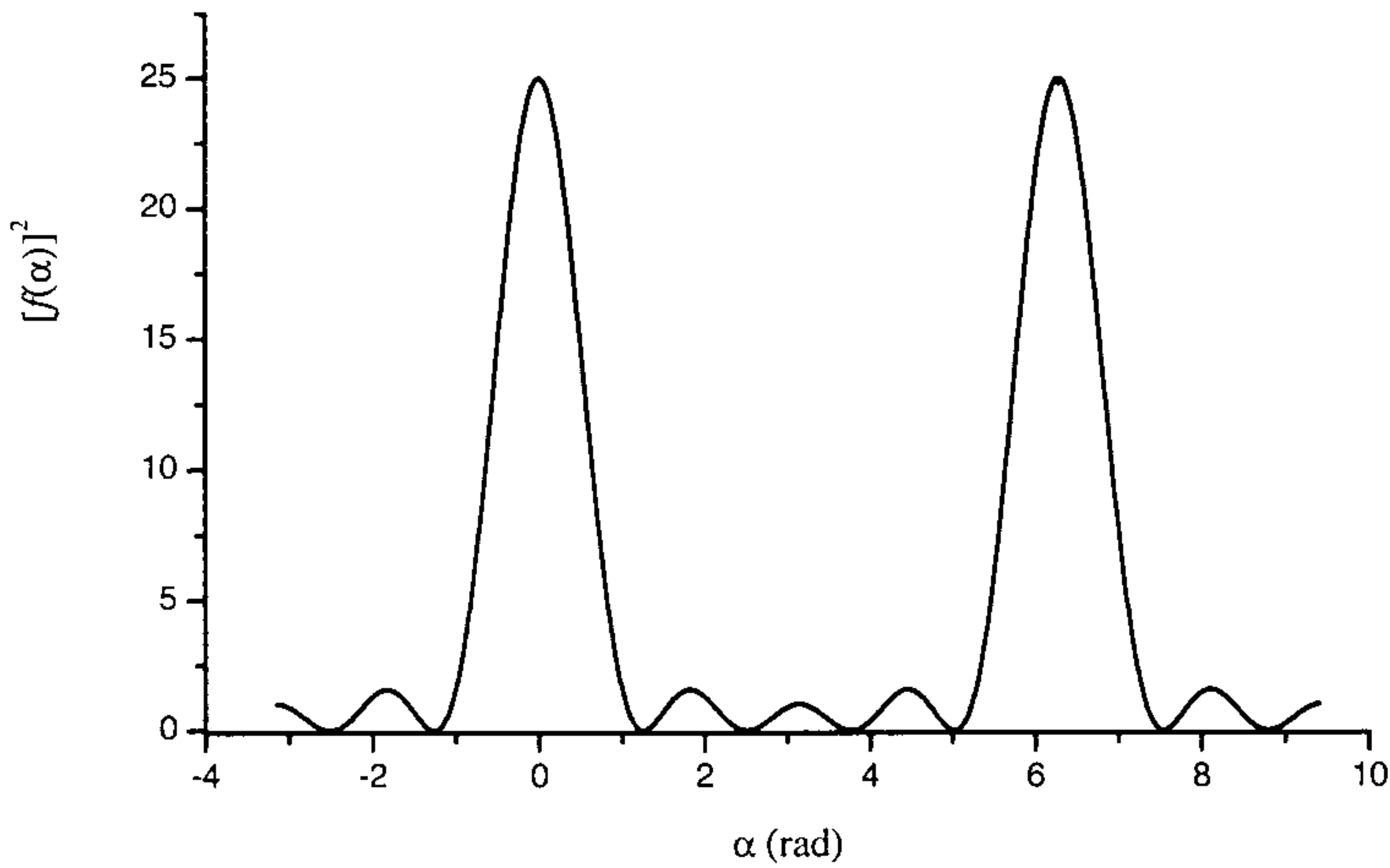


Figura 25.10: Gráfico de $f^2(\alpha)$, onde $f(\alpha)$ é a função de associação de antenas dada pela equação 25.357.

Vamos analisar mais detidamente essa função. Inicialmente, vemos que, para ângulos tais que

$$\alpha = \pm \frac{2\pi}{N}, \pm 2 \times \frac{2\pi}{N}, \pm 3 \times \frac{2\pi}{N}, \dots, \pm (N-1) \times \frac{2\pi}{N}, \pm (N+1) \times \frac{2\pi}{N}, \dots \quad (25.358)$$

ou seja, para ângulos que são múltiplos inteiros de $\frac{2\pi}{N}$, mas que são, ao mesmo tempo, diferentes de múltiplos inteiros de 2π , a função da associação se anula, pois o numerador se anula. Por exemplo, de 25.358, se $\alpha = \frac{2\pi}{N}$, aplicando em 25.357, temos

¹⁵ Na verdade, seu quadrado, já que na expressão 25.356 ela aparece elevada ao quadrado.

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{2\pi}{N}\right) &= \frac{\operatorname{sen} \frac{N \frac{2\pi}{N}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\frac{2\pi}{N}}{2}} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{N}} \\
 f\left(\frac{2\pi}{N}\right) &= 0
 \end{aligned}$$

Por outro lado, se tivermos ângulos tais que sejam múltiplos inteiros de 2π , isto é,

$$\alpha = 0, \pm 2\pi, \pm 2 \times 2\pi, \dots \quad (25.359)$$

então ambos, numerador e denominador, se anulam, o que produz uma indeterminação, como pode ser visto, por exemplo, se $\alpha = 0$, ou seja,

$$f(0) = \frac{\operatorname{sen} 0}{\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = ?$$

Para resolver a indeterminação, utilizamos a regra de l'Hôpital, que consiste em derivar o numerador e o denominador independentemente um do outro e aplicar o limite no ponto requerido. Temos então que calcular (n é um número inteiro)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi n} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi n} \frac{\operatorname{sen} \frac{N\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \quad (25.360)$$

Aplicando a regra de l'Hôpital em 25.360, temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi n} \frac{\operatorname{sen} \frac{N\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} &= \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi n} \frac{\frac{N}{2} \cos \frac{N\alpha}{2}}{\frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \\
 &= N \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi n} \frac{\cos \frac{N\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \\
 &= N \frac{\cos \frac{N2\pi n}{2}}{\cos \frac{2\pi n}{2}} \\
 \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi n} \frac{\operatorname{sen} \frac{N\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} &= N \frac{\cos Nn\pi}{\cos n\pi} \quad (25.361)
 \end{aligned}$$

Agora, temos que, se n for par, $\cos n\pi$ vale 1, e vale -1 se for ímpar. Então, podemos escrever

$$\cos n\pi = (-1)^n \quad (25.362)$$

Como N é um inteiro, o produto Nn também é inteiro, e assim,

$$\cos Nn\pi = (-1)^{Nn} \quad (25.363)$$

Utilizando as expressões 25.362 e 25.363 em 25.361, achamos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi n} \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = N \frac{(-1)^{Nn}}{(-1)^n}$$

ou

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi n} \frac{\sin \frac{N\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = (-1)^{(N-1)n} N \quad (25.364)$$

É importante lembrar que a função da associação aparece elevada ao quadrado na expressão 25.356, de modo que o valor máximo de $f^2(\alpha)$ vale N^2 , ocorrendo quando $\alpha = 2\pi n$. Esses máximos são chamados de máximos primários, e eles são os mais intensos, conforme se vê na figura 25.10. Além deles, existem outros máximos, bem menos intensos, que são descritos aproximadamente pelos valores máximos do numerador da expressão 25.357, ou seja, quando

$$\alpha = \pm \frac{3\pi}{N}, \pm \frac{5\pi}{N}, \dots, (2N-3)\frac{\pi}{N}, (2N+3)\frac{\pi}{N} \quad (25.365)$$

Note que, no intervalo $[0, 2\pi]$, existem dois máximos primários, em $\alpha = 0$ e $\alpha = 2\pi$, $N-1$ mínimos e $N-2$ máximos secundários, como pode ser verificado na figura 25.10, obtida quando $N = 5$.

Da expressão 25.343, vemos que o maior valor possível para α ocorre quando

$$\alpha_{max} = kX = 2\pi \frac{X}{\lambda} \quad (25.366)$$

Então, se a separação X entre as antenas for menor que um comprimento de onda, teremos $\alpha_{max} < 2\pi$, e $f^2(\alpha)$ terá apenas um máximo principal, o qual ocorre quando $\alpha = 0$. Pela expressão 25.343,

$$\alpha = kX \sin \theta \cos \phi$$

temos $\alpha = 0$ quando $\theta = 0$ ou π , ou seja, na direção do eixo da antena, ou quando $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$, isto é, num plano que é perpendicular à associação, que está situada no plano xz . No primeiro caso, é possível mostrar que a função do elemento da antena, que corresponde ao primeiro colchetes da equação 25.356, se anula, não havendo emissão no eixo da antena, de modo que a emissão máxima ocorre com $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$. A figura 25.11 apresenta, para $\theta = \frac{\pi}{2}$, a função $\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega}$ dada pela equação 25.356 em função do ângulo ϕ para uma associação de N antenas separadas por uma distância $X = \frac{\lambda}{2}$, com N variando desde $N = 1$ até $N = 5$. Nesse caso, a expressão 25.343 fica

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \cos \phi = \pi \cos \phi \quad (25.367)$$

e, substituindo 25.367 na função 25.356, temos

$$\frac{d\langle P(t) \rangle}{d\Omega} = Z_0 \frac{J_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\sin^2 \frac{N\pi \cos \phi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi \cos \phi}{2}} \right], \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (25.368)$$

A figura 25.11 apresenta essa figura para os cinco valores de N considerados.

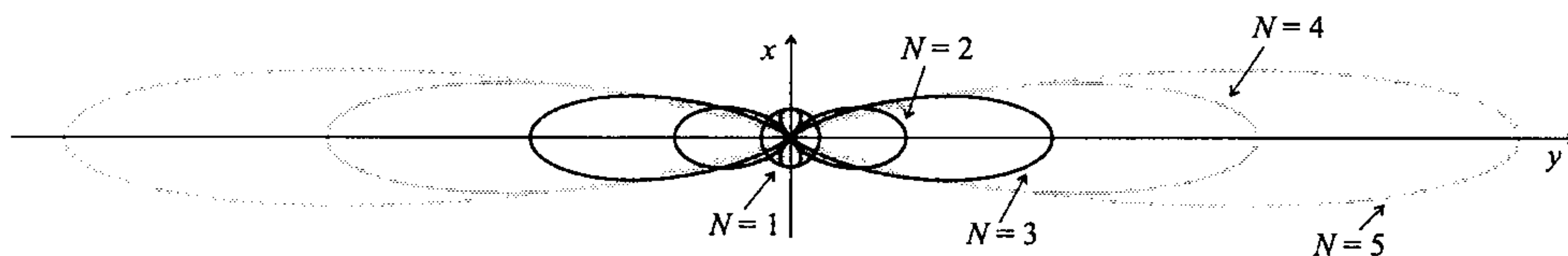


Figura 25.11: Gráfico da equação 25.368 apresentando a potência irradiada por unidade de ângulo sólido no plano xy ($\theta = \frac{\pi}{2}$) para uma associação de N antenas de meia-onda excitadas em fase, separadas por uma distância $X = \frac{\lambda}{2}$, para cinco valores de N , como função do ângulo ϕ .

Note, da figura 25.11, que a emissão aumenta consideravelmente com o aumento do número de elementos na associação de antenas. De fato, o crescimento ocorre com N^2 . Grande parte da emissão ocorre na direção do eixo y , que é perpendicular ao eixo no qual estão colocadas as antenas (x). A figura 25.12 ilustra o padrão tridimensional de emissão de uma associação de 5 antenas de meia-onda espaçadas por $X = \frac{\lambda}{2}$, descrito pela equação 25.356. As antenas

são excitadas pelo agente externo (um gerador, por exemplo) em fase e pelo seu centro.

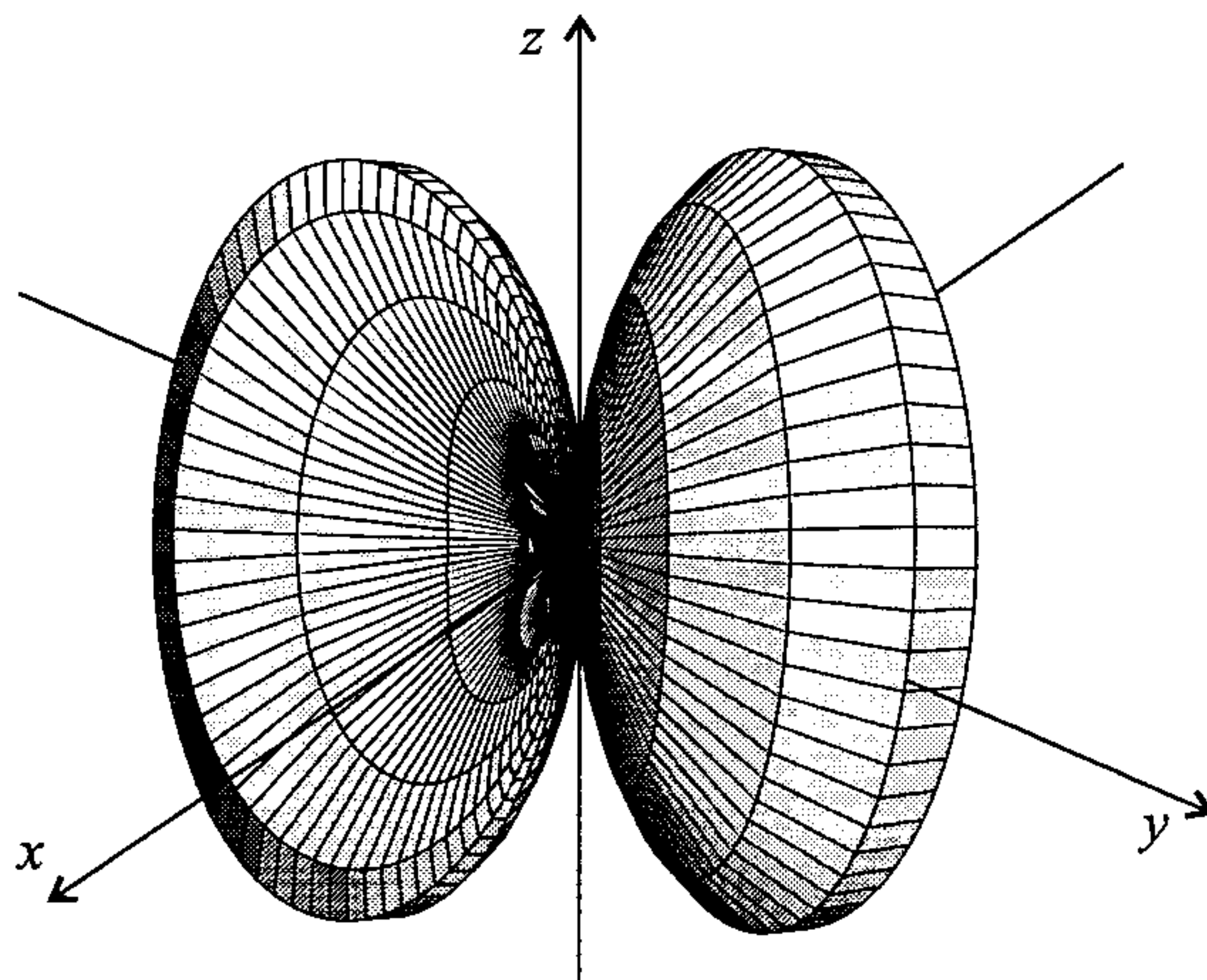


Figura 25.12: Padrão tridimensional de emissão de uma associação de 5 antenas de meia-onda espaçadas por $X = \frac{\lambda}{2}$ e descrito pela equação 25.356. As antenas são alimentadas em fase e pelo seu centro.

Conforme se vê na figura, não há emissão na direção do eixo z , e a maior parte dela se concentra próximo à região do plano yz , tendo as maiores intensidades na direção do eixo y . Na direção x também há emissão, só que sua intensidade é muito menor e não se destaca na figura, mas pôde ser vista nos pequenos lobos laterais que aparecem na figura 25.11. Note que esse é apenas um dos possíveis arranjos que podem ser feitos com antenas de meia-onda. Alterando-se a geometria da disposição das antenas, a relação do seu tamanho com o comprimento de onda da radiação e a forma de excitar cada antena (produzindo uma defasagem entre elas, por exemplo, de modo que a radiação emitida já saia de cada antena com uma defasagem inicial), vários outros padrões de emissão podem ser obtidos, mas o estudo de cada um deles foge ao escopo deste livro, sendo nosso objetivo fornecer uma idéia básica sobre o funcionamento desses sistemas bastante comuns no nosso dia-a-dia.

25.7 Distribuição Angular de Energia e Momento Angular Associados aos Multipolos

Podemos pensar agora na densidade de energia armazenada nos campos de radiação de multipolos. Para tanto, vamos relembrar a expressão 22.51, que fornece a densidade média de energia em termos dos campos, ou seja,

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{1}{4} \Re [\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* + \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}^*]$$

Lembrando que estamos muito longe da região em que as fontes estão, temos que $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\tilde{\mathcal{E}}}$, $\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\tilde{\mathcal{E}}}$, $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\tilde{\mathcal{H}}}$ e $\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\tilde{\mathcal{H}}}$. Portanto, escrevemos

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{1}{4} \Re [\epsilon_0 \vec{\tilde{\mathcal{E}}} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}^* + \mu_0 \vec{\tilde{\mathcal{H}}} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}^*]$$

ou

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \Re [\vec{\tilde{\mathcal{E}}} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}^* + \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \vec{\tilde{\mathcal{H}}} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}^*]$$

ou ainda, usando a equação 22.43 para a impedância do vácuo,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

achamos

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \Re [\vec{\tilde{\mathcal{E}}} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}^* + Z_0^2 \vec{\tilde{\mathcal{H}}} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}^*] \quad (25.369)$$

Vamos recordar a expressão 25.252,

$$\vec{\tilde{\mathcal{E}}}(\vec{r}, t) = -Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\tilde{\mathcal{H}}}(\vec{r}, t)$$

Seu complexo conjugado é

$$\vec{\tilde{\mathcal{E}}}^*(\vec{r}, t) = -Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\tilde{\mathcal{H}}}^*(\vec{r}, t) \quad (25.370)$$

Vamos efetuar o produto escalar das equações 25.252 e 25.370, isto é,

$$\vec{\tilde{\mathcal{E}}} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}^* = -Z_0 (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\tilde{\mathcal{H}}}) \cdot [-Z_0 (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\tilde{\mathcal{H}}}^*)]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* = Z_0^2 (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) \quad (25.371)$$

Vamos utilizar agora a propriedade 1.20, e assim obtemos

$$(\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{H}}^*) - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{H}}^*)(\vec{\mathcal{H}} \cdot \hat{\mathbf{r}})$$

Como $\vec{r}$ e $\vec{\mathcal{H}}$ são ortogonais, achamos

$$(\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) = |\vec{\mathcal{H}}|^2$$

Retornando com esse resultado à equação 25.371, temos

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* = Z_0^2 |\vec{\mathcal{H}}|^2 \quad (25.372)$$

de modo que a expressão 25.369 pode ser reescrita como

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \Re [Z_0^2 |\vec{\mathcal{H}}|^2 + Z_0 |\vec{\mathcal{H}}|^2]$$

ou

$$\langle u_{\text{el}} \rangle = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2} |\vec{\mathcal{H}}|^2 \quad (25.373)$$

A densidade de energia associada aos multipolos de mesmo índice ℓ fica, então,

$$\langle u_{\text{el}} \rangle_\ell = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2} |\vec{\mathcal{H}}_\ell|^2 \quad (25.374)$$

onde, empregando 25.251 para um único ℓ , temos

$$\vec{\mathcal{H}}_\ell(\vec{r}, t) = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{kr} \sum_m (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right\} \quad (25.375)$$

de modo que a expressão 25.374 torna-se, considerando também o complexo conjugado de 25.375,

$$\langle u_{el} \rangle_\ell = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{kr} \sum_m (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \check{\mathbf{J}}_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m} \right\} \\ \cdot \frac{e^{-i(kr - \omega t)}}{kr} \sum_{m'} i^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell,m'}^{e*} \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* \right\}$$

ou

$$\langle u_{el} \rangle_\ell = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2 r^2} \sum_{m, m'} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{e*} \check{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \check{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{e*} (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{M*} (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) \right\}$$

que fica, usando a expressão 25.267,

$$\langle u_{el} \rangle_\ell = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2 r^2} \sum_{m, m'} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{e*} \check{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \check{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{e*} (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{M*} (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* \right\} \quad (25.376)$$

A equação 25.376 fornece a densidade média de energia eletromagnética armazenada na radiação de multipolos para um dado valor de ℓ , isto é, a energia média armazenada por unidade de volume $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Podemos determinar a taxa de variação da energia média com o raio r se integrarmos esta equação em $dS = r^2 d\Omega$, onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido, ou seja,

$$\frac{dU_\ell}{dr} = \oint \langle u_{el} \rangle_\ell r^2 d\Omega$$

ou, usando 25.376,

$$\frac{dU_\ell}{dr} = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2} \oint \sum_{m, m'} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{e*} \check{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \check{\mathbf{J}}_{\ell,m} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^*) \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{e*} (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m}^M \check{C}_{\ell,m'}^{M*} (\hat{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \cdot \check{\mathbf{J}}_{\ell,m'}^* \right\} d\Omega$$

que pode ser escrita, já usando as equações 25.129, 25.277 e 25.278, como

$$\frac{dU_\ell}{dr} = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2} \sum_m \left\{ |\check{C}_{\ell,m}^e|^2 + |\check{C}_{\ell,m}^M|^2 \right\} \quad (25.377)$$

que é independente de r . A energia contida numa coroa esférica de raio dr , situada entre r e $r + dr$, corresponde à expressão acima multiplicada por dr . Note que a energia é a soma simples (ou incoerente) das energias associadas com cada momento de multipolo puro caracterizado por um dado valor de m ¹⁶. Podemos estudar também o comportamento da densidade média de momento angular. A densidade volumétrica de momento angular é dada por 21.48,

$$\vec{l}_{el} = \vec{r} \times \vec{p}_{el} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times \vec{S} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{H})$$

e, lembrando que o valor médio do vetor de Poynting é dado por 22.52,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \Re[\vec{E}^* \times \vec{H}]$$

temos, para a densidade média de momento angular, a expressão

$$\langle \vec{l}_{el} \rangle = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{2} \Re[\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{H}^*)] \quad (25.378)$$

A primeira coisa a fazer é reescrever o produto vetorial utilizando a identidade 1.19a, ou seja,

$$\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{H}^*) = (\vec{r} \cdot \vec{H}^*) \vec{E} - (\vec{r} \cdot \vec{E}) \vec{H}^* \quad (25.379)$$

Considerando que temos apenas um dado ℓ , as expressões 25.226 e 25.227 podem ser escritas como

$$\vec{E}_\ell = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{E}_{\ell,m}^e + \check{C}_{\ell,m}^M \vec{E}_{\ell,m}^M \right\} \quad (25.380a)$$

$$\vec{H}_\ell = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{H}_{\ell,m}^e + \check{C}_{\ell,m}^M \vec{H}_{\ell,m}^M \right\} \quad (25.380b)$$

¹⁶ E também de ℓ , mas, como todos têm o mesmo valor para ℓ , o que os diferencia é o valor de m .

Efetuando o produto escalar dessas duas equações com $\vec{r}$, temos

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_\ell = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^e + \check{C}_{\ell,m}^M \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^M \right\} \quad (25.381a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_\ell = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_{\ell,m}^e + \check{C}_{\ell,m}^M \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_{\ell,m}^M \right\} \quad (25.381b)$$

Agora, simplificamos essas expressões usando as propriedades descritas pelas equações 25.118b e 25.123b, ou seja,

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}^e = 0 \qquad \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}^M = 0$$

de modo que obtemos

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_\ell = \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^e}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^e \quad (25.382a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_\ell = \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^M}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_{\ell,m}^M \quad (25.382b)$$

Em seguida, utilizamos as equações 25.153b e 25.154b para reescrever os campos em 25.382 como

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_\ell &= \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^e}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{r} \cdot \left(\frac{iZ_0}{k} \nabla \times \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_{\ell,m}^e \right) \\ \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_\ell &= \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^M}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{r} \cdot \left(-\frac{i}{kZ_0} \nabla \times \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^M \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_\ell &= \frac{iZ_0}{k} \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^e}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_{\ell,m}^e) \\ \vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_\ell &= -\frac{i}{kZ_0} \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^M}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_{\ell,m}^M) \end{aligned}$$

Agora, lembrando a equação 25.146, reescrevemos as expressões acima como

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_\ell = \frac{iZ_0}{k} \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^e}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} (i\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_\ell = -\frac{i}{kZ_0} \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^M}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} (i\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M)$$

ou

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}}_\ell = -\frac{Z_0}{k} \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^e}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e \quad (25.386a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}}_\ell = \frac{1}{kZ_0} \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^M}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M \quad (25.386b)$$

Devemos agora considerar os campos $\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$ e $\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M$. Inicialmente, lembramos que eles são dados pelas expressões 25.153a e 25.154a, isto é,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) = f_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.387a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M(r, \theta, \phi) = Z_0 g_\ell(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.387b)$$

Como estamos interessados no que ocorre na zona de radiação, as funções radiais apropriadas são dadas por 25.159,

$$f_\ell(kr) = \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \quad g_\ell(kr) = \mathfrak{h}_\ell^1(kr)$$

de modo que 25.387 tornam-se

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) = \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.388a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M(r, \theta, \phi) = Z_0 \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.388b)$$

Além disso, como estamos na zona de radiação, podemos usar a forma assintótica das funções de Hankel dadas por 25.231,

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) \sim (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ix}}{x}, \quad x \gg 1$$

para reescrever 25.388, que tornam-se

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) = (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.389a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M(r, \theta, \phi) = (-i)^{\ell+1} Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.389b)$$

Agora, relembremos a definição 25.128 para $\vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi)$,

$$\vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

Com o uso dessa definição, as expressões 25.389 podem ser escritas como

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e(r, \theta, \phi) = (-i)^{\ell+1} \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.390a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\ell,m}^M(r, \theta, \phi) = (-i)^{\ell+1} Z_0 \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (25.390b)$$

Agora, aplicamos as equações 25.390 em 25.386, ou seja,

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\ell = -\frac{Z_0}{k} \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^e}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} \cdot \left[(-i)^{\ell+1} \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right] \quad (25.391a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}_\ell = \frac{1}{kZ_0} \sum_m \frac{\check{C}_{\ell,m}^M}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} \cdot \left[(-i)^{\ell+1} Z_0 \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right] \quad (25.391b)$$

ou, lembrando, da equação 25.270,

$$\vec{\mathcal{L}} = -i \left[\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right]$$

que o operador $\vec{\mathcal{L}}$ só age em funções angulares, podemos reescrever 25.391 como

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\ell = -Z_0 \frac{e^{ikr}}{k^2 r} \sum_m (-i)^{\ell+1} \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \quad (25.392a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}}_\ell = \frac{e^{ikr}}{k^2 r} \sum_m (-i)^{\ell+1} \check{C}_{\ell,m}^M \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \quad (25.392b)$$

Note que, além dos termos dados em 25.392, na equação 25.379 aparecem também os próprios campos, dados por 25.153 e 25.154. Dois termos já foram

determinados em 25.390, e os outros dois necessitam de algumas manipulações. Da equação 25.242, temos, para a zona de radiação,

$$\vec{\tilde{\epsilon}}_{\ell,m}^e = -Z_0 \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^e$$

ou então, usando 25.241 e também 25.128,

$$\vec{\tilde{\epsilon}}_{\ell,m}^e = -(-i)^{\ell+1} Z_0 \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \quad (25.393)$$

Da mesma forma, pela equação 25.243, temos

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\tilde{\epsilon}}_{\ell,m}^M$$

ou, empregando 25.245 e 25.128,

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell,m}^M = (-i)^{\ell+1} \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \quad (25.394)$$

Com o uso de 25.390, 25.393 e 25.394, as expressões 25.380 podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{\epsilon}}_{\ell} = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \left[-(-i)^{\ell+1} Z_0 \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right] \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell,m}^M \left[(-i)^{\ell+1} Z_0 \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right] \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_{\ell} = \sum_m \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \left[(-i)^{\ell+1} \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right] \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell,m}^M \left[(-i)^{\ell+1} \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{e^{ikr}}{kr} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right] \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\tilde{\epsilon}}_{\ell} = -(-i)^{\ell+1} Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_m \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} - \check{C}_{\ell,m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right\} \quad (25.395a)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{\ell} = (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_m \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right\} \quad (25.395b)$$

Com o uso das equações 25.392 e 25.395, a equação 25.379 torna-se, para um dado ℓ ,

$$\vec{r} \times (\vec{\mathcal{E}}_\ell \times \vec{\mathcal{H}}_\ell^*) = (\vec{r}_\ell \cdot \vec{\mathcal{H}}_\ell^*) \vec{\mathcal{E}}_\ell - (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\ell) \vec{\mathcal{H}}_\ell^*$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\mathcal{E}}_\ell \times \vec{\mathcal{H}}_\ell^*) &= \left[\frac{e^{-ikr}}{k^2 r} \sum_{m'} i^{\ell+1} \check{C}_{\ell,m'}^{M*} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'})^* \right] \\ &\times \left[-(-i)^{\ell+1} Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_m (\check{C}_{\ell,m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} - \check{C}_{\ell,m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}) \right] \\ &- \left[-Z_0 \frac{e^{ikr}}{k^2 r} \sum_m (-i)^{\ell+1} \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} \right] \\ &\times \left[i^{\ell+1} \frac{e^{-ikr}}{kr} \sum_{m'} (\check{C}_{\ell,m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'}^*) \right] \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\mathcal{E}}_\ell \times \vec{\mathcal{H}}_\ell^*) &= -\frac{Z_0}{k^3 r^2} \sum_{m,m'} \check{C}_{\ell,m'}^{M*} (\check{C}_{\ell,m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} - \check{C}_{\ell,m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'})^* \\ &+ \frac{Z_0}{k^3 r^2} \sum_{m,m'} \check{C}_{\ell,m}^e (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}) (\check{C}_{\ell,m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'}^* + \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'}^*) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\mathcal{E}}_\ell \times \vec{\mathcal{H}}_\ell^*) &= \frac{Z_0}{k^3 r^2} \sum_{m,m'} \left[\check{C}_{\ell,m'}^{M*} \check{C}_{\ell,m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'})^* \right. \\ &- \check{C}_{\ell,m'}^{M*} \check{C}_{\ell,m}^e (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'})^* + \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}) \\ &\left. + \check{C}_{\ell,m}^e \check{C}_{\ell,m'}^{M*} (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m'}^*) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}) \right] \quad (25.396) \end{aligned}$$

de modo que a densidade média de momento angular 25.378 se torna

$$\begin{aligned} \langle \vec{l}_{el} \rangle_\ell = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{2} \frac{Z_0}{k^3 r^2} \Re \left\{ \sum_{m, m'} \left[\check{C}_{\ell, m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^M \vec{J}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m'})^* \right. \right. \\ \left. - \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^e (\hat{r} \times \vec{J}_{\ell, m}) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m'})^* + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \vec{J}_{\ell, m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m}) \right. \\ \left. \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{M*} (\hat{r} \times \vec{J}_{\ell, m'}^*) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m}) \right] \right\} \end{aligned}$$

ou, lembrando que $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ e que $\omega = ck$, temos

$$\begin{aligned} \langle \vec{l}_{el} \rangle_\ell = \frac{\mu_0}{2\omega k^2 r^2} \Re \left\{ \sum_{m, m'} \left[\check{C}_{\ell, m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^M \vec{J}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m'})^* \right. \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \vec{J}_{\ell, m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m}) - \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^e (\hat{r} \times \vec{J}_{\ell, m}) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m'})^* \right. \\ \left. \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{M*} (\hat{r} \times \vec{J}_{\ell, m'}^*) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m}) \right] \right\} \quad (25.397) \end{aligned}$$

Note que essa expressão fornece a densidade média volumétrica de momento angular. Vamos integrá-la em $dS = r^2 d\Omega$, como fizemos com a densidade de energia, para obter a taxa de variação de momento angular eletromagnético $\vec{L}_{el}$, dado por 21.57, isto é,

$$\frac{d\langle \vec{L}_{el, \ell} \rangle}{dr} = \oint r^2 \langle \vec{l}_{el} \rangle_\ell d\Omega$$

ou, usando 25.397,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \vec{L}_{el, \ell} \rangle}{dr} = \frac{\mu_0}{2\omega k^2} \oint \Re \left\{ \sum_{m, m'} \left[\check{C}_{\ell, m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^M \vec{J}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m'})^* \right. \right. \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{e*} \vec{J}_{\ell, m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m}) - \check{C}_{\ell, m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^e (\hat{r} \times \vec{J}_{\ell, m}) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m'})^* \right. \\ \left. \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell, m'}^{M*} (\hat{r} \times \vec{J}_{\ell, m'}^*) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m}) \right] \right\} d\Omega \quad (25.398) \end{aligned}$$

No caso particular de termos um único m , isto é, um multipolo puro, independentemente de ser elétrico ou magnético, a expressão 25.398 se simplifica e pode ser escrita como

$$\frac{d\langle \vec{L}_{el, \ell m} \rangle}{dr} = \frac{\mu_0}{2\omega k^2} \Re \left\{ \oint_{\Omega} \check{C}_{\ell, m} \check{C}_{\ell, m}^* \vec{J}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m})^* d\Omega \right\}$$

ou

$$\frac{d\langle \vec{L}_{el, \ell m} \rangle}{dr} = \frac{\mu_0}{2\omega k^2} |\check{C}_{\ell, m}|^2 \Re \left\{ \oint_{\Omega} \vec{J}_{\ell, m} (\vec{L} \cdot \vec{J}_{\ell, m'})^* d\Omega \right\} \quad (25.399)$$

Aqui é interessante considerar novamente a definição 25.128, para calcular

$$\vec{L} \cdot \vec{J}_{\ell, m'} = \vec{L} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{L} Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \right]$$

ou

$$\vec{L} \cdot \vec{J}_{\ell, m'} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{L} \cdot \vec{L} Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

que fica

$$\vec{L} \cdot \vec{J}_{\ell, m'} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \mathcal{L}^2 Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (25.400)$$

Lembrando, de H.8, que

$$\mathcal{L}^2 Y_{\ell, m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell, m}$$

podemos reescrever 25.400 como

$$\vec{L} \cdot \vec{J}_{\ell, m'} = \sqrt{\ell(\ell+1)} Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (25.401)$$

Para obter as três componentes vetoriais de 25.399, precisaríamos das equações H.13 para reescrever $\vec{L}$ em termos de $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_-$ e $\mathcal{L}_z$ de modo que pudessemos usar as expressões H.14. Entretanto, para nossos propósitos vamos considerar apenas a componente z de 25.399, ou seja,

$$\frac{d\langle L_{el, \ell m}^z \rangle}{dr} = \frac{\mu_0}{2\omega k^2} |\check{C}_{\ell, m}|^2 \Re \left\{ \oint_{\Omega} J_{\ell, m}^z (\vec{L} \cdot \vec{J}_{\ell, m'})^* d\Omega \right\} \quad (25.402)$$

Usando as equações 25.128 e 25.401, a expressão 25.402 para a componente z torna-se

$$\frac{d\langle L_{el, \ell m}^z \rangle}{dr} = \frac{\mu_0}{2\omega k^2} |\check{C}_{\ell, m}|^2 \Re \left\{ \oint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \mathcal{L}_z Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \sqrt{\ell(\ell+1)} Y_{\ell, m}^*(\theta, \phi) d\Omega \right\}$$

ou, lembrando, de H.14c, que

$$\mathcal{L}_z Y_{\ell,m} = m Y_{\ell,m}$$

temos

$$\frac{d\langle \mathcal{L}_{\text{el},\ell m}^z \rangle}{dr} = \frac{\mu_0}{2\omega k^2} |\check{C}_{\ell,m}|^2 \Re \left\{ \oint_{\Omega} m Y_{\ell,m}(\theta, \phi) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) d\Omega \right\}$$

ou

$$\frac{d\langle \mathcal{L}_{\text{el},\ell m}^z \rangle}{dr} = \frac{m\mu_0}{2\omega k^2} |\check{C}_{\ell,m}|^2 \Re \left\{ \oint_{\Omega} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) d\Omega \right\} \quad (25.403)$$

Lembrando a relação de ortogonalidade C.31 para os harmônicos esféricos, dada por

$$\int Y_{\ell',m'}^* Y_{\ell,m} d\Omega = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

vemos que 25.403 simplifica-se para

$$\frac{d\langle \mathcal{L}_{\text{el},\ell m}^z \rangle}{dr} = \frac{m\mu_0}{2\omega k^2} |\check{C}_{\ell,m}|^2 \quad (25.404)$$

Consideremos agora a equação 25.377 para a taxa de variação da energia armazenada com a distância radial r ,

$$\frac{dU_{\ell}}{dr} = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2} \sum_m \left\{ |\check{C}_{\ell,m}^e|^2 + |\check{C}_{\ell,m}^M|^2 \right\}$$

Para um multipolo puro, temos

$$\frac{dU_{\ell m}}{dr} = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2} |\check{C}_{\ell,m}|^2 \quad (25.405)$$

Vamos calcular agora a regra da cadeia

$$\frac{d\langle \mathcal{L}_{\text{el},\ell m}^z \rangle}{dU_{\ell m}} = \frac{d\langle \mathcal{L}_{\text{el},\ell m}^z \rangle}{dr} \frac{dr}{dU_{\ell m}}$$

ou

$$\frac{d\langle L_{el,\ell m}^z \rangle}{dU_{\ell m}} = \frac{\frac{d\langle L_{el,\ell m}^z \rangle}{dr}}{\frac{dU_{\ell m}}{dr}}$$

a qual, usando 25.404 e 25.405, fica

$$\frac{d\langle L_{el,\ell m}^z \rangle}{dU_{\ell m}} = \frac{\frac{m\mu_0}{2\omega k^2} |\check{C}_{\ell,m}|^2}{\frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2} |\check{C}_{\ell,m}|^2}$$

ou

$$\frac{d\langle L_{el,\ell m}^z \rangle}{dU_{\ell m}} = \frac{m}{\omega} \quad (25.406)$$

Este resultado é muito interessante. Ele indica que existe uma relação entre a energia e o momento angular associados com a radiação de um multipolo puro, e essa relação envolve a frequência angular ω , além do índice m . Note que é um resultado clássico, mas que, se lembrarmos que a energia de um fóton de frequência angular ω vale $E = \hbar\omega$, onde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ e h é a constante de Planck, e também que, se o fóton estiver no estado m , seu momento angular na direção z vale $\langle L_{el,\ell m}^z \rangle = m\hbar$, veremos que a relação acima está em excelente acordo com a previsão quântica. Entretanto, se as outras componentes forem consideradas, calculando-se, por exemplo, $\langle L_{el,\ell m}^2 \rangle$, a natureza quântica de um fóton se manifesta claramente e a previsão clássica entra em desacordo com a quântica. Vejamos agora o que ocorre com as densidades médias quando consideramos o caso geral. Inicialmente, vemos que os campos necessários podem ser obtidos das expressões 25.395 se efetuarmos uma soma no índice ℓ , ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = -Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell,m} (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{I}}_{\ell,m} - \check{C}_{\ell,m}^M \vec{\mathcal{I}}_{\ell,m} \right\} \quad (25.407a)$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell,m} (-i)^{\ell+1} \left\{ \check{C}_{\ell,m}^e \vec{\mathcal{I}}_{\ell,m} + \check{C}_{\ell,m}^M \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{I}}_{\ell,m} \right\} \quad (25.407b)$$

Além disso, as equações 25.392 ficarão

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{E}}} = -Z_0 \frac{e^{ikr}}{k^2 r} \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} \check{C}_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \quad (25.408a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\tilde{\mathcal{H}}} = \frac{e^{ikr}}{k^2 r} \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \quad (25.408b)$$

Assim, a densidade média de energia armazenada nos campos, que é calculada mediante 25.373, fica, nesse caso,

$$\begin{aligned} \langle u_{el} \rangle = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2 r^2} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{m, m'} i^{\ell' - \ell} \left\{ \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* \right. \\ + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \cdot (\hat{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^*) + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell', m'}^{e*} (\hat{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* \\ \left. + \check{C}_{\ell, m}^M \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* \right\} \quad (25.409) \end{aligned}$$

enquanto a taxa média de variação com o raio da energia armazenada fica, usando as equações 25.129, 25.277 e 25.278,

$$\frac{dU}{dr} = \frac{Z_0^2 \epsilon_0}{2k^2} \sum_{\ell, m} \left\{ |\check{C}_{\ell, m}^e|^2 + |\check{C}_{\ell, m}^M|^2 \right\} \quad (25.410)$$

Vejamos agora o que ocorre com a densidade média de momento angular quando consideramos o caso geral. Por meio da equação 25.379, e fazendo uso de 25.407 e 25.408, achamos

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\tilde{\mathcal{E}}} \times \vec{\tilde{\mathcal{H}}}^*) &= \left[\frac{e^{-ikr}}{k^2 r} \sum_{\ell', m'} i^{\ell'+1} \check{C}_{\ell', m'}^{M*} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^*)^* \right] \\ &\times \left[-Z_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} (\check{C}_{\ell, m}^e \hat{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} - \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) \right] \\ &- \left[-Z_0 \frac{e^{ikr}}{k^2 r} \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell+1} \check{C}_{\ell, m}^e \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \right] \\ &\times \left[\frac{e^{-ikr}}{kr} \sum_{\ell', m'} i^{\ell'+1} (\check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* + \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \hat{r} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^*) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\vec{r} \times (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) = & \\
& - \frac{Z_0}{k^3 r^2} \sum_{\ell, \ell', m, m'} i^{\ell' - \ell} \check{C}_{\ell', m'}^{M*} (\check{C}_{\ell, m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} - \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'})^* \\
& + \frac{Z_0}{k^3 r^2} \sum_{\ell, \ell', m, m'} i^{\ell' - \ell} \check{C}_{\ell, m}^e (\check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* + \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^*) (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m})
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\vec{r} \times (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) = & \\
\frac{Z_0}{k^3 r^2} \left\{ \sum_{\ell, \ell', m, m'} i^{\ell' - \ell} \left[\check{C}_{\ell', m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'})^* + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) \right. \right. & \\
\left. \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) - \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'})^* \right] \right\} & \quad (25.411)
\end{aligned}$$

de forma que a densidade média de momento angular dada por 25.378 torna-se

$$\begin{aligned}
\langle \vec{l}_{\text{el}} \rangle = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{2} \Re \left\{ \frac{Z_0}{k^3 r^2} \right. & \\
\times \left\{ \sum_{\ell, \ell', m, m'} i^{\ell' - \ell} \left[\check{C}_{\ell', m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'})^* + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) \right. \right. & \\
\left. \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) - \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'})^* \right] \right\} \Bigg\} &
\end{aligned}$$

ou, efetuando algumas simplificações,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{l}_{\text{el}} \rangle = \frac{\mu_0}{2\omega k^2 r^2} \Re \left\{ \sum_{\ell, \ell', m, m'} i^{\ell' - \ell} \left[\check{C}_{\ell', m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^M \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'})^* \right. \right. & \\
+ \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}) & \\
\left. \left. - \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\ell', m'})^* \right] \right\} & \quad (25.412)
\end{aligned}$$

A taxa de variação do momento angular médio com r pode ser obtida por interédio de

$$\frac{d\langle \vec{L}_{\text{el},\ell} \rangle}{dr} = \int r^2 \langle \vec{l}_{\text{el}} \rangle_{\ell} d\Omega$$

e, usando 25.412, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \vec{L}_{\text{el},\ell} \rangle}{dr} = \frac{\mu_0}{2\omega k^2} \int \Re \left\{ \sum_{\ell, \ell', m, m'} i^{\ell' - \ell} \left[\check{C}_{\ell', m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^M \vec{J}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell', m'})^* \right. \right. \\ \left. \left. + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{e*} \vec{J}_{\ell', m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m}) + \check{C}_{\ell, m}^e \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \hat{\mathbf{r}} \times \vec{J}_{\ell', m'}^* (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell, m}) \right. \right. \\ \left. \left. - \check{C}_{\ell', m'}^{M*} \check{C}_{\ell, m}^e \hat{\mathbf{r}} \times \vec{J}_{\ell, m} (\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{J}_{\ell', m'})^* \right] d\Omega \right\} \quad (25.413) \end{aligned}$$

Com o estudo acima encerramos nossa discussão sobre radiação de multipolos e antenas. Entretanto, ainda não esgotamos o assunto radiação, que continuará no próximo capítulo.

25.8 Exercícios

25.1 Mostre que o segundo termo do lado direito da equação 25.86,

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{Z_0 k \omega}{24\pi} \nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{Q}] + \frac{Z_0 k \omega}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times [\hat{\mathbf{r}} \times \vec{Q}]$$

envolve potências de $\frac{1}{r}$ maiores do que 1, de modo que esse termo pode ser desconsiderado em comparação com o primeiro.

25.2 Mostre a equação 25.135,

$$C_{\ell, m}^M g_{\ell}(kr) = \frac{k}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y_{\ell, m}^* \vec{r} \cdot \vec{\mathcal{H}} d\Omega$$

seguindo os passos utilizados para demonstrar o coeficiente $C_{\ell,m}^e$.

25.3 Demonstre a equação 25.185,

$$\begin{aligned} \check{C}_{\ell,m}^M = & -\frac{ik^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int_V Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \\ & \times \left\{ \nabla \cdot \vec{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial r} [r j_\ell(kr)] + j_\ell(kr) \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{J}}) - k^2 j_\ell(kr) (\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \right\} dV \end{aligned}$$

25.4 Verifique, por meio de

$$\mathbf{i} = \int_S \vec{\mathcal{J}} \cdot \hat{n} dA$$

que a densidade de corrente dada em 25.191,

$$\vec{\mathcal{J}} = \frac{\mathcal{J}(r)}{2\pi r^2} [\delta(\cos \theta - 1) - \delta(\cos \theta + 1)] \hat{\mathbf{r}}, \quad r \leq \frac{L}{2}$$

fornece uma corrente $\mathbf{i} = \mathcal{J}$. Lembre-se de que é preciso definir uma superfície S apropriada para efetuar a integral.

25.5 Determine explicitamente os termos com $\ell = 1$ e $\ell = 3$ dos campos de radiação da antena alimentada pelo centro discutida no exemplo 25 dados pelas expressões 25.210–25.212. As equações H.13 e H.14,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= \frac{\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-}{2} \\ \mathcal{L}_y &= \frac{\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-}{2i} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ Y_{\ell,m} &= \sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)} Y_{\ell,m+1} \\ \mathcal{L}_- Y_{\ell,m} &= \sqrt{(\ell - m)(\ell - m + 1)} Y_{\ell,m-1} \\ \mathcal{L}_z Y_{\ell,m} &= m Y_{\ell,m} \end{aligned}$$

podem ser úteis.

- 25.6** Com o uso da definição 25.128 e das expressões H.13 e H.14, mostre que a potência irradiada por ângulo sólido para um multipolo puro, dada por 25.264, pode ser escrita explicitamente como

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle_{\ell,m}}{d\Omega} &= \frac{Z_0}{2k^2\ell(\ell+1)} |\check{C}_{\ell,m}^M|^2 \\ &\times \left[\frac{(\ell-m)(\ell+m+1)}{2} |Y_{\ell,m+1}|^2 + \frac{(\ell+m)(\ell-m+1)}{2} |Y_{\ell,m-1}|^2 \right. \\ &\quad \left. + m^2 |Y_{\ell,m}|^2 \right] \quad (25.416) \end{aligned}$$

Além disso, calcule explicitamente $\frac{d\langle P \rangle_{\ell,m}}{d\Omega}$ para $\ell = 1$, $m = -1, 0, 1$.

- 25.7** Seguindo o exemplo 25.5, estude uma associação de antenas de meia-onda excitadas com uma diferença de fase de π entre uma antena e a seguinte, e obtenha $\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega}$.
- 25.8** Considerando uma associação de N antenas de onda completa e seguindo o exemplo 25.5, obtenha as mesmas grandezas determinadas naquele exemplo.

Capítulo 26

Radiação, III: Guias de Ondas Eletromagnéticas

Em várias aplicações práticas, energia eletromagnética é gerada num certo local (num “gerador”) e transportada para ser utilizada noutro (a “carga”) por meio de algum tipo de guia de ondas eletromagnéticas. As características específicas do gerador e da carga não são relevantes aqui, mas estamos interessados em discutir como se comportam os campos eletromagnéticos e as ondas eletromagnéticas existentes nas guias. Uma característica importante desses objetos consiste no fato de que eles selecionam, de acordo com a geometria específica, alguns valores de frequência que são permitidos para as ondas que neles se propagam, o que faz com que tais equipamentos também possam ser usados como filtros de frequência. Algumas aplicações incluem fornos de microondas, cabos coaxiais de TV a cabo e fibras ópticas, todos muito comuns nos dias de hoje. É importante frisar que nosso objetivo é estudar alguns sistemas simples, que forneçam fundamentos físicos a respeito dos fenômenos que ocorrem, sem nos aprofundarmos em demasia no assunto por causa do grau de complexidade técnica a que se pode chegar. Vejamos então alguns sistemas relevantes.

26.1 Propagação de Ondas entre Dois Planos Condutores

O primeiro sistema simples que vamos estudar consiste em dois planos condutores paralelos separados por uma distância d . Para simplificar, vamos considerar os condutores como sendo perfeitos, de modo que os campos no interior dos planos se anulam. Além disso, entre os planos temos vácuo, de modo que na região $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$. A figura 26.1 ilustra a situação.

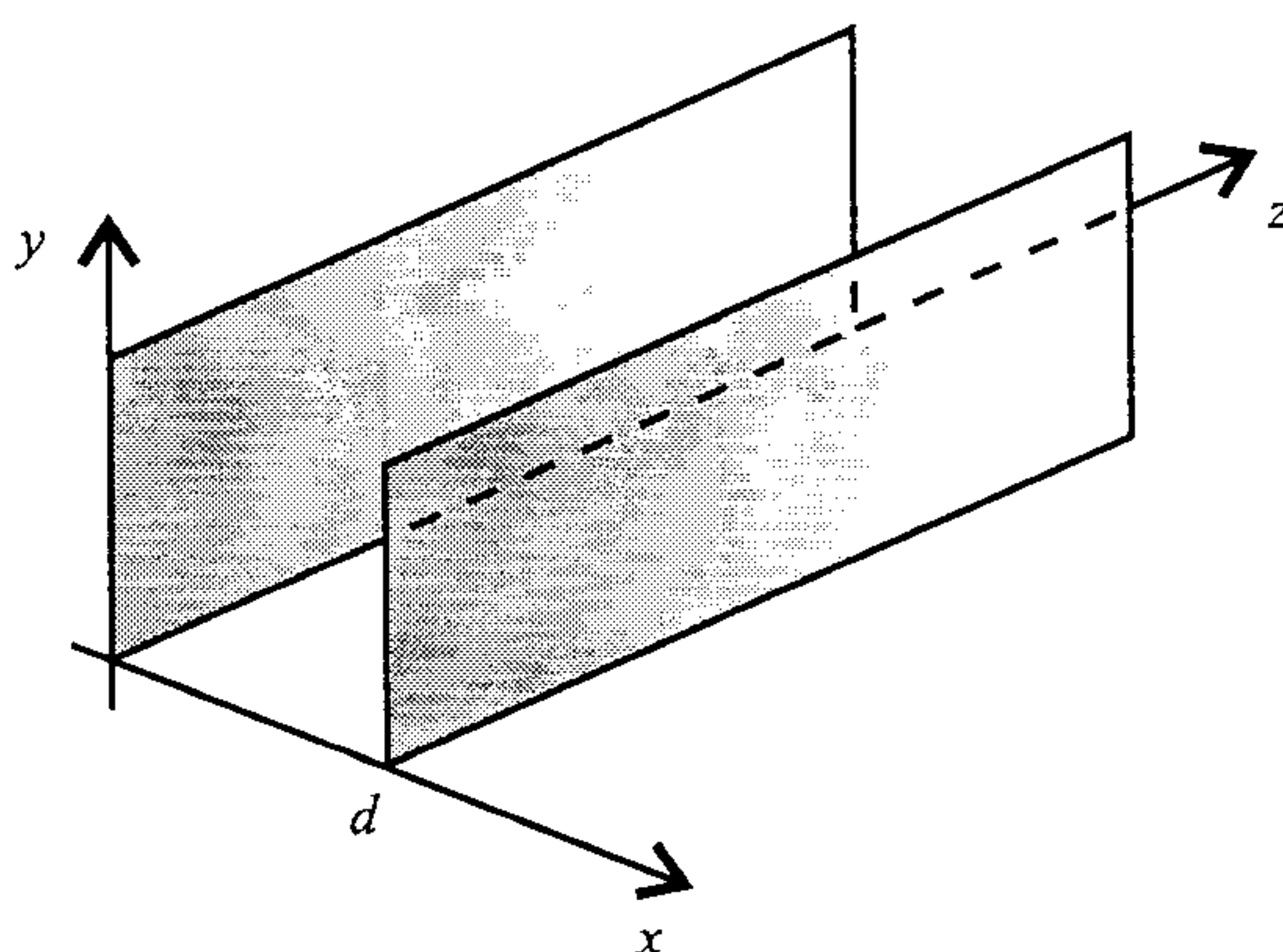


Figura 26.1: Guia de ondas eletromagnéticas formada por dois planos condutores perfeitos separados por uma distância d .

É fácil perceber, pela geometria da situação, que uma onda eletromagnética que entre na região entre os planos vai sofrer sucessivas reflexões nos planos até eventualmente sair pelo outro lado, e vai haver transferência de energia ao longo da direção z . Para estudarmos o comportamento dos campos eletromagnéticos na região, podemos considerar duas situações básicas. Na primeira, $\vec{E}$ está orientado paralelamente ao eixo y , $\vec{k}$ está no plano xz e $\vec{B}$ é perpendicular tanto a $\vec{E}$ como a $\vec{k}$, como mostra a figura 26.2. Este modo corresponde a uma onda polarizada na direção y , sendo seu campo elétrico transversal à direção de propagação da energia. Essa polarização também é conhecida como *modo elétrico transversal*, ou modo ET.

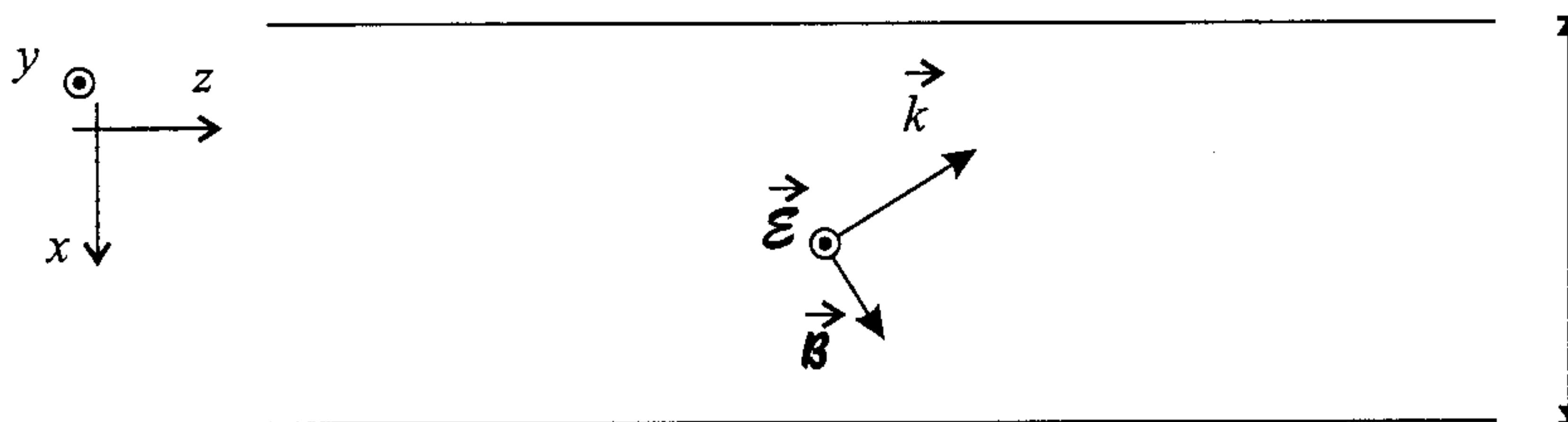


Figura 26.2: Disposição dos campos num ponto entre os dois planos condutores da guia de ondas para uma onda polarizada com campo elétrico transversal à direção de propagação (modo ET).

No outro modo, temos as orientações dos campos trocadas entre si. O campo $\vec{B}$ fica na direção y , $\vec{k}$ situa-se no plano xz enquanto $\vec{E}$ é perpendicular aos dois. Nesse caso, $\vec{B}$ é transversal à direção de propagação da energia, e temos um *modo transversal magnético*, ou modo MT. Vamos estudar o que ocorre no caso de um modo ET. O desenvolvimento para o modo MT é muito similar e será deixado como exercício para o leitor (veja o exercício 26.1). Vamos precisar definir algumas grandezas, como mostra a figura 26.3.

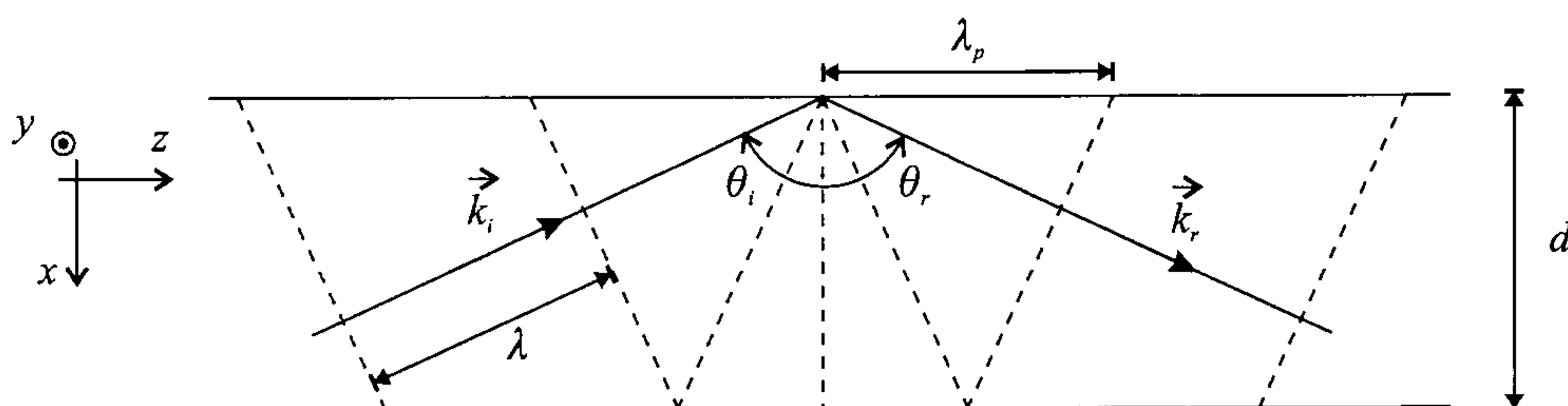


Figura 26.3: Grandezas relevantes para o estudo da propagação do modo ET entre dois planos condutores.

As linhas tracejadas inclinadas na figura estão separadas espacialmente por um comprimento de onda λ da onda eletromagnética de vetor de onda incidente $\vec{k}_i$ no ponto considerado. Após a reflexão, λ e k continuam a ter o mesmo módulo, mas $\vec{k}_f$ tem direção diferente, conforme já estudamos anteriormente. Sendo o campo elétrico no interior dos planos condutores nulo, as condições de contorno 19.28 nas interfaces tornam-se

$$\vec{\mathcal{D}} \cdot \hat{n} = \varsigma \quad (26.1a)$$

$$\vec{\mathcal{B}} \cdot \hat{n} = 0 \quad (26.1b)$$

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (26.1c)$$

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}_\ell \quad (26.1d)$$

onde ς e $\vec{J}_\ell$ são as extensões complexas da densidade superficial de carga e corrente, respectivamente, que podem existir na interface entre os meios condutores e o vácuo para garantir a neutralidade dos campos dentro dos condutores. Essas condições de contorno impõem algumas restrições aos campos nas interfaces entre os condutores e o vácuo. Por exemplo, como $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \hat{j}$ e $\hat{n} = \mp \hat{i}$ nas interfaces (o sinal negativo vale para o plano condutor superior e o positivo para o inferior), a equação 26.1c, lembrando que $d\vec{\ell} = dy \hat{j} + dz \hat{k}$, impõe que em $x = 0$ e em $x = d$ o campo $\vec{\mathcal{E}}$ tangencial deve se anular. Com relação a $\vec{\mathcal{B}}$, como $\vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_x \hat{i} + \mathcal{B}_z \hat{k}$ e está no mesmo plano que $\hat{n}$, a equação 26.1b indica que a componente normal de $\vec{\mathcal{B}}$ também se anula em $x = 0$ e $x = d$. Note que não estamos interessados em determinar as formas explícitas de ς ou $\vec{J}_\ell$, e de fato isso não será necessário para a obtenção dos campos na região entre os planos.

Para continuar, vamos precisar escrever os vetores

$$\vec{k}_i = -k_i \cos \theta_i \hat{i} + k_i \sin \theta_i \hat{k} \quad (26.2)$$

e

$$\vec{k}_r = k_r \cos \theta_i \hat{i} + k_r \sin \theta_i \hat{k} \quad (26.3)$$

Com isso, o campo elétrico da onda incidente pode ser escrito como

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_{0_i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{j}$$

ou, como $\vec{r} = x \hat{i} + z \hat{k}$ e $|\vec{k}_i| = k$, temos

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_{0_i} e^{-i\omega t} e^{ik(-x \cos \theta_i + z \sin \theta_i)} \hat{j} \quad (26.4)$$

O campo elétrico refletido é dado por

$$\vec{\mathcal{E}}_r = \mathcal{E}_{0_r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{j}$$

ou, como $|\vec{k}_r| = k$ e $\theta_r = \theta_i$ numa reflexão,

$$\vec{\mathcal{E}}_r = \mathcal{E}_{0_r} e^{-i\omega t} e^{ik(x \cos \theta_i + z \sin \theta_i)} \hat{\mathbf{j}} \quad (26.5)$$

Agora, no plano condutor superior, em $x = 0$, devemos ter a condição 26.1c satisfeita, o que ocorre se

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

ou

$$(\vec{\mathcal{E}}_i + \vec{\mathcal{E}}_r)_{x=0} \cdot (dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) = 0$$

Substituindo os campos dados pelas equações 26.4 e 26.5, temos

$$(\mathcal{E}_{0_i} e^{-i\omega t} e^{ikz \sin \theta_i} \hat{\mathbf{j}} + \mathcal{E}_{0_r} e^{-i\omega t} e^{ikz \sin \theta_i} \hat{\mathbf{j}}) \cdot (dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) = 0$$

ou

$$(\mathcal{E}_{0_i} + \mathcal{E}_{0_r}) e^{-i\omega t} e^{ikz \sin \theta_i} dy = 0$$

que deve ser válida para qualquer tempo e qualquer z , o que implica que temos

$$\mathcal{E}_{0_r} = -\mathcal{E}_{0_i} \quad (26.6)$$

e a expressão 26.5 fica

$$\vec{\mathcal{E}}_r = -\mathcal{E}_{0_i} e^{-i\omega t} e^{ik(x \cos \theta_i + z \sin \theta_i)} \hat{\mathbf{j}} \quad (26.7)$$

Assim, o campo elétrico total na região entre os condutores é dado por

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_i + \vec{\mathcal{E}}_r$$

ou, usando 26.4 e 26.7,

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{0_i} e^{-i\omega t} e^{ik(-x \cos \theta_i + z \sin \theta_i)} \hat{\mathbf{j}} - \mathcal{E}_{0_i} e^{-i\omega t} e^{ik(x \cos \theta_i + z \sin \theta_i)} \hat{\mathbf{j}}$$

que se torna

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{0_i} e^{-i\omega t} e^{ikz \sin \theta_i} (e^{ikx \cos \theta_i} - e^{-ikx \cos \theta_i}) \hat{\mathbf{j}}$$

Lembrando que

$$\text{sen } \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

podemos escrever

$$\vec{\mathcal{E}} = -2i\mathcal{E}_{0_i} e^{-i\omega t} \text{sen}(kx \cos \theta_i) e^{ikz \text{sen } \theta_i} \hat{\mathbf{j}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = -2i\mathcal{E}_{0_i} \text{sen}(kx \cos \theta_i) e^{i(kz \text{sen } \theta_i - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (26.8)$$

Agora, devemos verificar a condição de contorno 26.1c no plano inferior, em $x = d$, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}(x = d) \cdot (dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) = 0$$

ou

$$-2i\mathcal{E}_{0_i} \text{sen}(kd \cos \theta_i) e^{i(kz \text{sen } \theta_i - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \cdot (dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) = 0$$

o que resulta em

$$\text{sen}(kd \cos \theta_i) dy = 0$$

fornecendo a condição

$$kd \cos \theta_i = n\pi \quad (26.9)$$

onde n é um número natural, o que indica que, se fixarmos a distância d entre os condutores e o ângulo de incidência θ_i , existe um conjunto discreto de comprimentos de onda que são possíveis dentro da região entre os condutores. Apenas ondas com comprimento de onda λ_n dados por

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} d \cos \theta_i = n\pi$$

ou seja, comprimentos de onda descritos por

$$\lambda_n = \frac{2}{n} d \cos \theta_i \quad (26.10)$$

correspondendo às frequências angulares

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{d \cos \theta_i} \quad (26.11)$$

podem se propagar pela guia de ondas formada pelos planos condutores. Outros valores de λ estão associados com ondas que não satisfazem as condições de contorno, sendo proibidas de existirem na região. Vamos definir dois números de onda (com os respectivos comprimentos de onda) que estão associados ao sistema considerado. O primeiro, chamado de número de onda da guia de ondas, é dado por

$$k_g = k \sin \theta_i \quad (26.12)$$

com o respectivo comprimento de onda da guia de ondas dado por

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sin \theta_i} \quad (26.13)$$

O segundo número de onda importante é o número de onda de corte

$$k_c = k \cos \theta_i \quad (26.14)$$

que corresponde ao comprimento de onda de corte

$$\lambda_c = \frac{\lambda}{\cos \theta_i} = \frac{2d}{n} \quad (26.15)$$

onde usamos a equação 26.10 para escrever λ em termos de n , d e θ_i . Vamos inverter as equações 26.13 e 26.15, elevá-las ao quadrado e somá-las, isto é,

$$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{\sin^2 \theta_i}{\lambda^2} + \frac{\cos^2 \theta_i}{\lambda^2}$$

ou

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (26.16)$$

Em termos dos números de onda, temos, multiplicado a expressão 26.16 por $(2\pi)^2$,

$$k^2 = k_g^2 + k_c^2 \quad (26.17)$$

Podemos reescrever a expressão 26.17 na forma

$$k_g^2 = k^2 - k_c^2$$

ou

$$k_g = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} - \frac{(2\pi)^2}{\lambda_c^2}}$$

ou ainda,

$$k_g = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}} \quad (26.18)$$

Além disso, o campo elétrico 26.8 pode ser reescrito mediante as equações 26.9 e 26.12, como

$$\vec{\mathcal{E}} = -2i\mathcal{E}_{0i} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \hat{\mathbf{j}} \quad (26.19)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} = -2i\mathcal{E}_{0i} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) e^{ik_g z} e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{j}} \quad (26.20)$$

Assim, vemos que, se k_g for real, o que ocorre, pela expressão 26.18, quando $\lambda < \lambda_c$, o campo elétrico é descrito por uma equação oscilante, propagando-se na região da guia de ondas realmente como uma onda. Por outro lado, se $\lambda > \lambda_c$, k_g se torna puramente imaginário e o termo $e^{ik_g z}$ na equação 26.20 se converte numa exponencial real decrescente, indicando que o campo será amortecido na direção de propagação z , e a onda se extinguirá após deslocar-se em z por uma distância característica dada por $\frac{1}{|k_g|}$. Essa onda, chamada de onda evanescente, tem um comportamento similar àquele estudado na seção 23.2.3, onde vimos a reflexão interna total. Sendo assim, o comprimento de onda de corte λ_c estabelece um limite para o valor de λ a partir do qual não ocorre mais propagação de ondas, e é esta a razão para o seu nome. Note que isso significa que apenas frequências angulares maiores que ω_c podem se propagar, o que faz com que a guia de ondas seja o que chamamos de um *filtro passa-alta*. Da expressão 26.15, temos, para ω_c ,

$$\omega_c = c \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{n\pi c}{d} \quad (26.21)$$

e, para a frequência de corte ν_c ,

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{nc}{2d} \quad (26.22)$$

Assim, se $n = 2$, por exemplo, temos, por 26.15,

$$\lambda_c = \frac{2d}{2} = d$$

e também, por 26.21,

$$\omega_c = \frac{2\pi c}{d}$$

Como as possíveis frequências angulares são dadas pela equação 26.11,

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{d \cos \theta_i}$$

sendo que usamos o índice m para não haver confusões com o índice n , apenas ondas com frequências angulares tais que

$$\omega_m > \omega_c$$

ou seja, com valores de m dados por

$$\frac{m\pi c}{d \cos \theta_i} > \frac{2\pi c}{d}$$

ou então, por

$$m > 2 \cos \theta_i$$

poderão se propagar pela guia de ondas. Quaisquer outras frequências serão impedidas de existir, ou porque não satisfazem as condições de contorno ou porque geram ondas evanescentes.

Duas outras grandezas relevantes devem ser determinadas. São elas a velocidade de fase e a velocidade de grupo, dadas, respectivamente, pelas equações 22.125,

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

e 22.126,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Observando a equação 26.19, vemos que a velocidade de fase para propagação ao longo da direção z fica

$$v_f = \frac{\omega}{k_g}$$

ou, utilizando a equação 26.12,

$$v_f = \frac{\omega}{k \sin \theta_i}$$

que fica, como $\omega = ck$,

$$v_f = \frac{c}{\sin \theta_i} \quad (26.23)$$

Com relação à velocidade de grupo, vamos considerar a equação 26.17, que pode ser escrita como

$$k = \sqrt{k_g^2 + k_c^2} \quad (26.24)$$

ou

$$\frac{\omega}{c} = \sqrt{k_g^2 + k_c^2}$$

e então,

$$\omega = c\sqrt{k_g^2 + k_c^2} \quad (26.25)$$

Agora, calculamos

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = c \frac{\frac{1}{2}2k_g}{\sqrt{k_g^2 + k_c^2}}$$

ou, usando 26.24,

$$v_g = c \frac{k_g}{k}$$

que pode ser simplificada se considerarmos 26.12, de modo que

$$v_g = c \sen \theta_i \quad (26.26)$$

Note que

$$v_f v_g = \frac{c}{\sen \theta_i} c \sen \theta_i = c^2 \quad (26.27)$$

que é uma relação válida em geral para guias de onda. Além disso, a velocidade de fase dada por 26.23 é sempre maior ou no máximo igual a c , enquanto a velocidade de grupo dada por 26.26 é sempre menor ou igual a c . Isso não causa problemas, já que a informação, e a energia, são transferidas com a velocidade de grupo, e não com a de fase, conforme já discutimos na seção 22.5. Outra questão a ressaltar é que, em geral, haverá sempre alguma restrição com relação às possíveis frequências que serão permitidas para as ondas eletromagnéticas que se propagam numa guia de ondas, e as restrições dependem da geometria da guia. Vamos passar agora ao estudo de guias de ondas formadas por um condutor oco em forma de tubo de seção transversal constante.

26.2 Guias de Ondas Formadas por um Condutor Oco em Forma de Tubo

Vamos considerar agora o que ocorre quando temos uma guia de ondas formada por uma superfície condutora oca na forma de um tubo de seção transversal de formato qualquer mas constante ao longo da guia, como mostra a figura 26.4. Tais guias são usadas em aplicações tecnológicas envolvendo frequências da ordem de microondas, na faixa de $\nu = 3$ GHz a $\nu = 100$ GHz, ou, em termos de comprimentos de onda, na faixa de $\lambda = 0,1$ m até $\lambda = 3$ mm. Um exemplo prático de aplicação consiste em guiar as microondas produzidas no forno de microondas do gerador de frequências até o “prato” do forno, onde fica a comida a ser cozida.

O eixo do condutor, suposto perfeito, está na direção z , e ele é preenchido por um material dielétrico caracterizado por constantes (ϵ, μ) . Considerando que a dependência temporal dos campos seja dada por uma forma harmônica do tipo $e^{-i\omega t}$, as equações de Maxwell dadas em 22.34 tornam-se, já fazendo as devidas extensões complexas,

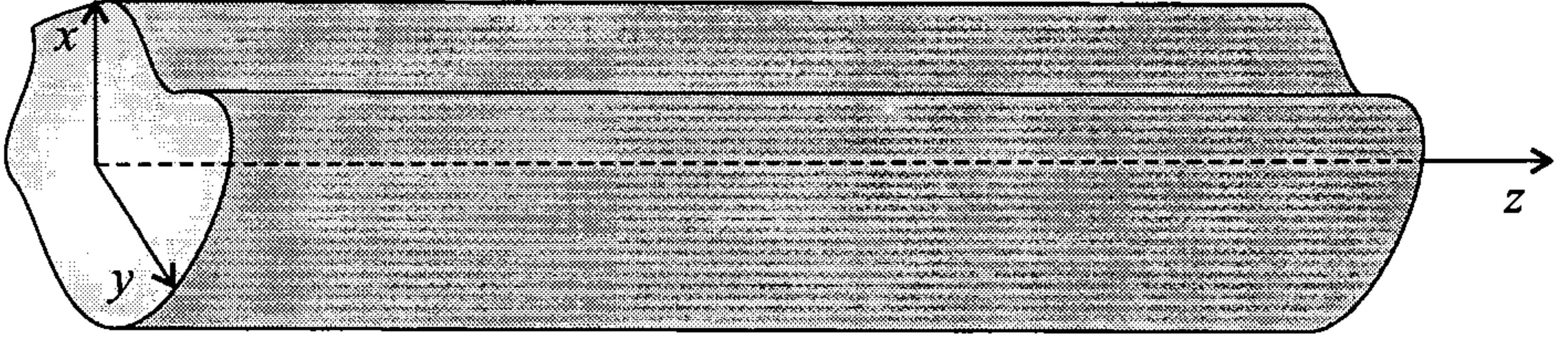


Figura 26.4: Guia de onda oca formada por um condutor em forma de tubo de seção transversal arbitrária mas constante.

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (26.28a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (26.28b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i\omega \vec{\mathcal{B}} \quad (26.28c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = -i\omega\mu\epsilon\vec{\mathcal{E}} \quad (26.28d)$$

Como fazemos sempre, vamos considerar o rotacional da equação 26.28c, para obter

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i\omega \nabla \times \vec{\mathcal{B}}$$

ou, usando a equação 26.28d e a identidade 1.58c, obtemos

$$\nabla(\overbrace{\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}}^0) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \omega^2 \mu\epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

e, finalmente, obtemos uma equação de Helmholtz para $\vec{\mathcal{E}}$,

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (26.29)$$

Considerando agora o rotacional da expressão 26.28d, temos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{B}} = -i\omega\mu\epsilon \nabla \times \vec{\mathcal{E}}$$

Reescrevemos esta expressão usando as equações 26.28c e 1.58c, de modo que

$$\nabla(\overbrace{\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}}^0) - \nabla^2 \vec{\mathcal{B}} = \omega^2 \mu\epsilon \vec{\mathcal{B}}$$

ou

$$\nabla^2 \vec{B} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{B} = 0 \quad (26.30)$$

que é uma outra equação de Helmholtz, agora para $\vec{B}$. Supondo que as ondas se propaguem na direção z , vamos considerar que as soluções sejam dadas por combinações lineares apropriadas das funções

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.31)$$

e

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.32)$$

onde $k = |\vec{k}|$ é um número de onda ainda indeterminado, podendo ser real ou complexo. Vamos definir o operador Laplaciano transversal por meio de

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (26.33)$$

de modo que, explicitamente, em coordenadas retangulares,

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (26.34)$$

Assim, a equação 26.29 pode ser escrita como

$$\left[\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0$$

ou, utilizando a forma explícita 26.31,

$$\left[\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \vec{E}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} = 0$$

que fica, efetuando as devidas simplificações,

$$[\nabla_t^2 - k^2 + \omega^2 \mu \epsilon] \vec{E} = 0 \quad (26.35)$$

A substituição das expressões 26.31 e 26.34 em 26.30 resulta em

$$[\nabla_t^2 - k^2 + \omega^2 \mu \epsilon] \vec{B} = 0 \quad (26.36)$$

Vamos decompor os campos numa componente transversal e numa componente na direção z , mediante

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_t + \vec{\mathcal{E}}_z \quad (26.37a)$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}_t + \vec{\mathcal{B}}_z \quad (26.37b)$$

onde

$$\vec{\mathcal{E}}_z = \mathcal{E}_z \hat{\mathbf{k}} \quad (26.38a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_z = \mathcal{B}_z \hat{\mathbf{k}} \quad (26.38b)$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \mathcal{E}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{j}} \quad (26.39a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \mathcal{B}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B}_y \hat{\mathbf{j}} \quad (26.39b)$$

Podemos também escrever, de uma forma concisa,

$$\vec{\mathcal{E}}_t = (\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}) \times \hat{\mathbf{k}} \quad (26.40a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t = (\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}) \times \hat{\mathbf{k}} \quad (26.40b)$$

já que, calculando

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}} = \hat{\mathbf{k}} \times (\mathcal{E}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{j}} + \vec{\mathcal{E}}_z)$$

temos

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \hat{\mathbf{j}} - \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{i}}$$

e assim,

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}) \times \hat{\mathbf{k}} = (\mathcal{E}_x \hat{\mathbf{j}} - \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{i}}) \times \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}) \times \hat{\mathbf{k}} = \mathcal{E}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{j}}$$

e, finalmente,

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}) \times \hat{\mathbf{k}} = \vec{\mathcal{E}}_t$$

demonstrando a expressão 26.40a. A expressão 26.40b segue a mesma idéia. Vamos definir também o operador nabla transverso, por intermédio de

$$\nabla_t = \nabla - \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (26.41)$$

ou, explicitamente, em coordenadas retangulares,

$$\nabla_t = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \quad (26.42)$$

Com as definições 26.37–26.40, os campos dados por 26.31 e 26.32 tornam-se

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z, t) + \vec{\mathcal{E}}_z(x, y, z, t) = [\vec{\mathcal{E}}_t(x, y) + \vec{\mathcal{E}}_z(x, y)] e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.43)$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t) + \vec{\mathcal{B}}_z(x, y, z, t) = [\vec{\mathcal{B}}_t(x, y) + \vec{\mathcal{B}}_z(x, y)] e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.44)$$

Com o uso das equações 26.37–26.44, as equações de Maxwell 26.28 podem ser reescritas de uma forma mais interessante. Começando com 26.28a, temos

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

ou

$$[\nabla_t + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}] \cdot (\vec{\mathcal{E}}_t + \vec{\mathcal{E}}_z) = 0$$

que fica

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{E}}_t + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0$$

ou

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z, t) = -\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y, z, t)}{\partial z} \quad (26.45)$$

sendo que, explicitamente, temos, já efetuando as derivações e simplificações,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y(x, y)}{\partial y} = \mp ik \mathcal{E}_z(x, y) \quad (26.46)$$

A equação de Maxwell 26.28b fica

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

ou

$$[\nabla_t + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}] \cdot (\vec{\mathcal{B}}_t + \vec{\mathcal{B}}_z) = 0$$

que se torna

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{B}}_t + \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} = 0$$

e então,

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t) = -\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y, z, t)}{\partial z} \quad (26.47)$$

ou, explicitamente,

$$\frac{\partial \mathcal{B}_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}_y(x, y)}{\partial y} = \mp ik \mathcal{B}_z(x, y) \quad (26.48)$$

O próximo passo consiste em manipular a equação 26.28c, que é

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i\omega \vec{\mathcal{B}}$$

e que fica

$$[\nabla_t + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}] \times (\vec{\mathcal{E}}_t + \vec{\mathcal{E}}_z) = i\omega (\vec{\mathcal{B}}_t + \vec{\mathcal{B}}_z)$$

ou

$$\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_t + \nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z + \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} = i\omega \vec{\mathcal{B}}_t + i\omega \vec{\mathcal{B}}_z \quad (26.49)$$

Considere inicialmente que tomamos o produto escalar de $\hat{\mathbf{k}}$ com a equação 26.49. Com isso, obtemos

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_t) + \hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) + \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} \right] = i\omega \hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_t + i\omega \hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_z$$

Agora, devemos lembrar que o produto vetorial de dois vetores é perpendicular aos dois vetores e que o produto escalar de dois vetores ortogonais é nulo. Então, com ∇_t sendo dado por 26.42, temos que o segundo e o terceiro termos do lado esquerdo e o primeiro termo do lado direito da equação acima são nulos, restando apenas

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z, t)] = i\omega \mathcal{B}_z(x, y, z, t) \quad (26.50)$$

Explicitando, temos

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left\{ \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right] \times (\mathcal{E}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{j}}) e^{\pm ikz - i\omega t} \right\} = i\omega \mathcal{B}_z(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t}$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{E}_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x(x, y)}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{k}} \right\} e^{\pm ikz - i\omega t} = i\omega \mathcal{B}_z(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.51)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x(x, y)}{\partial y} = i\omega \mathcal{B}_z(x, y) \quad (26.52)$$

Considere agora o produto vetorial de $\hat{\mathbf{k}}$ com a equação 26.49,

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_t) + \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} \right] = i\omega \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_t + i\omega \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_z$$

O último termo se anula e, como o termo entre colchetes na expressão 26.51 corresponde ao termo entre parênteses que aparece no primeiro termo, vemos que ele também se anula, pois é o produto vetorial de dois vetores paralelos. Então, ficamos com

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} \right] = i\omega \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_t \quad (26.53)$$

que pode ser reescrita se fizermos algumas manipulações. Para a primeira, calculamos

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) = \hat{\mathbf{k}} \times \left\{ \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right] \mathcal{E}_z \hat{\mathbf{k}} \right\}$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) = \hat{\mathbf{k}} \times \left\{ -\hat{\mathbf{j}} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} \right\}$$

que fica

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}$$

e, por fim,

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) = \nabla_t \mathcal{E}_z(x, y, z, t) \quad (26.54)$$

A outra manipulação consiste em reescrever o segundo termo em 26.53 usando a identidade 1.19a, de modo que

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} \right] = \overbrace{\left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} \right)}^0 \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z}$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} \quad (26.55)$$

Assim, usando as equações 26.54 e 26.55 em 26.53, obtemos

$$\nabla_t \mathcal{E}_z(x, y, z, t) - \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z, t)}{\partial z} = i\omega \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t) \quad (26.56)$$

Explicitando os termos, temos

$$\begin{aligned} e^{\pm ikz - i\omega t} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + e^{\pm ikz - i\omega t} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \\ \mp ik [\mathcal{E}_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{E}_y(x, y) \hat{\mathbf{j}}] e^{\pm ikz - i\omega t} = \\ i\omega \hat{\mathbf{k}} \times [\mathcal{B}_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B}_y(x, y) \hat{\mathbf{j}}] e^{\pm ikz - i\omega t} \end{aligned}$$

ou

$$\left[\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \mp ik\mathcal{E}_x(x, y) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \mp ik\mathcal{E}_y(x, y) \right] \hat{\mathbf{j}} = -i\omega\mathcal{B}_y(x, y) \hat{\mathbf{i}} + i\omega\mathcal{B}_x(x, y) \hat{\mathbf{j}}$$

de onde achamos

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \mp ik\mathcal{E}_x(x, y) = -i\omega\mathcal{B}_y(x, y) \quad (26.57)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \mp ik\mathcal{E}_y(x, y) = i\omega\mathcal{B}_x(x, y) \quad (26.58)$$

Por fim, a última equação de Maxwell, dada em 26.28d,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = -i\omega\mu\epsilon\vec{\mathcal{E}}$$

torna-se

$$\left[\nabla_t + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times (\vec{\mathcal{B}}_t + \vec{\mathcal{B}}_z) = -i\omega\mu\epsilon(\vec{\mathcal{E}}_t + \vec{\mathcal{E}}_z)$$

ou

$$\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_t + \nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_z + \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} = -i\omega\mu\epsilon\vec{\mathcal{E}}_t - i\omega\mu\epsilon\vec{\mathcal{E}}_z \quad (26.59)$$

Primeiro, efetuamos o produto escalar com $\hat{\mathbf{k}}$, ou seja,

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_t) + \hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_z) + \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} \right] = -i\omega\mu\epsilon\hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_t - i\omega\mu\epsilon\hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_z$$

Novamente, o segundo e o terceiro termos do lado esquerdo são nulos, assim como o primeiro do lado direito, restando

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t)] = -i\omega\mu\epsilon\mathcal{E}_z(x, y, z, t) \quad (26.60)$$

ou, de forma explícita,

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left\{ \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right] \times (\mathcal{B}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B}_y \hat{\mathbf{j}}) e^{\pm ikz - i\omega t} \right\} = -i\omega\mu\epsilon\mathcal{E}_z(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t}$$

ou ainda,

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left\{ e^{\pm ikz - i\omega t} \left[\frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{k}} \right\} = -i\omega\mu\epsilon\mathcal{E}_z(x, y)e^{\pm ikz - i\omega t}$$

que fica

$$\frac{\partial \mathcal{B}_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{B}_x(x, y)}{\partial y} = -i\omega\mu\epsilon\mathcal{E}_z(x, y) \quad (26.61)$$

Façamos agora o produto vetorial entre $\hat{\mathbf{k}}$ e 26.59,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_t) + \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_z) + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} \right] \\ = -i\omega\mu\epsilon\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_t - i\omega\mu\epsilon\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_z \end{aligned}$$

Agora, o que se anula é o primeiro termo do lado esquerdo e o segundo do lado direito, de modo que

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_z) + \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} \right] = -i\omega\mu\epsilon\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_t \quad (26.62)$$

Podemos reescrever esta expressão numa forma mais interessante. Para isso, considere o primeiro termo do lado esquerdo, isto é,

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_z) = \hat{\mathbf{k}} \times \left\{ \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right] \mathcal{B}_z \hat{\mathbf{k}} \right\}$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) = \hat{\mathbf{k}} \times \left\{ -\hat{\mathbf{j}} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x} + \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y} \right\}$$

que se torna

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_z) = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y}$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_z) = \nabla_t \mathcal{B}_z(x, y, z, t) \quad (26.63)$$

Vamos considerar agora o segundo termo do lado esquerdo de 26.62, usando a identidade 1.19a, de modo que

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} \right] = \overbrace{\left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} \right)}^0 \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z}$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} \right] = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} \quad (26.64)$$

Assim, usando as equações 26.63 e 26.64 em 26.62, obtemos

$$\nabla_t \mathcal{B}_z(x, y, z, t) - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t)}{\partial z} = -i\omega\mu\epsilon \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z, t) \quad (26.65)$$

Explicitando os termos, temos

$$\begin{aligned} e^{\pm ikz - i\omega t} \frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + e^{\pm ikz - i\omega t} \frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \\ \mp ik [\mathcal{B}_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B}_y(x, y) \hat{\mathbf{j}}] e^{\pm ikz - i\omega t} = \\ -i\omega\mu\epsilon \hat{\mathbf{k}} \times [\mathcal{E}_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{E}_y(x, y) \hat{\mathbf{j}}] e^{\pm ikz - i\omega t} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \mp ik \mathcal{B}_x(x, y) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \mp ik \mathcal{B}_y(x, y) \right] \hat{\mathbf{j}} = \\ i\omega\mu\epsilon \mathcal{B}_y(x, y) \hat{\mathbf{i}} - i\omega\mu\epsilon \mathcal{B}_x(x, y) \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

de onde achamos

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \mp ik \mathcal{B}_x(x, y) = i\omega\mu\epsilon \mathcal{E}_y(x, y) \quad (26.66)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \mp ik \mathcal{B}_y(x, y) = -i\omega\mu\epsilon \mathcal{E}_x(x, y) \quad (26.67)$$

Vamos agora reescrever a equação 26.57 na forma

$$\mathcal{B}_y(x, y) = \frac{i}{\omega} \left[\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \mp ik \mathcal{E}_x(x, y) \right] \quad (26.68)$$

e vamos substituir a equação 26.68 na expressão 26.67, ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \mp ik \left\{ \frac{i}{\omega} \left[\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \mp ik \mathcal{E}_x(x, y) \right] \right\} = -i\omega\mu\epsilon \mathcal{E}_x(x, y)$$

de modo que temos

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \pm \frac{k}{\omega} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} - \frac{ik^2}{\omega} \mathcal{E}_x(x, y) = -i\omega\mu\epsilon \mathcal{E}_x(x, y)$$

ou

$$\frac{ik^2}{\omega} \mathcal{E}_x(x, y) - i\omega\mu\epsilon \mathcal{E}_x(x, y) = \frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \pm \frac{k}{\omega} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x}$$

que fica

$$\frac{i}{\omega} (k^2 - \omega^2\mu\epsilon) \mathcal{E}_x(x, y) = \frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \pm \frac{k}{\omega} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x}$$

ou então,

$$\mathcal{E}_x(x, y) = \frac{i\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \left[\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \pm \frac{k}{\omega} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \right] \quad (26.69)$$

Vamos agora reescrever a equação 26.58, isto é,

$$\mathcal{B}_x(x, y) = -\frac{i}{\omega} \left[\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \mp ik \mathcal{E}_y(x, y) \right] \quad (26.70)$$

Vamos utilizar a equação 26.70 em 26.66, que fica

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \mp ik \left\{ -\frac{i}{\omega} \left[\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \mp ik \mathcal{E}_y(x, y) \right] \right\} = i\omega\mu\epsilon \mathcal{E}_y(x, y)$$

ou

$$\frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \mp \frac{k}{\omega} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} + \frac{ik^2}{\omega} \mathcal{E}_y(x, y) = i\omega\mu\epsilon \mathcal{E}_y(x, y)$$

que pode ser escrito como

$$i\omega\mu\epsilon\mathcal{E}_y(x, y) - \frac{ik^2}{\omega}\mathcal{E}_y(x, y) = \frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \mp \frac{k}{\omega} \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y}$$

ou

$$\frac{i}{\omega}(\omega^2\mu\epsilon - k^2)\mathcal{E}_y(x, y) = \frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \mp \frac{k}{\omega} \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y}$$

e assim,

$$\mathcal{E}_y(x, y) = -\frac{i\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \left[\frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \mp \frac{k}{\omega} \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \right] \quad (26.71)$$

Agora, utilizamos a expressão 26.69 em 26.68, e achamos

$$\mathcal{B}_y(x, y) = \frac{i}{\omega} \left\{ \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \mp ik \left\{ \frac{i\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \left[\frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \pm \frac{k}{\omega} \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \right] \right\} \right\}$$

ou

$$\mathcal{B}_y(x, y) = \frac{i}{\omega} \left\{ \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \pm \frac{k\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} + \frac{k^2}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \right\}$$

ou ainda,

$$\mathcal{B}_y(x, y) = \frac{i}{\omega} \left\{ \frac{\omega^2\mu\epsilon - k^2 + k^2}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \pm \frac{k\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \right\}$$

e, finalmente,

$$\mathcal{B}_y(x, y) = \frac{i\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \left\{ \mu\epsilon \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial x} \pm \frac{k}{\omega} \frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial y} \right\} \quad (26.72)$$

Por último, vamos utilizar a expressão 26.71 na equação 26.70, encontrando

$$\mathcal{B}_x(x, y) = -\frac{i}{\omega} \left\{ \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \mp ik \left\{ -\frac{i\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \left[\frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \mp \frac{k}{\omega} \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \right] \right\} \right\}$$

ou

$$\mathcal{B}_x(x, y) = -\frac{i}{\omega} \left\{ \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \mp \frac{k\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \frac{\partial\mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} + \frac{k^2}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \frac{\partial\mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \right\}$$

que fica

$$\mathcal{B}_x(x, y) = -\frac{i}{\omega} \left\{ \frac{k^2 + \omega^2 \mu \epsilon - k^2}{\omega^2 \mu \epsilon - k^2} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \mp \frac{k\omega}{\omega^2 \mu \epsilon - k^2} \frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \right\}$$

e, finalmente,

$$\mathcal{B}_x(x, y) = -\frac{i\omega}{\omega^2 \mu \epsilon - k^2} \left\{ \mu \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, y)}{\partial y} \mp \frac{k}{\omega} \frac{\partial \mathcal{B}_z(x, y)}{\partial x} \right\} \quad (26.73)$$

O conjunto de equações formado pelas equações 26.69 e 26.71–26.73 pode ser condensado nas expressões

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{i\omega}{\omega^2 \mu \epsilon - k^2} \left[\pm \frac{k}{\omega} \nabla_t \mathcal{E}_z - \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \right] \quad (26.74a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \frac{i\omega}{\omega^2 \mu \epsilon - k^2} \left[\pm \frac{k}{\omega} \nabla_t \mathcal{B}_z - \mu \epsilon \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z \right] \quad (26.74b)$$

Esse conjunto de equações mostra que, se conhecermos as componentes longitudinais $\vec{\mathcal{E}}_z$ e $\vec{\mathcal{B}}_z$, os campos transversais $\vec{\mathcal{E}}_t$ e $\vec{\mathcal{B}}_t$ serão imediatamente obtidos por meio das equações acima. Uma outra consequência interessante pode ser extraída dessas equações. Vamos considerar que fosse possível a existência no interior da guia de ondas de um modo de propagação em que ambos os campos eletromagnéticos fossem transversais à direção de propagação, que é a direção z . Assim, tanto $\vec{\mathcal{E}}_z$ como $\vec{\mathcal{B}}_z$ se anulam. Essa orientação dos campos é conhecida como *modo eletromagnético transversal*, ou modo EMT, para a propagação de ondas. Neste caso, chamando o campo elétrico transversal de $\vec{\mathcal{E}}_t = \vec{\mathcal{E}}_{\text{EMT}}$ e o campo magnético transversal de $\vec{\mathcal{B}}_t = \vec{\mathcal{B}}_{\text{EMT}}$, vemos que eles estão sujeitos às seguintes equações: da expressão 26.45, temos

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\text{EMT}}(x, y, z, t) = 0 \quad (26.75)$$

que fica, utilizando 26.31 e efetuando as simplificações,

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\text{EMT}}(x, y) = 0 \quad (26.76)$$

Da expressão 26.47, obtemos

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{B}}_{\text{EMT}}(x, y, z, t) = 0 \quad (26.77)$$

ou, empregando 26.32,

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{B}}_{\text{EMT}}(x, y) = 0 \quad (26.78)$$

Além disso, a equação 26.50 informa que

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_{\text{EMT}}(x, y, z, t)] = 0$$

o que resulta em, já utilizando 26.31,

$$\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_{\text{EMT}}(x, y) = 0 \quad (26.79)$$

e, por fim, a expressão 26.60 estabelece que

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot [\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_{\text{EMT}}(x, y, z, t)] = 0$$

ou, de 26.32,

$$\nabla_t \times \vec{\mathcal{B}}_{\text{EMT}}(x, y) = 0 \quad (26.80)$$

É interessante notar que, das expressões 26.76 e 26.79, vemos que o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}_{\text{EMT}}$ é derivável de um potencial, de forma similar ao que ocorre num problema eletrostático. Podemos escrever, então,

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{EMT}} = -\nabla_t \Phi(x, y) \quad (26.81)$$

de modo que Φ satisfaz a uma equação de Laplace, ou seja,

$$\nabla_t^2 \Phi = 0$$

Agora, como a superfície de um condutor é uma superfície equipotencial, temos que o potencial elétrico no interior da guia é constante, o que faz com que

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{EMT}} = 0 \quad (26.82)$$

Além disso, utilizando a equação 26.65, temos

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_{\text{EMT}}(x, y, z, t)}{\partial z} = 0$$

a qual, se considerarmos a forma explícita 26.32, resulta em

$$\vec{B}_{\text{EMT}} = 0 \quad (26.83)$$

Portanto, não há campo elétrico e magnético, de modo que não existe onda eletromagnética. Assim, mostramos que modos EMT não podem se propagar através de uma guia de ondas formada por um único condutor oco ¹. Os modos possíveis são associados à situação em que um dos campos pode ser transversal, tendo o outro alguma componente na direção de propagação (ou longitudinal, representada pela direção z), mas ambos não podem ser transversais simultaneamente. Os campos devem ainda satisfazer as condições de contorno 26.1, válidas para uma interface entre um condutor perfeito e um meio qualquer. Em particular, as equações relevantes são as dadas por 26.1b e 26.1c, sendo que esta última também pode ser escrita como

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad (26.84)$$

lembrando que $\hat{n}$, como é um versor normal à superfície condutora, é um versor no plano xy , pois o eixo da guia está paralelo ao eixo z . Além disso, a equação deve ser aplicada a pontos na superfície S do condutor. A outra condição de contorno, dada por 26.1b, é

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (26.85)$$

A equação 26.84 pode ser reescrita mediante a decomposição dada em 26.37, ou seja,

$$\hat{n} \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z) = 0$$

ou

$$\hat{n} \times \vec{E}_t + \hat{n} \times \vec{E}_z = 0$$

Agora, temos que, sendo $\hat{n}$ um versor no plano xy e, portanto, ortogonal à direção z , e estando $\vec{E}_t$ também nesse plano, o resultado do produto vetorial no primeiro termo do lado esquerdo é um vetor na direção z . Por outro lado, sendo $\vec{E}_z = E_z \hat{k}$, o produto vetorial do segundo membro do lado esquerdo é

¹ Tais modos podem ocorrer se houver dois condutores, como ocorre num cabo coaxial, por exemplo.

um vetor no plano xy . Cada termo do lado esquerdo da equação deve, separadamente, ser nulo, para que a equação vetorial se anule em cada componente. No caso específico de $\vec{\mathcal{E}}_z$, temos

$$\left[|\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_z| \right]_S = \left[|\hat{n}| \right]_S \left[|\vec{\mathcal{E}}_z| \right]_S \sin \frac{\pi}{2}$$

o que implica na condição

$$[\mathcal{E}_z]_S = 0 \quad (26.86)$$

onde $[\mathcal{E}_z]_S$ é a componente $\vec{\mathcal{E}}_z$ na superfície S do condutor. A outra condição diz que

$$\left[\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_t \right]_S = 0 \quad (26.87)$$

A outra condição, dada por 26.85, estabelece que, na superfície do condutor,

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}_t + \vec{\mathcal{B}}_z) = 0$$

ou

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_t + \hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_z = 0$$

Sendo $\vec{\mathcal{B}}_z$ ortogonal a $\hat{n}$, achamos

$$\left[\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_t \right]_S = 0 \quad (26.88)$$

Agora, considere o produto escalar de $\hat{n}$ com a equação 26.65, aplicada à superfície S do condutor, isto é,

$$\left\{ \hat{n} \cdot [\nabla_t \mathcal{B}_z(x, y, z, t)] \right\}_S - \left[\hat{n} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t)}{\partial z} \right]_S = -i\omega\mu\epsilon \left\{ \hat{n} \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z, t)] \right\}_S \quad (26.89)$$

Considerando agora a parte transversal da equação 26.32, temos

$$\vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{B}}_t(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t}$$

de modo que

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} = \pm ik \vec{\mathcal{B}}_t(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} = \pm ik \vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t)$$

Assim, podemos reescrever a expressão 26.89 como

$$\begin{aligned} [\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z(x, y, z, t)]_S \pm ik [\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_t(x, y, z, t)]_S = \\ - i\omega\mu\epsilon [\hat{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_t(x, y, z, t)]_S \end{aligned}$$

Em seguida, usando 26.88, trocando a ordem em que o produto misto é feito e usando 26.87, temos

$$[\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z(x, y, z, t)]_S = 0 \quad (26.90)$$

Podemos então dividir as ondas que se propagam na guia de ondas em dois tipos, de acordo com as condições seguidas pelos campos. No primeiro caso, o campo elétrico não tem componente na direção de propagação, sendo portanto transversal, mas o campo magnético possui componente z . Este modo é o modo elétrico transversal, ou modo ET, e ele segue as condições

$$\vec{\mathcal{E}}_{z,ET} \equiv 0, \quad (\text{em todo o espaço}) \quad (26.91a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,ET} \neq 0 \quad (26.91b)$$

$$[\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}]_S = 0 \quad (26.91c)$$

Note que 26.86 é automaticamente satisfeita por 26.91a. As ondas que se propagam no modo ET são também chamadas de ondas magnéticas (ou ondas H). No caso do modo ET, as expressões 26.74 transformam-se em

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = -\frac{i\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \quad (26.92a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET} = \pm \frac{ik}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \quad (26.92b)$$

Vamos definir

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (26.93)$$

e

$$k_c = \sqrt{k_0^2 - k^2} \quad (26.94)$$

de modo que as equações 26.92 tornam-se

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = -\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \quad (26.95a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET} = \pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \quad (26.95b)$$

Vamos calcular agora, usando 26.95b,

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,ET} = \pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}$$

Usando a equação 26.47, obtemos

$$-\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}(x, y, z, t)}{\partial z} = \pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t^2 \mathcal{B}_{z,ET} \quad (26.96)$$

Agora, considerando a componente z da expressão 26.44, temos

$$\vec{\mathcal{B}}_z(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{B}}_z(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.97)$$

de modo que

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_z(x, y, z, t)}{\partial z} = \pm ik \vec{\mathcal{B}}_z(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t}$$

Então, a equação 26.96 fica

$$-(\pm)ik \mathcal{B}_{z,ET}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} = \pm \frac{ik}{k_c^2} e^{\pm ikz - i\omega t} \nabla_t^2 \mathcal{B}_{z,ET}(x, y)$$

ou

$$\nabla_t^2 \mathcal{B}_{z,ET} + k_c^2 \mathcal{B}_{z,ET} = 0 \quad (26.98)$$

que é uma equação de Helmholtz para $\mathcal{B}_{z,ET}(x, y)$ e que determina essa componente juntamente com a condição de contorno 26.91c. Vamos agora calcular, usando a equação 26.92a, o produto vetorial

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = -\frac{i\omega}{\omega^2 \mu \epsilon - k^2} \hat{\mathbf{k}} \times [\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}]$$

Usando a identidade 1.19a, temos

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = -\frac{i\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \left[\overbrace{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})}^0 \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \right]$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = \frac{i\omega}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}$$

Multiplicando esta expressão pelo fator $\pm \frac{k}{\omega}$, temos

$$\pm \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = \pm \frac{ik}{\omega^2\mu\epsilon - k^2} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}$$

e, se compararmos com a expressão 26.92b, veremos que

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET} = \pm \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} \quad (26.99)$$

Assim, a expressão 26.98 fornece o modo de obter $\mathcal{B}_{z,ET}(x, y)$, o qual, por sua vez, determina $\vec{\mathcal{B}}_{t,ET}(x, y)$ e $\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}(x, y)$ mediante as expressões 26.92, ou 26.95, ou ainda, por meio de 26.99. Além disso, a equação 26.99 indica que os campos $\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}$ e $\vec{\mathcal{B}}_{t,ET}$ são ortogonais entre si e também à direção de propagação. Lembre que o que caracteriza o modo ET é o fato de $\vec{\mathcal{E}}_z = 0$, ou seja, não há componente do campo elétrico na direção de propagação, mas há componente de campo magnético nessa direção, dada justamente por $\vec{\mathcal{B}}_z$. Vejamos agora o outro modo possível para a propagação de ondas, que consiste em se ter o campo magnético transversal, sem componente na direção de propagação, enquanto o campo elétrico possui uma componente na direção z . Este caso é chamado de modo magnético transversal, ou modo MT, e as ondas que se propagam nesse modo são chamadas de ondas elétricas, ou ondas E. As condições a que esse modo está sujeito são

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,MT} \equiv 0, \quad (\text{em todo o espaço}) \quad (26.100a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{z,MT} \neq 0 \quad (26.100b)$$

$$[\mathcal{E}_{z,MT}]_S = 0 \quad (26.100c)$$

Neste caso, a condição 26.90 é automaticamente satisfeita por 26.100a, e as equações 26.74 tornam-se

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,MT} = \pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} \quad (26.101a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = -i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} \quad (26.101b)$$

ou seja, sabendo-se $\mathcal{E}_{z,MT}$, os outros campos são obtidos de forma imediata, por meio de 26.101. Vamos considerar agora o divergente transversal da expressão 26.101a, isto é,

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,MT} = \pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t \cdot \nabla_t \mathcal{E}_{z,MT}$$

Utilizando a expressão 26.45, podemos escrever a equação acima como

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_{z,MT}(x, y, z, t)}{\partial z} = \pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t^2 \mathcal{E}_{z,MT} \quad (26.102)$$

Agora, considerando a componente z de 26.43, temos

$$\vec{\mathcal{E}}_z(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{E}}_z(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.103)$$

de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{z,MT}(x, y, z, t)}{\partial z} = \pm ik \vec{\mathcal{E}}_z(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t}$$

Portanto, a equação 26.102 torna-se

$$-(\pm)ik \mathcal{E}_{z,MT}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t} = \pm \frac{ik}{k_c^2} e^{\pm ikz - i\omega t} \nabla_t^2 \mathcal{E}_{z,MT}(x, y)$$

ou

$$\nabla_t^2 \mathcal{E}_{z,MT} + k_c^2 \mathcal{E}_{z,MT} = 0 \quad (26.104)$$

que é a equação de Helmholtz que define $\mathcal{E}_{z,MT}(x, y)$, devendo ser complementada com a condição de contorno 26.100c. Vamos agora relacionar $\vec{\mathcal{E}}_{t,MT}$ e $\vec{\mathcal{B}}_{t,MT}$, calculando, inicialmente, o produto vetorial de $\hat{\mathbf{k}}$ com a equação 26.101b, ou seja,

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = -i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times [\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_{z,MT}]$$

Usando a identidade 1.19a, achamos

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = -i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \left[\overbrace{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla_t \mathcal{E}_{z,MT})}^0 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} \right]$$

ou

$$\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \nabla_t \mathcal{E}_{z,MT}$$

Multiplicando esta expressão por $\pm \frac{k}{\omega} = \pm \sqrt{\mu\epsilon} \frac{k}{k_0}$, obtemos

$$\pm \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = \pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t \mathcal{E}_{z,MT}$$

e, se compararmos esta expressão com a equação 26.101a, veremos que a relação entre $\vec{\mathcal{E}}_{t,MT}$ e $\vec{\mathcal{B}}_{t,MT}$ é dada por

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,MT} = \pm \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,MT} \quad (26.105)$$

É importante notar que as equações que definem os campos nos modos ET ou MT são as expressões 26.98,

$$\nabla_t^2 \mathcal{B}_{z,ET} + k_c^2 \mathcal{B}_{z,ET} = 0$$

e 26.104,

$$\nabla_t^2 \mathcal{E}_{z,MT} + k_c^2 \mathcal{E}_{z,MT} = 0$$

as quais têm soluções oscilantes apenas quando $k_c \geq 0$, ou seja, recordando a equação 26.94,

$$k_c = \sqrt{k_0^2 - k^2} \quad (26.106)$$

que pode ser escrita como

$$k = \sqrt{k_0^2 - k_c^2} \quad (26.107)$$

vemos que, se $k_0 > k_c$, k será real, o que resultará em soluções oscilantes, dadas por 26.31 e 26.32,

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{E}}(x, y)e^{\pm ikz - i\omega t}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{B}}(x, y)e^{\pm ikz - i\omega t}$$

tanto para os modos ET quanto para os modos MT. Por outro lado, se $k_0 < k_c$, então k será imaginário puro e as soluções 26.31 e 26.32 serão amortecidas na direção z , resultando em ondas evanescentes, como no caso estudado na seção 26.1. O número de onda k_c aparece, então, como um número de onda de corte, tendo uma frequência angular de corte associada dada por

$$\omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (26.108)$$

Com o uso de 26.93 e 26.108, podemos reescrever 26.107 como

$$k = \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \quad (26.109)$$

É interessante comentar que, de acordo com a seção 26.1, esperamos que as condições de contorno introduzam algum tipo de discretização nos possíveis valores de k (e de frequência) que são permitidos dentro da guia. Podemos agora determinar as velocidades de fase e de grupo, mediante as expressões 22.125 e 22.126. Como as ondas são descritas por k, ω , temos, para a velocidade de fase,

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

ou

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\omega \sqrt{1 - (\frac{\omega_c}{\omega})^2}}$$

ou ainda,

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_c}{\omega})^2}} \quad (26.110)$$

Como $\omega > \omega_c$, a velocidade de fase é tal que

$$v_f > \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

onde $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ é a velocidade da radiação no meio dielétrico sem as restrições impostas pela guia de ondas. Portanto, a velocidade de fase da onda transmitida pode ser maior que a velocidade da luz no meio. Em particular, se houver vácuo na guia, teremos

$$v_f > \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

ou

$$v_f > c$$

Isto é, a velocidade de fase é maior que a velocidade da luz no vácuo. Isso também ocorreu no problema estudado na seção anterior, e não deve ser esquecido que a informação se propaga com a velocidade de grupo, não com a velocidade de fase. Vamos calcular agora a velocidade de grupo, por intermédio de

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Reescrevendo a expressão 26.109, temos

$$k^2 = \mu\epsilon(\omega^2 - \omega_c^2)$$

ou

$$\omega^2 = \omega_c^2 + \frac{k^2}{\mu\epsilon} \quad (26.111)$$

ou ainda,

$$\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \frac{k^2}{\mu\epsilon}}$$

Então,

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2k}{\mu\epsilon}}{\sqrt{\omega_c^2 + \frac{k^2}{\mu\epsilon}}}$$

ou

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\mu\epsilon \sqrt{\omega_c^2 + \frac{k^2}{\mu\epsilon}}}$$

Usando as equações 26.109 e 26.111, achamos

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\mu\epsilon \omega}$$

ou

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (26.112)$$

Como $\omega > \omega_c$, a velocidade de grupo é sempre menor do que a velocidade da radiação num meio dielétrico infinito formado pelo mesmo material que está no interior do condutor, ou seja,

$$v_g < \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Em particular, para o vácuo temos

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < c$$

Multiplicando as expressões 26.110 e 26.112, achamos

$$v_f v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

ou

$$v_f v_g = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad (26.113)$$

mostrando que a relação acima é válida em geral para qualquer guia de ondas. O lado direito é a velocidade da radiação se não houvesse o condutor formando a guia de ondas. O resultado 26.112 também pode ser obtido de uma forma mais interessante se determinarmos os valores médios da energia e também da potência armazenadas na guia de ondas. Para iniciar os cálculos, precisamos primeiramente da densidade volumétrica de energia eletromagnética, dada pela expressão 22.51, ou seja,

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{1}{4} \Re [\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^* + \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}^*]$$

que pode ser escrita como

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{1}{4} \Re [\epsilon \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^*]$$

onde consideramos que os campos estão relacionados por meio de

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \qquad \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$$

Podemos escrever ainda

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{\epsilon}{4} \Re [\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\epsilon \mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^*] \quad (26.114)$$

Para os modos ET, os campos transversais são dados por 26.95,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} &= -\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \\ \vec{\mathcal{B}}_{t,ET} &= \pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \end{aligned}$$

lembrando que os campos na direção z seguem as expressões 26.91,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{z,ET} &\equiv 0, \quad (\text{em todo o espaço}) \\ \vec{\mathcal{B}}_{z,ET} &\neq 0 \\ [\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}]_S &= 0 \end{aligned}$$

Como

$$\vec{\mathcal{E}}_{ET} = \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} + \vec{\mathcal{E}}_{z,ET} = \vec{\mathcal{E}}_{t,ET}$$

e

$$\vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}} = \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} + \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}$$

temos

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* = (\vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}}^*) + \frac{1}{\epsilon\mu} (\vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} + \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}) \cdot (\vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}^* + \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*)$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* &= \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}^* \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* = \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*$$

que se torna, usando as equações 26.95,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* &= \left(-\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \right) \cdot \left[\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \right] \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \mu \left(\pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \right) \cdot \left[\mp \frac{ik}{k_c^2} (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \right] + \frac{1}{\epsilon\mu} |\mathcal{B}_{z,\text{ET}}|^2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* &= \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{k_0^2}{k_c^4} (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^*] \\ &\quad + \frac{k^2}{\epsilon\mu k_c^4} (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* + \frac{1}{\epsilon\mu} |\mathcal{B}_{z,\text{ET}}|^2 \quad (26.117) \end{aligned}$$

Agora, utilizamos a identidade 1.20 para reescrever o primeiro termo do lado direito. Temos então,

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^*] &= \\ &= (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) [\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^*] - [\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^*] (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \end{aligned}$$

ou, levando em conta as orientações dos vetores, temos

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}) \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^*] = \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* \quad (26.118)$$

Aplicando a equação 26.118 em 26.117, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* &= \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{k_0^2}{k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* \\ &\quad + \frac{k^2}{\epsilon\mu k_c^4} (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* + \frac{1}{\epsilon\mu} |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^* = \frac{k_0^2 + k^2}{\mu\epsilon k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* + \frac{1}{\epsilon\mu} |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \quad (26.119)$$

Com o uso de 26.119, a densidade volumétrica de energia fica

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{\epsilon}{4} \Re \left[\frac{k_0^2 + k^2}{\mu\epsilon k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* + \frac{1}{\epsilon\mu} |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \right]$$

ou

$$\langle u_{el} \rangle = \frac{k_0^2 + k^2}{4\mu k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* + \frac{1}{4\mu} |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \quad (26.120)$$

A densidade de energia por unidade de comprimento da guia pode ser obtida integrando-se a expressão acima na área transversal da guia, ou seja,

$$\frac{dU}{dz} = \oint_A \langle u_{el} \rangle dA$$

ou

$$\frac{dU}{dz} = \oint_A \left[\frac{k_0^2 + k^2}{4\mu k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* + \frac{1}{4\mu} |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \right] dA$$

ou ainda,

$$\frac{dU}{dz} = \frac{k_0^2 + k^2}{4\mu k_c^4} \oint_A \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* dA + \frac{1}{4\mu} \oint_A |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA \quad (26.121)$$

Para reescrever esta equação, vamos precisar adaptar a primeira identidade de Green, equação 1.61,

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV = \oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot \hat{n} dA$$

para o caso bidimensional, de modo que temos

$$\int_S (\Psi \nabla_t^2 \Phi + \nabla_t \Phi \cdot \nabla_t \Psi) dA = \oint_C \Phi \nabla_t \Psi \cdot \hat{n} d\ell \quad (26.122)$$

Portanto, fazendo

$$\Psi = \mathcal{B}_{z,ET} \quad \Phi = \mathcal{B}_{z,ET}^*$$

obtemos, por meio de 26.122,

$$\int_S (\mathcal{B}_{z,ET} \nabla_t^2 \mathcal{B}_{z,ET}^* + \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}^* \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}) dA = \oint_C \mathcal{B}_{z,ET}^* (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot \hat{n}) d\ell$$

ou, reescrevendo alguns termos,

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} dA \\ = \oint_C \mathcal{B}_{z,ET}^* (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot \hat{n}) d\ell - \int_S \mathcal{B}_{z,ET} \nabla_t^2 \mathcal{B}_{z,ET}^* dA \end{aligned}$$

Agora, usamos a equação 26.98,

$$\nabla_t^2 \mathcal{B}_{z,ET} + k_c^2 \mathcal{B}_{z,ET} = 0$$

além da condição de contorno 26.91c,

$$[\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}]_S = 0$$

para anular a integral de linha e reescrever a de superfície como

$$\int_S (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} dA = k_c^2 \int_S \mathcal{B}_{z,ET} \mathcal{B}_{z,ET}^* dA$$

ou

$$\int_S (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} dA = k_c^2 \int_S |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA \quad (26.123)$$

Voltando agora à equação 26.121, achamos

$$\frac{dU}{dz} = \frac{k_0^2 + k^2}{4\mu k_c^4} k_c^2 \int_A |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA + \frac{1}{4\mu} \int_A |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA$$

ou

$$\frac{dU}{dz} = \frac{k_0^2 + k^2}{4\mu k_c^2} \int_A |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA + \frac{1}{4\mu} \int_A |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA$$

ou ainda,

$$\frac{dU}{dz} = \frac{k_0^2 + k^2 + k_c^2}{4\mu k_c^2} \int_A |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA$$

Usando a equação 26.94,

$$k_c = \sqrt{k_0^2 - k^2}$$

para substituir k_c^2 no numerador, encontramos, finalmente,

$$\frac{dU}{dz} = \frac{k_0^2}{2\mu k_c^2} \int_A |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA \quad (26.124)$$

que é válida para os modos ET. O cálculo para os modos MT é idêntico e é deixado como exercício para o leitor (veja o exercício 26.3). Precisamos agora calcular a potência transmitida pela guia, partindo do vetor de Poynting médio, dado por 22.52,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

Vamos calcular inicialmente, para os modos ET, usando as expressões 26.95, o produto

$$\vec{\mathcal{E}}_{ET} \times \vec{\mathcal{H}}_{ET}^* = \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} \times (\vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^* + \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^*)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{ET} \times \vec{\mathcal{H}}_{ET}^* = \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^* + \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{E}}_{t,ET} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^*$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^* &= \frac{1}{\mu} \left[-\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \right] \times \left[\mp \frac{ik}{k_c^2} (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \right] \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \left[-\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \right] \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^* &= \mp \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^4} (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{\mu k_c^2} (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* \quad (26.125)\end{aligned}$$

Agora, utilizamos a identidade 1.19b para reescrever alguns termos acima. Iniciamos com

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* &= \\ &[\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^*] \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} - [\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^*] \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

ou, como $\nabla_t \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \perp \hat{\mathbf{k}}$,

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* = -[\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^*] \hat{\mathbf{k}} \quad (26.126)$$

Além disso,

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*) \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} - (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*) \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* = \mathcal{B}_{z,\text{ET}}^* \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \quad (26.127)$$

Utilizando 26.126 e 26.127 em 26.125, achamos

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^* &= \mp \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^4} [-\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^*] \hat{\mathbf{k}} \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{\mu k_c^2} \mathcal{B}_{z,\text{ET}}^* \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^* &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \hat{\mathbf{k}} \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{\mu k_c^2} \mathcal{B}_{z,\text{ET}}^* \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \quad (26.128)\end{aligned}$$

de forma que o vetor de Poynting médio é

$$\langle S_{\text{ET}} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^*]$$

ou, usando 26.128,

$$\begin{aligned}\langle S_{\text{ET}} \rangle &= \frac{1}{2} \Re \left[\pm \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \hat{\mathbf{k}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{\mu k_c^2} \mathcal{B}_{z,\text{ET}}^* \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \right] \quad (26.129)\end{aligned}$$

O vetor de Poynting fornece o fluxo de potência por unidade de área numa dada direção, e desejamos verificar o que ocorre na direção z , de modo que queremos a potência média por unidade de área na direção z , ou seja,

$$\frac{d\langle P_{\text{ET}} \rangle}{dA} = \langle S_{\text{ET}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

ou, mediante 26.129,

$$\begin{aligned}\frac{d\langle P_{\text{ET}} \rangle}{dA} &= \frac{1}{2} \Re \left[\pm \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \hat{\mathbf{k}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{\mu k_c^2} \mathcal{B}_{z,\text{ET}}^* \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \right] \cdot \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

que fica

$$\frac{d\langle P_{\text{ET}} \rangle}{dA} = \pm \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \quad (26.130)$$

A potência total é obtida integrando-se esta equação, ou seja,

$$\langle P_{\text{ET}} \rangle = \pm \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^4} \int_A \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* dA$$

ou, fazendo uso da expressão 26.123,

$$\int_S (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} dA = k_c^2 \int_S |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA$$

achamos

$$\langle P_{ET} \rangle = \pm \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^4} k_c^2 \int_S |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA$$

ou

$$\langle P_{ET} \rangle = \pm \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^2} \int_S |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA \quad (26.131)$$

Esta expressão é válida para os modos ET, e o cálculo para os modos MT é deixado como exercício para o leitor (veja o exercício 26.3). Vamos agora encontrar a razão entre a potência transmitida pela guia e a energia armazenada por unidade de comprimento, dada pela equação 26.124, ou seja,

$$\frac{\langle P_{ET} \rangle}{\frac{dU}{dz}} = \frac{\pm \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{kk_0}{\mu k_c^2} \int_S |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA}{\frac{k_0^2}{2\mu k_c^2} \int_A |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 dA}$$

ou

$$\frac{\langle P_{ET} \rangle}{\frac{dU}{dz}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k}{k_0}$$

Agora, utilizando as equações 26.93 e 26.109, podemos escrever

$$\frac{\langle P_{ET} \rangle}{\frac{dU}{dz}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}$$

ou

$$\frac{\langle P_{ET} \rangle}{\frac{dU}{dz}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

Lembrando a equação 26.112 para a velocidade de grupo, temos

$$\frac{\langle P_{ET} \rangle}{\frac{dU}{dz}} = \pm v_g \quad (26.132)$$

que estabelece uma relação entre a potência média transmitida e a densidade linear de energia armazenada ao longo da guia por meio da velocidade de grupo da onda.

Além da potência transmitida pela guia da onda, outra grandeza relevante é a potência dissipada, por unidade de comprimento, pela guia. Essa potência dissipada existe pelo fato de os campos existirem numa região finita e muito pequena, caracterizada pela profundidade de penetração ζ dentro do condutor que forma a guia. Assim, ocorre a geração de correntes no condutor, e parte da energia armazenada nos campos é dissipada na forma de calor, por exemplo. Para determinar essa potência, partimos da expressão 23.119 obtida anteriormente, isto é,

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} = \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta} |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}|^2$$

A potência dissipada, por unidade de comprimento na direção z , pode ser obtida da expressão acima, integrando-se ao longo da curva que define a seção transversal da guia, isto é,

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dz} = \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta} \oint_C |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}|^2 d\ell \quad (26.133)$$

Vamos calcular primeiro

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = \frac{1}{\mu} \hat{n} \times (\vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} + \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}})$$

ou

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} + \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}$$

ou ainda, usando a equação 26.95b,

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \left[\pm \frac{ik}{k_c^2} \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \right] + \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}$$

e assim,

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = \pm \frac{ik}{\mu k_c^2} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) + \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \quad (26.134)$$

Precisamos calcular agora o módulo quadrado da equação 26.134, ou seja,

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|^2 = (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}})^*$$

ou

$$\begin{aligned} |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|^2 = & \left[\pm \frac{ik}{\mu k_c^2} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) + \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \right] \\ & \cdot \left[\mp \frac{ik}{\mu k_c^2} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* + \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* \right] \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|^2 = & \left[\pm \frac{ik}{\mu k_c^2} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \right] \cdot \left[\mp \frac{ik}{\mu k_c^2} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \right] \\ & + \left[\pm \frac{ik}{\mu k_c^2} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \right] \cdot \left[\frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* \right] \\ & + \left[\frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \right] \cdot \left[\mp \frac{ik}{\mu k_c^2} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \right] \\ & + \left[\frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* \right] \end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned} |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|^2 = & \frac{k^2}{\mu^2 k_c^4} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \\ & \pm \frac{ik}{\mu^2 k_c^2} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*) \\ & \mp \frac{ik}{\mu^2 k_c^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}})^* \\ & + \frac{1}{\mu^2} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*) \quad (26.135) \end{aligned}$$

Agora utilizamos a identidade 1.20 para reescrever alguns termos de 26.135. Primeiro, calculamos

$$\begin{aligned} (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*) = \\ (\hat{n} \cdot \hat{n})(\nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*) - (\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^*)(\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,\text{ET}}) \end{aligned}$$

ou

$$(\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^*) = 0 \quad (26.136)$$

por causa da ortogonalidade entre $\vec{\mathcal{B}}_z$ e $\hat{n}$, e entre $\nabla_t \vec{\mathcal{B}}_z$ e $\vec{\mathcal{B}}_z$. Considerando o complexo conjugado dessa equação, temos

$$(\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}^*) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}) = 0 \quad (26.137)$$

Por fim, calculamos agora

$$(\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^*) = (\hat{n} \cdot \hat{n})(\vec{\mathcal{B}}_{z,ET} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^*) - (\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^*)(\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,ET})$$

ou

$$(\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^*) = |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \quad (26.138)$$

Assim, utilizando as equações 26.136–26.138 em 26.135, obtemos

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{ET}|^2 = \frac{k^2}{\mu^2 k_c^4} |\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}|^2 + \frac{1}{\mu^2} |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \quad (26.139)$$

Agora, utilizamos a equação 26.139 na expressão 26.133, para obter a potência dissipada por unidade de comprimento na direção z , ou seja,

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dz} = \frac{1}{2s\zeta} \oint_C \left[\frac{k^2}{\mu^2 k_c^4} |\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}|^2 + \frac{1}{\mu^2} |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \right] d\ell$$

ou

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dz} = \frac{1}{2\mu^2 s\zeta} \oint_C \left[\frac{k^2}{k_c^4} |\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}|^2 + |\mathcal{B}_{z,ET}|^2 \right] d\ell \quad (26.140)$$

que estabelece a potência dissipada no condutor que forma a guia de onda em termos do campo magnético na direção z , para um modo ET (o modo MT é discutido no exercício 26.3). Note que essa potência depende do número de onda e, portanto, da frequência da onda que está se propagando na guia. Vejamos agora alguns exemplos particulares de guias de ondas.

26.2.1 Guias de Ondas de Seção Reta Retangular

Vamos considerar agora uma guia de ondas formada por um condutor oco de seção reta retangular, como mostrado na figura 26.5. Os lados da guia medem a na direção x e b na direção y , e ela estende-se na direção z , que é a direção de propagação.

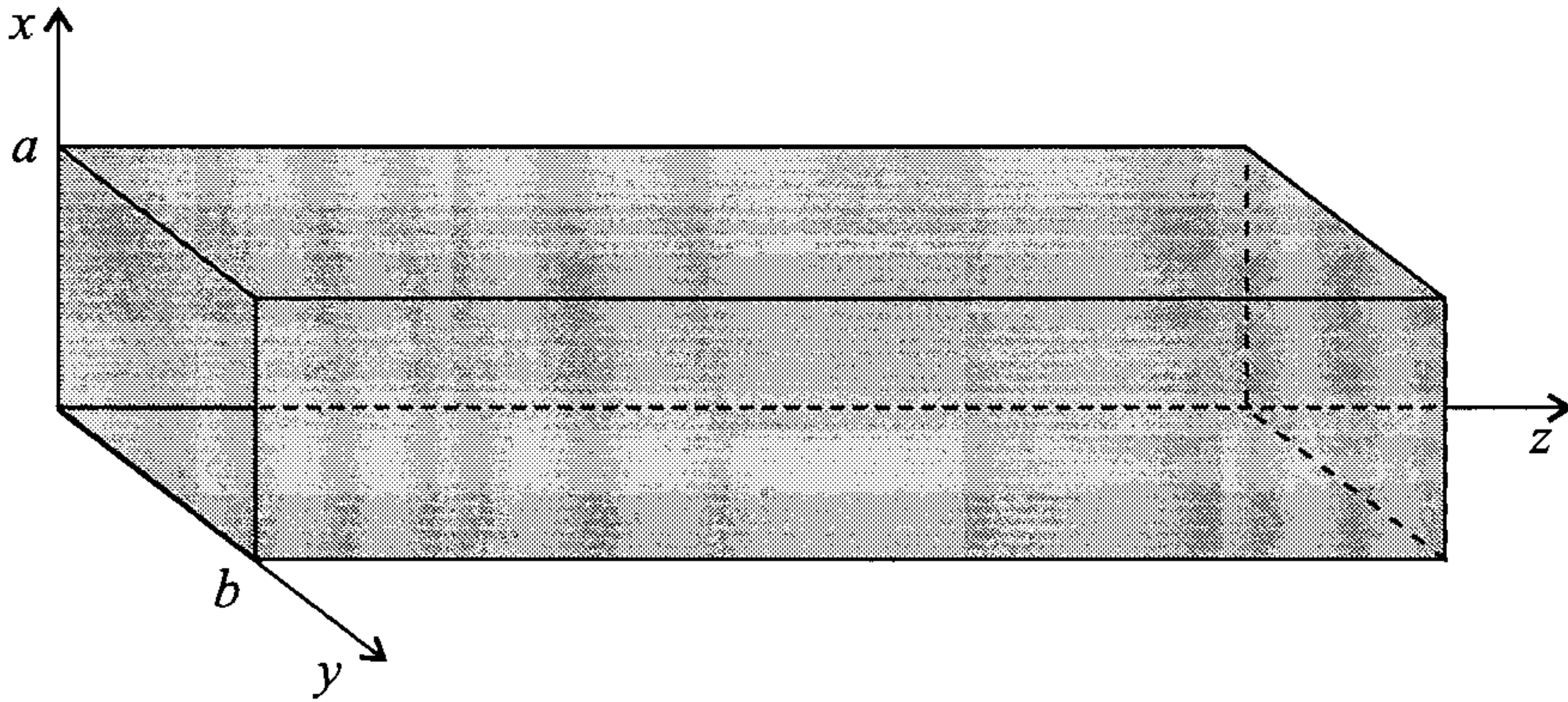


Figura 26.5: Guia de onda oca formada por um condutor em forma de tubo de seção transversal retangular.

Vamos considerar inicialmente os modos ET, nos quais o campo elétrico é exclusivamente transversal. Nesse caso, a equação que determina $\vec{\mathcal{B}}_{z,ET}$ é a equação 26.98, que fica

$$\frac{\partial^2 \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial y^2} + k_c^2 \vec{\mathcal{B}}_{z,ET} = 0 \quad (26.141)$$

Além disso, devemos satisfazer a condição de contorno 26.91c,

$$[\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z]_S = 0$$

a qual dá origem a quatro condições de contorno. Em $x = 0$ (plano yz), $\hat{n} = \hat{i}$, e obtemos

$$[\hat{i} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z]_{x=0} = 0$$

ou

$$\left. \frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (26.142)$$

Em $x = a$, $\hat{n} = -\hat{\mathbf{i}}$, e temos uma condição similar, dada por

$$[-\hat{\mathbf{i}} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z]_{x=a} = 0$$

ou

$$\left. \frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (26.143)$$

Em $y = 0$ (plano xz) temos $\hat{n} = \hat{\mathbf{j}}$, e assim,

$$[\hat{\mathbf{j}} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z]_{y=0} = 0$$

ou

$$\left. \frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (26.144)$$

Por fim, em $y = b$, $\hat{n} = -\hat{\mathbf{j}}$, e

$$[-\hat{\mathbf{j}} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z]_{y=b} = 0$$

ou

$$\left. \frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad (26.145)$$

Essas condições de contorno devem ser satisfeitas pelas soluções de 26.141, as quais podem ser obtidas por meio de uma separação de variáveis, por exemplo, conforme foi feito na seção 6.3.2, a partir da página 325, e a resolução é deixada como exercício para o leitor (veja o exercício 26.2). O resultado é o produto de funções oscilantes, na forma

$$\mathcal{B}_{z,ET} = \mathcal{B}_{z,ET}^0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \quad (26.146)$$

onde $\mathcal{B}_{z,ET}^0$ é uma constante e k_x e k_y , em princípio indeterminados, são duas constantes de separação relacionadas a k_c mediante

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (26.147)$$

Calculando as derivadas de 26.146, temos

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial x} = -k_x \mathcal{B}_{z,ET}^0 \text{sen}(k_x x) \cos(k_y y) \quad (26.148)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial y} = -k_y \mathcal{B}_{z,ET}^0 \cos(k_x x) \text{sen}(k_y y) \quad (26.149)$$

Note que as condições de contorno 26.142 e 26.144 são automaticamente satisfeitas. A condição 26.143 fornece, usando 26.148,

$$-k_x \mathcal{B}_{z,ET}^0 \text{sen}(k_x a) \cos(k_y y) = 0$$

ou

$$\text{sen}(k_x a) = 0$$

o que implica que

$$k_x a = n\pi$$

onde n é inteiro, ou

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad (26.150)$$

que estabelece uma condição de discretização para k_x . A última condição de contorno, dada pela expressão 26.145, torna-se, utilizando 26.149,

$$-k_y \mathcal{B}_{z,ET}^0 \cos(k_x x) \text{sen}(k_y b) = 0$$

ou

$$\text{sen}(k_y b) = 0 \quad (26.151)$$

ou então,

$$k_y b = m\pi$$

onde m também é inteiro, e assim,

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \quad (26.152)$$

que também discretiza k_y . Com isso, k_c , dado por 26.147, também é discretizado e dado por

$$k_{c,nm}^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \quad (26.153)$$

ou, em termos da frequência angular $\omega_{c,nm} = \frac{k_{c,nm}}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, temos

$$\omega_{c,nm} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad (26.154)$$

onde n e m não podem ser, ao mesmo tempo, nulos, para que a solução seja oscilante. Utilizando as expressões 26.150 e 26.152, as soluções 26.146 tornam-se

$$\mathcal{B}_{z,ET}^{nm} = \mathcal{B}_{z,ET}^{0,nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (26.155)$$

sendo que podemos restringir n e m a valores naturais, não-nulos ao mesmo tempo. Podemos determinar os campos $\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}^{nm}$ e $\vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^{nm}$ por intermédio das equações 26.95. Primeiro, calculamos

$$\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}^{nm} = \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[\mathcal{B}_{z,ET}^{0,nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right]$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}^{nm} = -\mathcal{B}_{z,ET}^{0,nm} \left[\frac{n\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{i}} \right. \\ \left. + \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (26.156) \end{aligned}$$

Agora, pela equação 26.95b, temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^{nm} = \mp \frac{ik}{k_{c,nm}^2} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,nm} \left[\frac{n\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{i}} \right. \\ \left. + \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (26.157) \end{aligned}$$

e, usando 26.156 em 26.95a, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}^{nm} = -\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_{c,nm}^2} \hat{\mathbf{k}} \times \left\{ -\mathcal{B}_{z,ET}^{0,nm} \left[\frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{j}} \right] \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}^{nm} = -\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_{c,nm}^2} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,nm} \left[\frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{i}} - \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (26.158)$$

Vamos agora analisar a resposta em termos de freqüências angulares de uma guia retangular. Se $a > b$, então $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$, e a freqüência (angular) de corte mais baixa ocorre quando $n = 1$ e $m = 0$, isto é, de 26.154, temos

$$\omega_{c,10} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{a} \quad (26.159)$$

ou, em termos de número de onda, dado por 26.153,

$$k_{c,10} = \frac{\pi}{a} \quad (26.160)$$

Esse modo, conhecido como modo ET_{10} , é chamado de modo dominante, e ondas com freqüência menores que as dadas em 26.159 não podem se propagar pela guia. Os campos associados a esse modo são dados por 26.155, 26.157 e 26.158, com $n = 1$, $m = 0$, além de $\vec{\mathcal{E}}_{z,ET} = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{z,ET}^{10} &= \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ \vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^{10} &= \mp \frac{ik}{k_{c,10}^2} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathcal{E}}_{t,ET}^{10} &= \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_{c,10}^2} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathcal{E}}_{z,ET}^{10} &= 0 \end{aligned}$$

ou, usando 26.160,

$$\mathcal{B}_{z,ET}^{10} = \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (26.162a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^{10} = \mp ik \frac{a}{\pi} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\mathbf{i}} \quad (26.162b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}^{10} = \frac{ik_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a}{\pi} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\mathbf{j}} \quad (26.162c)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{z,ET}^{10} = 0 \quad (26.162d)$$

sendo que os campos completos são obtidos multiplicando-se pelo fator exponencial dependente de z e t , isto é,

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^{10} = \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\pm ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \quad (26.163a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^{10} = \mp ik \frac{a}{\pi} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\pm ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{i}} \quad (26.163b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}^{10} = \frac{ik_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a}{\pi} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\pm ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{j}} \quad (26.163c)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{z,ET}^{10} = 0 \quad (26.163d)$$

onde k é dado por 26.109,

$$k_{10} = \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_{c,10}^2}$$

Considere agora as próximas frequências de corte, dadas por 26.154 quando $n = 0$ e $m = 1$ e $n = 1$ e $m = 1$, ou seja,

$$\omega_{c,01} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{b} \quad (26.164)$$

e

$$\omega_{c,11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \quad (26.165)$$

ou

$$\omega_{c,11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}{b} \quad (26.166)$$

Podemos reescrever a equação 26.164 como

$$\omega_{c,01} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a}{ab} = \frac{a}{b} \omega_{c,10} \quad (26.167)$$

onde usamos a expressão 26.159. A equação 26.166 também pode ser reescrita, na forma

$$\omega_{c,11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}{b} \frac{a}{a} = \frac{a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}{b} \omega_{c,10} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \omega_{c,10} \quad (26.168)$$

Além disso, considere, por exemplo, que $\frac{a}{b} = 2$. Nesse caso, teremos

$$\omega_{c,01} = 2\omega_{c,10} \quad \omega_{c,11} = \sqrt{5}\omega_{c,10}$$

Agora, devemos notar que, se houver radiação eletromagnética propagando-se pela guia de ondas em algum modo ET com frequências entre $\omega_{c,10}$ e $\omega_{c,01}$, essa radiação deve necessariamente pertencer ao modo ET₁₀, isso porque o modo imediatamente superior, que é o ET₀₁, tem uma frequência de corte maior que $\omega_{c,10}$, impedindo que ondas com frequências menores que $\omega_{c,01}$ se propaguem no modo ET₀₁. Assim, nessa faixa de frequências, temos uma situação em que há apenas um modo, e essa faixa, chamada de largura de banda de modo único, é a que é usada normalmente na operação de guias de onda. Nesse caso, é simples obter o fluxo de energia por meio da guia, dado pelo valor médio do vetor de Poynting 22.52,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

Considerando o modo ET₁₀ descrito pelas equações 26.163, temos que calcular, inicialmente,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{10} \times \vec{\mathcal{H}}_{10}^* &= \left\{ \frac{ik_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a}{\pi} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\pm ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{j}} \right\} \\ &\times \frac{1}{\mu} \left\{ \pm ik \frac{a}{\pi} \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10*} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\mp ikz + i\omega t} \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{B}_{z,ET}^{0,10*} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{\mp ikz + i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{10} \times \vec{\mathcal{H}}_{10}^* &= \pm \frac{1}{\mu} \frac{kk_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a^2}{\pi^2} |\mathcal{B}_{z,ET}^{0,10}|^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\mathbf{k}} \\ &+ \frac{ik_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a}{\pi} |\mathcal{B}_{z,ET}^{0,10}|^2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Note que o termo na direção z é imaginário puro, de modo que sua parte real é nula. Portanto,

$$\langle \vec{S}_{10} \rangle = \frac{1}{2} \Re [\vec{E}_{10} \times \vec{H}_{10}^*] = \pm \frac{1}{2\mu} \frac{kk_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a^2}{\pi^2} |\mathcal{B}_{z,ET}^{0,10}|^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{k} \quad (26.169)$$

onde o sinal positivo corresponde a ondas indo no sentido positivo do eixo, e o negativo a ondas indo em sentido contrário. Podemos obter a potência transmitida pela guia pelo modo ET_{10} se integrarmos esse fluxo através da área transversal, ou seja,

$$P_{10} = \int_S \langle \vec{S}_{10} \rangle \cdot \hat{k} dA$$

ou

$$P_{10} = \int_0^a \int_0^b \pm \frac{1}{2\mu} \frac{kk_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a^2}{\pi^2} |\mathcal{B}_{z,ET}^{0,10}|^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{k} \cdot \hat{k} dy dx$$

e assim,

$$P_{10} = \pm \frac{b}{2\mu} \frac{kk_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a^2}{\pi^2} |\mathcal{B}_{z,ET}^{0,10}|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

Usando a substituição

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

obtemos

$$P_{10} = \pm \frac{b}{2\mu} \frac{kk_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a^2}{\pi^2} |\mathcal{B}_{z,ET}^{0,10}|^2 \int_0^a \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2} dx$$

ou

$$P_{10} = \pm \frac{b}{2\mu} \frac{kk_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a^2}{\pi^2} |\mathcal{B}_{z,ET}^{0,10}|^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{a}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right]_0^a$$

e, finalmente,

$$P_{10} = \pm \frac{ab}{4\mu} \frac{kk_0}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{a^2}{\pi^2} |\mathcal{B}_{z,ET}^{0,10}|^2 \quad (26.170)$$

Outros modos ET são estudados nos exercícios, assim como o fluxo de potência e a potência transmitida (veja os exercícios 26.4 e 26.5). Vejamos agora o que ocorre quando o campo magnético $\vec{B}$ é exclusivamente transversal, ou seja, $\vec{B}_z = 0$, o que define os modos transversais magnéticos, ou modos MT. Nesse caso, o campo relevante é $\vec{\mathcal{E}}_{z,MT}$, obtido mediante a equação 26.104,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{z,MT}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{z,MT}}{\partial y^2} + k_c^2 \mathcal{E}_{z,MT} = 0 \quad (26.171)$$

não esquecendo também da condição de contorno correspondente, dada pela equação 26.100c,

$$[\mathcal{E}_{z,MT}]_S = 0$$

que dá origem a quatro condições de contorno. Iniciando com $x = 0$, temos

$$\mathcal{E}_{z,MT}(x = 0, y) = 0 \quad (26.172)$$

e, em $x = a$, obtemos

$$\mathcal{E}_{z,MT}(x = a, y) = 0 \quad (26.173)$$

Em $y = 0$, devemos satisfazer

$$\mathcal{E}_{z,MT}(x, y = 0) = 0 \quad (26.174)$$

e, por último, em $y = b$ devemos ter

$$\mathcal{E}_{z,MT}(x, y = b) = 0 \quad (26.175)$$

As soluções de 26.171 também são oscilantes, e elas são dadas por

$$\mathcal{E}_{z,MT} = \mathcal{E}_{z,MT}^0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (26.176)$$

onde $\mathcal{E}_{z,MT}^0$ é uma constante e k_x e k_y , em princípio indeterminados, são duas constantes de separação relacionadas a k_c por meio de uma equação igual a 26.147, que era válida para os modos ET. Assim,

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (26.177)$$

Com as soluções dadas por 26.176, as condições 26.172 e 26.174 são satisfeitas automaticamente. A condição 26.173 implica que

$$\mathcal{E}_{z,MT}^0 \sin(k_x a) \sin(k_y y) = 0$$

ou

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad (26.178)$$

e, de forma semelhante, a última condição, dada por 26.175, impõe que

$$k_y = \frac{m\pi}{b} \quad (26.179)$$

de forma muito similar ao que ocorre nos modos ET. O número de onda de corte é descrito por

$$k_{c,nm}^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} \quad (26.180)$$

correspondendo a uma frequência angular

$$\omega_{c,nm} = \frac{k_{c,nm}}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ou

$$\omega_{c,nm} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad (26.181)$$

com a diferença agora de que n e m não podem ser nulos, de forma que o modo de frequência mais baixa é o modo MT_{11} . Utilizando as expressões 26.178 e 26.179, as soluções 26.176 tornam-se

$$\mathcal{E}_{z,MT} = \mathcal{E}_{z,MT}^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (26.182)$$

De posse dessas soluções, podemos obter os outros campos por intermédio das expressões 26.101. Calculando inicialmente $\nabla_t \mathcal{E}_{z,MT}$, temos

$$\nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} = \left[\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[\mathcal{E}_{z,MT}^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right]$$

ou

$$\nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} = \frac{n\pi}{a} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{m\pi}{b} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{j}} \quad (26.183)$$

Assim, voltando para a equação 26.101a, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,MT} = \pm \frac{ik}{k_c^2} \left[\frac{n\pi}{a} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{m\pi}{b} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (26.184)$$

enquanto a equação 26.101b fornece, considerando 26.183,

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = -i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{n\pi}{a} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{m\pi}{b} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{j}} \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \left[\frac{m\pi}{b} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{i}} - \frac{n\pi}{a} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (26.185)$$

Para ondas nos modos MT, os índices n e m não podem ser nulos, já que, nesse caso, os campos dados pelas expressões 26.182, 26.184 e 26.185 se anulam. O modo que tem frequência de corte mais baixa corresponde ao modo MT_{11} . Considerando, como fizemos no caso dos modos ET, que a guia é tal que $a > b$, a frequência angular de corte mais baixa é dada por 26.181,

$$\omega_{c,11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad (26.186)$$

que pode ser reescrita como

$$\omega_{c,11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \quad (26.187)$$

que é igual à frequência angular do modo ET_{11} , dada por 26.165. Assim, a frequência de corte mais baixa dos modo magnéticos transversais é mais alta

do que a mais baixa dos modos elétricos transversais. É mais alta, inclusive, que a segunda mais baixa dos modos ET, dada por $\omega_{c,01}$. Portanto, se a guia operar na faixa de frequências que corresponde à largura de banda de modo único, não só não teremos outros modos ET além do ET_{10} , como também não teremos modos MT. Assim, qualquer radiação que se propague na guia operando nessa situação será descrita pelo modo ET_{10} discutido anteriormente. Vejamos agora o caso de uma guia de onda de seção reta circular.

26.2.2 Guias de Ondas de Seção Reta Circular

Outra forma geométrica relevante em se tratando de guias de onda corresponde ao de uma guia de onda com seção reta circular de raio R , como mostra a figura 26.6.

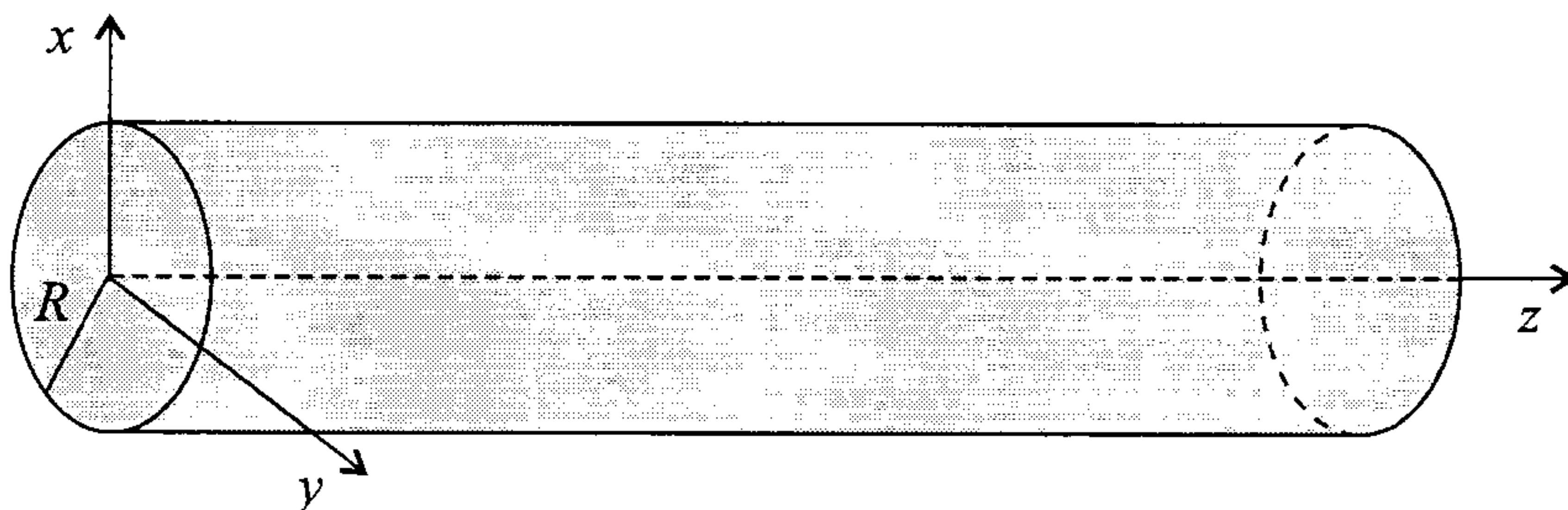


Figura 26.6: Guia de onda oca formada por um condutor em forma de tubo de seção transversal circular.

Por causa da simetria do problema, é mais interessante utilizar coordenadas polares para escrever as equações. Vamos iniciar pelos modos MT, onde não há campo magnético na direção z . Nesse caso, a equação 26.104 torna-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{E}_{z,MT}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{z,MT}}{\partial \theta^2} + k_c^2 \mathcal{E}_{z,MT} = 0 \quad (26.188)$$

onde usamos a parte transversal do operador Laplaciano em coordenadas cilíndricas dado em B.10. Essa equação é complementada pela condição de contorno correspondente, dada por 26.100c,

$$[\mathcal{E}_{z,MT}]_S = 0$$

A solução da equação 26.188 também já foi discutida no volume I, e ela envolve o uso das funções de Bessel (veja a seção 6.6.2). Como a origem ($\rho = 0$) faz parte da região de interesse, não podem ocorrer divergências nesse ponto e precisamos nos restringir às funções de Bessel de primeiro tipo J_ν . Assim, as soluções de 26.188 são escritas como

$$\mathcal{E}_{z,MT} = \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_\nu(k_c \rho) e^{i\nu\theta} \quad (26.189)$$

Agora, devemos lembrar que essa função deve ser periódica em θ , para que represente fisicamente o mesmo campo. Isso restringe os valores de ν a serem inteiros, e podemos escrever então,

$$\mathcal{E}_{z,MT} = \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m(k_c \rho) e^{im\theta} \quad (26.190)$$

A condição de contorno nesse caso implica que

$$[\mathcal{E}_{z,MT}]_{\rho=R} = 0$$

ou

$$[\mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m(k_c \rho) e^{im\theta}]_{\rho=R} = 0$$

o que resulta em

$$J_m(k_c R) = 0$$

ou seja, os valores de k_c são tais que

$$k_{c,mn} = \frac{\alpha_{m,n}}{R} \quad (26.191)$$

onde $\alpha_{m,n}$ é uma das n infinitas raízes da função de Bessel $J_m(\alpha)$. Essa é a equação que discretiza k_c , correspondendo, em frequência, a

$$\omega_{c,mn} = \frac{k_{c,mn}}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ou

$$\omega_{c,mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\alpha_{m,n}}{R} \quad (26.192)$$

A menor frequência de corte corresponde a

$$\omega_{c,01} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\alpha_{0,1}}{R} \quad (26.193)$$

e frequências menores que essa não se propagam pela guia. As três primeiras raízes de $J_0(\alpha)$ são

$$\alpha_{0,1} \simeq 2,4048 \quad \alpha_{0,2} \simeq 5,5201 \quad \alpha_{0,3} \simeq 8,6537 \quad (26.194)$$

e, para $J_1(\alpha)$, temos

$$\alpha_{1,1} \simeq 3,8317 \quad \alpha_{1,2} \simeq 7,0156 \quad \alpha_{1,3} \simeq 10,173 \quad (26.195)$$

Note que $\alpha = 0$ é, na verdade, a primeira raiz de $J_m(\alpha)$ (exceto quando $m = 0$), mas isso não corresponde a uma onda propagando-se pela guia, pois, se escrevermos as soluções 26.190 usando 26.191, teremos

$$\mathcal{E}_{z,MT} = \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m\left(\alpha_{m,n} \frac{\rho}{R}\right) e^{im\theta} \quad (26.196)$$

que se anula se $\alpha_{n,m} = 0$. Assim, as duas frequências de corte mais baixas são

$$\omega_{c,01} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{2,4048}{R} \quad (26.197)$$

e

$$\omega_{c,11} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{3,8317}{R} \quad (26.198)$$

Os outros campos são dados por 26.101, e calculamos primeiro, usando 26.196,

$$\nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} = \left[\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left[\mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m\left(\alpha_{m,n} \frac{\rho}{R}\right) e^{im\theta} \right]$$

ou

$$\nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} = \mathcal{E}_{z,MT}^0 \frac{d}{d\rho} \left[J_m\left(\alpha_{m,n} \frac{\rho}{R}\right) \right] e^{im\theta} \hat{\rho} + \frac{im}{\rho} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m\left(\alpha_{m,n} \frac{\rho}{R}\right) e^{im\theta} \hat{\theta}$$

que pode ser reescrita, utilizando uma regra da cadeia, como

$$\nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} = \frac{\alpha_{m,n}}{R} \mathcal{E}_{z,MT}^0 \frac{dJ_m(s)}{ds} e^{im\theta} \hat{\rho} + \frac{im}{\rho} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m(s) e^{im\theta} \hat{\theta}$$

onde

$$s = \frac{\alpha_{m,n}}{R} \rho \quad (26.199)$$

Chamando $J'_m(s) = \frac{dJ_m}{ds}$, escrevemos

$$\nabla_t \mathcal{E}_{z,MT} = \frac{\alpha_{m,n}}{R} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J'_m(s) e^{im\theta} \hat{\rho} + \frac{im}{\rho} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m(s) e^{im\theta} \hat{\theta} \quad (26.200)$$

Assim, o campo elétrico transversal torna-se, por 26.101a,

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,MT} = \pm \frac{ik}{\alpha_{m,n}^2} \left[\alpha_{m,n} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J'_m(s) e^{im\theta} \hat{\rho} + im \frac{r}{\rho} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m(s) e^{im\theta} \hat{\theta} \right] \quad (26.201)$$

enquanto o campo magnético fica, usando 26.101b,

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = -i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{Rk_0}{\alpha_{m,n}^2} \hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{\alpha_{m,n}}{R} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J'_m(s) e^{im\theta} \hat{\rho} + \frac{im}{\rho} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m(s) e^{im\theta} \hat{\theta} \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{\alpha_{m,n}^2} \left[im \frac{R}{\rho} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_m(s) e^{im\theta} \hat{\rho} - \alpha_{m,n} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J'_m(s) e^{im\theta} \hat{\theta} \right] \quad (26.202)$$

Em particular, para o modo MT_{01} temos

$$\vec{\mathcal{E}}_{z,MT}^{01} = \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_0\left(2, 4048 \frac{\rho}{R}\right) \hat{\mathbf{k}} \quad (26.203a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,MT}^{01} = \pm i \frac{k}{2, 4048} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J'_0\left(2, 4048 \frac{\rho}{R}\right) \hat{\rho} \quad (26.203b)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,MT}^{01} = -i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{2, 4048} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J'_0\left(2, 4048 \frac{\rho}{R}\right) \hat{\theta} \quad (26.203c)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,MT}^{01} = 0 \quad (26.203d)$$

onde incluímos as expressões 26.196, 26.201 e 26.202. Acrescentando a dependência em z e a temporal, temos, para o modo MT_{01} ,

$$\vec{\mathcal{E}}_{z,MT}^{01} = \mathcal{E}_{z,MT}^0 J_0\left(2, 4048 \frac{\rho}{R}\right) e^{\pm ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \quad (26.204a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,MT}^{01} = \pm i \frac{k}{2, 4048} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J'_0\left(2, 4048 \frac{\rho}{R}\right) e^{\pm ikz - i\omega t} \hat{\rho} \quad (26.204b)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,MT}^{01} = -i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{2, 4048} \mathcal{E}_{z,MT}^0 J'_0\left(2, 4048 \frac{\rho}{R}\right) e^{\pm ikz - i\omega t} \hat{\theta} \quad (26.204c)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,MT}^{01} = 0 \quad (26.204d)$$

Vejamos agora o que ocorre no caso dos modos ET, isto é, os modos onde o campo elétrico na direção z é nulo. Neste caso, a equação diferencial apropriada é a 26.98, que fica

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial \theta^2} + k_c^2 \mathcal{B}_{z,ET} = 0 \quad (26.205)$$

que é muito similar a 26.188, tendo portanto soluções parecidas, de modo que, de 26.190, temos

$$\mathcal{B}_{z,ET} = \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_m(k_c \rho) e^{im\theta} \quad (26.206)$$

sendo que a condição de contorno a ser satisfeita é a 26.91c,

$$[\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z]_S = 0$$

que fica, nesse caso, como $\hat{n}$ na superfície da guia vale $\hat{n} = -\hat{\rho}$,

$$[-\hat{\rho} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z]_{\rho=R} = 0 \quad (26.207)$$

Assim, precisamos calcular

$$\nabla_t \mathcal{B}_z = \left[\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left[\mathcal{B}_{z,ET}^0 J_m(k_c \rho) e^{im\theta} \right]$$

ou

$$\nabla_t \mathcal{B}_z = \mathcal{B}_{z,ET}^0 \frac{d}{d\rho} [J_m(k_c \rho)] e^{im\theta} \hat{\rho} + \frac{im}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_m(k_c \rho) e^{im\theta} \hat{\theta} \quad (26.208)$$

Utilizando 26.208 em 26.207, temos

$$\left\{ \hat{\rho} \cdot \left[\mathcal{B}_{z,ET}^0 \frac{d}{d\rho} [J_m(k_c \rho)] e^{im\theta} \hat{\rho} + \frac{im}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_m(k_c \rho) e^{im\theta} \hat{\theta} \right] \right\}_{\rho=R} = 0$$

ou

$$\left\{ \frac{d}{d\rho} [J_m(k_c \rho)] \right\}_{\rho=R} = 0 \quad (26.209)$$

Assim, a condição que discretiza k_c é que $k_c R$ deve ser uma raiz da derivada das funções de Bessel. Vamos introduzir a variável

$$h = k_c \rho \quad (26.210)$$

Então, utilizando uma regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{d\rho} [J_m(k_c \rho)] = \frac{d}{dh} J_m(h) \frac{dh}{d\rho} = k_c J'_m(h) \quad (26.211)$$

Conseqüentemente, a condição 26.209 pode ser escrita como

$$J'_m(k_c R) = 0 \quad (26.212)$$

Vamos representar as infinitas n raízes de $J'_m(h)$ por $\beta_{m,n}$. Assim, temos

$$k_c = \frac{\beta_{m,n}}{R} \quad (26.213)$$

que é a equação que discretiza k_c . Em termos de frequências, temos

$$\omega_{c,mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\beta_{m,n}}{R} \quad (26.214)$$

É interessante notar que, para a função $J'_0(h)$, as três primeiras raízes ocorrem em

$$\beta_{0,1} \simeq 3,8317 \quad \beta_{0,2} \simeq 7,0156 \quad \beta_{0,3} \simeq 10,173 \quad (26.215)$$

Por outro lado, as três primeiras raízes de $J'_1(h)$ ocorrem em

$$\beta_{1,1} \simeq 1,8412 \quad \beta_{1,2} \simeq 5,332 \quad \beta_{1,3} \simeq 8,536 \quad (26.216)$$

Assim, as duas frequências de corte mais baixas correspondem a

$$\omega_{c,01} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{3,8317}{R} \quad (26.217)$$

e

$$\omega_{c,11} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1,8412}{R} \quad (26.218)$$

Portanto, vemos que ocorre um aspecto interessante no modo ET. A frequência de corte 26.218, correspondente ao modo ET₁₁ e associada à função

$J_1(h)$, é menor que a frequência de corte do modo ET_{01} , dada por 26.217 e associada à função $J_0(h)$. Além disso, o modo ET_{11} tem a menor frequência de corte, sendo menor que a menor frequência de corte dos modos MT estudados anteriormente, dada pela expressão 26.197 e associada ao modo MT_{01} e à função $J_0(s)$. Assim, novamente existe uma faixa de frequências definindo uma largura de banda de modo único, situada em

$$\omega_{c,11}^{ET} \leq \omega \leq \omega_{c,01}^{MT}$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1,8412}{R} \leq \omega \leq \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{2,4048}{R}$$

em que, se houver radiação propagando-se na guia, ela estará no modo ET_{11} . Esse modo é caracterizado pelo campo magnético

$$\mathcal{B}_{z,ET}^{11} = \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1\left(\beta_{1,1} \frac{\rho}{R}\right) e^{im\theta} \quad (26.219)$$

onde usamos as equações 26.206 e 26.213. Vamos determinar os outros campos do modo ET por meio das equações 26.95. Para isso, vamos inicialmente reescrever 26.208 usando 26.211 e 26.213, ou seja,

$$\nabla_t \mathcal{B}_z = \frac{\beta_{m,n}}{R} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J'_m(h) e^{im\theta} \hat{\rho} + \frac{im}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_m(h) e^{im\theta} \hat{\theta} \quad (26.220)$$

Agora, voltando para a equação 26.95b, achamos

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET} = \pm \frac{ik}{\beta_{m,n}^2} \left[\beta_{m,n} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J'_m(h) e^{im\theta} \hat{\rho} + im \frac{R}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_m(h) e^{im\theta} \hat{\theta} \right] \quad (26.221)$$

O campo elétrico é obtido de 26.95a, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = -\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{Rk_0}{\beta_{m,n}^2} \hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{\beta_{m,n}}{R} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J'_m(h) e^{im\theta} \hat{\rho} + \frac{im}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_m(h) e^{im\theta} \hat{\theta} \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{\beta_{m,n}^2} \left[im \frac{R}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_m(h) e^{im\theta} \hat{\rho} - \beta_{m,n} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J'_m(h) e^{im\theta} \hat{\theta} \right] \quad (26.222)$$

Em particular, para o modo ET_{11} temos

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^{11} = \pm i \frac{k}{1,8412} \left[\mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1' \left(1,8412 \frac{\rho}{R} \right) e^{i\theta} \hat{\rho} + \frac{i}{1,8412} \frac{R}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1 \left(1,8412 \frac{\rho}{R} \right) e^{i\theta} \hat{\theta} \right] \quad (26.223)$$

e

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}^{11} = \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{1,8412} \left[\frac{i}{1,8412} \frac{R}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1 \left(1,8412 \frac{\rho}{R} \right) e^{i\theta} \hat{\rho} - \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1' \left(1,8412 \frac{\rho}{R} \right) e^{i\theta} \hat{\theta} \right] \quad (26.224)$$

onde usamos 26.221 e 26.222 para escrever os campos. Incluindo a dependência temporal e espacial em z , obtemos o conjunto

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,ET}^{11} = \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1 \left(\beta_{1,1} \frac{\rho}{R} \right) e^{im\theta} e^{\pm ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \quad (26.225a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET}^{11} = \pm i \frac{k}{1,8412} \left[\mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1' \left(1,8412 \frac{\rho}{R} \right) e^{i\theta} \hat{\rho} + \frac{i}{1,8412} \frac{R}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1 \left(1,8412 \frac{\rho}{R} \right) e^{i\theta} \hat{\theta} \right] e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.225b)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET}^{11} = \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{1,8412} \left[\frac{i}{1,8412} \frac{R}{\rho} \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1 \left(1,8412 \frac{\rho}{R} \right) e^{i\theta} \hat{\rho} - \mathcal{B}_{z,ET}^0 J_1' \left(1,8412 \frac{\rho}{R} \right) e^{i\theta} \hat{\theta} \right] e^{\pm ikz - i\omega t} \quad (26.225c)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{z,ET}^{11} = 0 \quad (26.225d)$$

que descreve o comportamento dos campos dominantes do modo ET_{11} no interior da guia de ondas de seção reta circular. Uma situação interessante ocorre quando a guia de ondas é fechada em suas extremidades por condutores, definindo uma região fechada. Nesse caso, temos o que se chama de uma *cavidade ressonante*, assunto que vamos estudar em seguida.

26.3 Cavidades Ressonantes

Basicamente, uma cavidade ressonante é uma guia de ondas formada por um condutor oco em forma de tubo, com seção reta constante e delimitada por duas superfícies condutoras, formando as “tampas” da cavidade. A

principal diferença agora é que, além das condições de contorno dadas na superfície do condutor oco, existem condições de contorno também nas tampas. Vamos considerar, para simplificar, que as extremidades da guia estejam em $z = 0$ e $z = L$, e que os condutores que as formam sejam planos e paralelos ao plano xy , sendo, portanto, perpendiculares à direção z . No caso das guias de ondas, a dependência em z foi considerada como sendo do tipo $e^{\pm ikz}$, onde o sinal positivo correspondia a ondas propagando-se no sentido positivo de z , e vice-versa para o sinal negativo. Ao limitar os valores de z para estarem entre 0 e L , fazemos com que esse tipo de dependência seja alterado para o de ondas estacionárias, do tipo

$$f(z) = A \cos kz + B \sin kz \quad (26.226)$$

onde a função específica (seno ou cosseno) depende das condições de contorno associadas à direção z . É preciso lembrar que a introdução das duas novas superfícies faz com que surjam novas condições de contorno, além de modificar as equações 26.74. Vamos primeiro reobter essas expressões para o caso presente. Para fazer isso, consideramos inicialmente o produto vetorial entre $\hat{n} = \hat{k}$ e a equação 26.65, ou seja,

$$\hat{k} \times \nabla_t \mathcal{B}_z - \hat{k} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} = -i\omega\mu\epsilon \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}_t)$$

Reescrevemos esta equação utilizando a identidade 1.19a, ou seja,

$$\hat{k} \times \nabla_t \mathcal{B}_z - \hat{k} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} = -i\omega\mu\epsilon [(\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_t)\hat{k} - (\hat{k} \cdot \hat{k})\vec{\mathcal{E}}_t]$$

ou, lembrando que $\vec{\mathcal{E}}_t \perp \hat{k}$, e substituindo $\omega = \frac{k_0}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ (pela equação 26.93)

$$\vec{\mathcal{E}}_t = -\frac{i}{k_0\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\hat{k} \times \nabla_t \mathcal{B}_z - \hat{k} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}_t}{\partial z} \right) \quad (26.227)$$

Em seguida, calculamos o produto vetorial de $\hat{k}$ com a equação 26.56,

$$\hat{k} \times \nabla_t \mathcal{E}_z - \hat{k} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} = i\omega \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{\mathcal{B}}_t)$$

ou, usando 1.19a,

$$\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z - \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} = i\omega \left[\overbrace{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_t)}^0 \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \vec{\mathcal{B}}_t \right]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \left[\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z - \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z} \right] \quad (26.228)$$

Agora, vamos utilizar 26.228 em 26.227, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}_t = -\frac{i}{k_0\sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z - \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z - \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z}) \right] \right\}$$

ou, efetuando algumas simplificações,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_t = -\frac{i}{k_0\sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \right. \\ \left. - \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{E}_z) \right] + \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \hat{\mathbf{k}} \times \left[\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}_t}{\partial z^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Devemos lembrar que a dependência em z deve ser do tipo descrito pela função em 26.226, de modo que a derivada segunda em relação a z faz com que apareça um fator $-k^2$ multiplicado pela própria função. Assim, usando novamente 1.19a, temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_t = -\frac{i}{k_0\sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \right. \\ \left. - \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \left\{ \left[\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{E}_z) \right] \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{E}_z) \right\} \right. \\ \left. - i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k^2}{k_0} [(\hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_t) \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \vec{\mathcal{E}}_t] \right\} \end{aligned}$$

ou, como $\nabla_t \mathcal{E}_z \perp \hat{\mathbf{k}}$,

$$\vec{\mathcal{E}}_t = -\frac{i}{k_0\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z + \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{E}_z) + i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k^2}{k_0} \vec{\mathcal{E}}_t \right]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_t = -\frac{i}{k_0\sqrt{\mu\epsilon}}\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{E}_z) + \frac{k^2}{k_0^2} \vec{\mathcal{E}}_t$$

que pode ser escrito, usando 26.106, como

$$\frac{k_c^2}{k_0^2} \vec{\mathcal{E}}_t = -\frac{i}{k_0\sqrt{\mu\epsilon}}\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{E}_z)$$

A derivada em relação a z pode ser trocada de ordem com relação ao operador ∇_t , de modo que, finalmente,

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \quad (26.229)$$

Obtemos agora $\vec{\mathcal{B}}_t$ usando a equação 26.229 em 26.228, ou seja,

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z - \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \right] \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z - \frac{1}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial z^2} \right) + \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{B}_z) \right\}$$

ou ainda, usando 1.19a, considerando o fato de que $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \leftrightarrow -k^2$ e trocando a ordem da derivada em relação a z com o operador ∇_t , temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}_t = \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \left\{ \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z + \frac{k^2}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z \right. \\ \left. + \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \left\{ [\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_t \mathcal{B}_z) \right\} \right\} \end{aligned}$$

e assim,

$$\vec{\mathcal{B}}_t = \frac{i\sqrt{\mu\epsilon}}{k_0} \left\{ \frac{k_0^2}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \right) \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_t = i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z + \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \right) \quad (26.230)$$

As equações 26.229 e 26.230 formam o conjunto de equações que substitui as expressões 26.74. Assim, os campos agora são dados por

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) - \frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \quad (26.231a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_t = i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z + \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \right) \quad (26.231b)$$

Podemos agora partir para a determinação dos campos. Os campos elétrico e magnético ainda são escritos como em 26.97 e 26.103, com a diferença de que agora devemos incluir a função 26.226, ou seja,

$$\vec{\mathcal{B}}_z(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{B}}_z(x, y)(A \cos kz + B \sin kz)e^{-i\omega t} \quad (26.232a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_z(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{E}}_z(x, y)(C \cos kz + D \sin kz)e^{-i\omega t} \quad (26.232b)$$

sendo que as condições de contorno apropriadas vão determinar os valores das constantes A , B , C e D . Partindo de 26.84, temos, para as superfícies, já usando 26.37,

$$\hat{n} \times (\vec{\mathcal{E}}_t + \vec{\mathcal{E}}_z) = 0$$

ou

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_t + \hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_z = 0$$

Se considerarmos a superfície condutora oca que forma a guia, teremos as condições já vistas na seção anterior. Por outro lado, levando em conta as duas “tampas”, essa condição se torna, lembrando que nesse caso $\hat{n} = \mp \hat{\mathbf{k}}$, onde o sinal negativo é para a superfície condutora em $z = L$ e o positivo para a superfície em $z = 0$,

$$[\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_t]_S = 0 \quad (26.233)$$

visto que $\hat{n} \parallel \vec{\mathcal{E}}_z$. Considere agora o módulo dessa equação, lembrando que $\hat{n} \perp \vec{\mathcal{E}}_t$, aplicado às superfícies das tampas, ou seja,

$$[|\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_t|]_S = [|\hat{n}| |\vec{\mathcal{E}}_t| \sin \frac{\pi}{2}]_S = [\mathcal{E}_t]_S$$

Reunindo com a equação 26.233, vemos que essa condição se torna

$$[\mathcal{E}_t]_S = 0 \quad (26.234)$$

A outra condição de contorno, dada por 26.1b, é

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

ou

$$\hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{B}}_t + \vec{\mathcal{B}}_z) = 0$$

ou ainda,

$$\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_t + \hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_z = 0$$

Nesse caso, como $\hat{n} \perp \vec{\mathcal{B}}_t$, obtemos, para as tampas,

$$[\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_z]_S = 0$$

ou, simplesmente,

$$[\mathcal{B}_z]_S = 0 \quad (26.235)$$

Para os modos TE, nos quais $\vec{\mathcal{E}}_z = 0$, a condição de contorno 26.235 implica que deve ocorrer, na superfície da tampa situada em $z = 0$,

$$[\vec{\mathcal{B}}_z(x, y)(A \cos kz + B \sin kz)e^{-i\omega t}]_{z=0} = 0$$

onde usamos a expressão 26.232a. Dessa condição resulta

$$A = 0$$

A outra tampa, em $z = L$, vai fornecer

$$[\vec{\mathcal{B}}_z(x, y)B \sin kze^{-i\omega t}]_{z=L} = 0$$

ou

$$\sin kL = 0$$

de modo que

$$k = \frac{q\pi}{L} \quad (26.236)$$

onde $q \in N$, ou seja, os valores de k são discretizados pela condição acima, implicando que apenas ondas com esses valores de k podem existir na guia de ondas. Os modos TE são descritos, então, por funções na forma

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,ET}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{B}}_z(x, y) \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \quad (26.237)$$

sendo que as outras condições são as mesmas que as das guias de onda, e as funções $\vec{\mathcal{B}}_z(x, y)$ são obtidas do mesmo modo. A diferença é apenas a função de z , antes uma exponencial complexa e agora uma função seno. Os modos TE satisfazem as equações 26.91,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{z,ET} &\equiv 0, & (\text{em todo o espaço}) \\ \vec{\mathcal{B}}_{z,ET} &\neq 0 \\ [\hat{n} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}]_{S_g} &= 0 \end{aligned}$$

onde S_g é a superfície da guia de ondas que corresponde à superfície lateral da cavidade ressonante, e os outros campos são obtidos de 26.231, considerando-se $\vec{\mathcal{E}}_z = 0$, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,ET} = -\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \quad (26.239a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,ET} = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \right) \quad (26.239b)$$

As formas explícitas podem ser facilmente obtidas, dependendo da forma geométrica da cavidade ressonante, e alguns casos são deixados como exercícios (veja os exercícios 26.7 e 26.8). Para os modos MT, onde ocorre $\vec{\mathcal{B}}_z = 0$, as equações 26.231 ficam

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,MT} = \frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) \quad (26.240a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,MT} = i\sqrt{\mu\epsilon} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{E}_z \quad (26.240b)$$

Vamos calcular, usando 26.232b, a derivada em relação a z , ou seja,

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_z(x, y, z, t)}{\partial z} = \vec{\mathcal{E}}_z(x, y) (-kC \sin kz + kD \cos kz) e^{-i\omega t}$$

Vamos obter agora

$$\nabla_t \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_z}{\partial z} \right) = -k(C \operatorname{sen} kz - D \cos kz) e^{-i\omega t} \nabla_t \vec{\mathcal{E}}_z(x, y) \quad (26.241)$$

A condição de contorno apropriada ao modo MT é dada por 26.234, ou seja,

$$[\mathcal{E}_t]_S = 0$$

o que corresponde, por 26.240a, a

$$[\vec{\mathcal{E}}_t]_S = \left[\frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \right) \right]_S$$

ou, usando 26.241,

$$\left[-k(C \operatorname{sen} kz - D \cos kz) e^{-i\omega t} \nabla_t \vec{\mathcal{E}}_z(x, y) \right]_S = 0$$

ou ainda, sendo as superfícies (as tampas) caracterizadas por valores particulares de z , mas valores arbitrários das outras coordenadas e do tempo,

$$[C \operatorname{sen} kz - D \cos kz]_S = 0 \quad (26.242)$$

Agora, em $z = 0$, temos

$$D = 0 \quad (26.243)$$

e, em $z = L$, obtemos

$$\operatorname{sen} kL = 0$$

o que resulta na condição

$$k = \frac{q\pi}{L}$$

que é idêntica à condição para os modos ET, dada em 26.236. Os modos MT são descritos, então, por funções

$$\vec{\mathcal{E}}_{z, \text{MT}} = \vec{\mathcal{E}}_z(x, y) \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \quad (26.244)$$

sendo complementados pelas condições 26.100,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{B}}_{z,\text{MT}} &\equiv 0, & (\text{em todo o espaço}) \\ \vec{\mathcal{E}}_{z,\text{MT}} &\neq 0 \\ [\mathcal{E}_{z,\text{MT}}]_{S_g} &= 0\end{aligned}$$

onde S_g é a superfície da guia. É interessante notar que as condições restantes, na superfície da guia, são idênticas às do caso da guia de ondas estudadas na seção anterior, e elas resultaram em uma discretização para os valores do número de onda de corte k_c ou para as frequências de corte ω_c . Conseqüentemente, apenas algumas frequências ω serão possíveis para as ondas dentro da cavidade ressonante. Podemos ver isso se recordarmos as equações 26.93, 26.106 e 26.236, reescritas na forma

$$k_{c,nm}^2 = k_0^2 - k_q^2 \quad (26.246)$$

ou

$$k_{c,nm}^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \frac{q^2 \pi^2}{L^2}$$

ou ainda,

$$\omega^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \left[k_{c,nm}^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \right]$$

ou, finalmente,

$$\omega_{nmq} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{k_{c,nm}^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2}} \quad (26.247)$$

Assim, a forma geométrica particular da guia fornece a expressão explícita para a discretização da frequência ou número de onda de corte, e com isso temos uma discretização na frequência ω da radiação dentro da cavidade ressonante. Para os casos vistos, temos, para uma cavidade ressonante retangular, usando 26.180,

$$k_{c,nm}^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}$$

e 26.247 fica

$$\omega_{nmq} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{q^2}{L^2}} \quad (26.248)$$

enquanto, para uma cavidade ressonante cilíndrica, por 26.191,

$$k_{c,mn} = \frac{\alpha_{m,n}}{R}$$

temos, para as frequências possíveis em modos MT,

$$\omega_{nmq}^{\text{MT}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{\alpha_{m,n}^2}{R^2} + \frac{q^2\pi^2}{L^2}} \quad (26.249)$$

e, para modos ET, usando 26.213,

$$k_c = \frac{\beta_{m,n}}{R}$$

achamos

$$\omega_{nmq}^{\text{ET}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{\beta_{m,n}^2}{R^2} + \frac{q^2\pi^2}{L^2}} \quad (26.250)$$

onde $\alpha_{m,n}$ são raízes das funções de Bessel de primeiro tipo e $\beta_{m,n}$ são raízes das derivadas dessas funções. Note que cavidades ressonantes são bastante sensíveis à frequência aplicada, de modo que apenas frequências iguais ou muito próximas aos valores definidos acima são capazes de ocorrer em excitações das cavidades, e a largura da faixa de frequências tolerada depende basicamente da geometria da cavidade. Uma cavidade bem projetada pode facilmente ter sensibilidades da ordem de 1 parte em 1000, na faixa de frequências da região de microondas, por exemplo. Nesse sentido, uma grandeza importante é o fator de qualidade da cavidade ressonante, dado por

$$Q = \omega_r \frac{U}{P_{abs}} \quad (26.251)$$

onde ω_r é uma das frequências de ressonância da cavidade, U é a energia média armazenada nos campos existentes na cavidade e P_{abs} é a potência média dissipada nos condutores que formam a cavidade. Esse fator mede a “qualidade” da cavidade, ou seja, quão estreita é a faixa de frequências em torno de uma dada frequência de ressonância em que a cavidade responde ao

ser excitada ou sintonizada. Fatores de qualidade altos significam intervalos de frequência muito pequenos em torno da frequência de ressonância, e é essa a condição que se deseja quando em funcionamento. Vamos determinar essa grandeza para os modos ET, partindo dos campos dados pelas equações 26.237 e 26.239. Primeiro, vamos determinar a densidade média de energia, partindo de 26.114,

$$\langle u_{\text{elET}} \rangle = \frac{\epsilon}{4} \Re [\vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}}^*] \quad (26.252)$$

Assim, precisamos calcular, inicialmente,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}}^* &= (\vec{\mathcal{E}}_{z,\text{ET}} + \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}}) \cdot (\vec{\mathcal{E}}_{z,\text{ET}}^* + \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}}^*) \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon\mu} (\vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} + \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}) \cdot (\vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* + \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}^*) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}}^* &= \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}}^* \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon\mu} [\vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* + \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}^* + \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* + \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}^*] \end{aligned}$$

ou ainda, considerando as ortogonalidades entre as componentes de $\vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}}$,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{\text{ET}}^* &= \\ \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}^* \end{aligned} \quad (26.253)$$

Agora, usando a equação 26.237, calculamos

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,\text{TE}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{TE}}^* = \vec{\mathcal{B}}_z(x, y) \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \cdot \vec{\mathcal{B}}_z^*(x, y) \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{i\omega t}$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_{z,\text{TE}}^* \cdot \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{TE}}^* = |\mathcal{B}_z|^2 \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \quad (26.254)$$

Note que a função $\vec{\mathcal{B}}_z$ depende de x e y . Em seguida, obtemos, mediante 26.239a,

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,TE} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,TE}^* = \left[-\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \right] \cdot \left[\frac{i}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{k_0}{k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^* \right]$$

onde $\vec{\mathcal{B}}_{z,ET} = \vec{\mathcal{B}}_{z,ET}(x, y, z, t)$. Fazendo algumas manipulações, temos

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,TE} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,TE}^* = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{k_0^2}{k_c^4} (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}) \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^*] \quad (26.255)$$

Usando a identidade 1.20, podemos escrever

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^*] = \\ (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) [\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^*] - [\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^*] (\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}) \end{aligned}$$

ou

$$(\hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET}) \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^*] = \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^*$$

Então, a equação 26.255 fica

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,TE} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,TE}^* = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{k_0^2}{k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_{z,ET} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_{z,ET})^*$$

Usando a forma explícita para $\vec{\mathcal{B}}_{z,TE}$ dada em 26.237, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}_{t,TE} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{t,TE}^* = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{k_0^2}{k_c^4} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \quad (26.256)$$

Por fim, precisamos calcular, usando 26.239b,

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,TE} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,TE}^* = \left[\frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial z} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial z} \right)^* \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,TE} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,TE}^* = \frac{1}{k_c^4} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial z} \right) \cdot \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial z} \right)^*$$

Usando a forma explícita 26.237, achamos

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial z} = \frac{q\pi}{L} \mathcal{B}_z \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \quad (26.257)$$

e, tomando o complexo conjugado,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{B}_{z,ET}}{\partial z}\right)^* = \frac{q\pi}{L} \vec{\mathcal{B}}_z^* \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{i\omega t}$$

Portanto, temos

$$\vec{\mathcal{B}}_{t,TE} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{t,TE}^* = \frac{1}{k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \quad (26.258)$$

Reunindo as equações 26.254, 26.256 e 26.258 em 26.253, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{ET} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{ET}^* + \frac{1}{\epsilon\mu} \vec{\mathcal{B}}_{ET} \cdot \vec{\mathcal{B}}_{ET}^* = \\ \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{k_0^2}{k_c^4} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* + \frac{1}{\epsilon\mu} |\mathcal{B}_z|^2 \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \\ + \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{1}{k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \end{aligned} \quad (26.259)$$

A densidade volumétrica de energia, dada pela equação 26.252, fica, considerando a equação 26.259,

$$\begin{aligned} \langle u_{elET} \rangle = \frac{\epsilon}{4} \Re \left[\frac{k_0^2}{\mu\epsilon k_c^4} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* + \frac{1}{\epsilon\mu} |\mathcal{B}_z|^2 \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \right. \\ \left. + \frac{q^2 \pi^2}{\epsilon\mu k_c^4 L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \langle u_{elET} \rangle = \frac{k_0^2}{4\mu k_c^4} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* + \frac{1}{4\mu} |\mathcal{B}_z|^2 \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \\ + \frac{q^2 \pi^2}{4\mu k_c^4 L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \end{aligned} \quad (26.260)$$

Note que, como essa é uma densidade volumétrica, será preciso integrá-la no volume da cavidade para obtermos a energia total. Duas integrais importantes são

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) dz = \int_0^L \frac{1 - \cos\left(\frac{2q\pi z}{L}\right)}{2} dz$$

ou

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) dz = \frac{1}{2} \left[z - \frac{L}{2q\pi} \sin\left(\frac{2q\pi z}{L}\right) \right]_0^L$$

e, finalmente,

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) dz = \frac{L}{2} \quad (26.261)$$

Portanto, temos também, usando $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

$$\int_0^L \left[1 - \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \right] dz = \frac{L}{2}$$

ou

$$\int_0^L dz - \int_0^L \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) dz = \frac{L}{2}$$

de modo que

$$\int_0^L \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) dz = \frac{L}{2} \quad (26.262)$$

Agora, podemos efetuar a integral em z da densidade volumétrica de energia, o que resulta na densidade de energia por unidade de área transversal, ou seja,

$$\frac{dU_{\text{ET}}}{dA} = \int_0^L \langle u_{\text{elET}} \rangle dz$$

ou, usando 26.260, temos

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{ET}}}{dA} = \int_0^L & \left[\frac{k_0^2}{4\mu k_c^4} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\mu} |\mathcal{B}_z|^2 \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) + \frac{q^2 \pi^2}{4\mu k_c^4 L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \right] dz \end{aligned}$$

Utilizando as integrais 26.261 e 26.262 já calculadas, temos

$$\frac{dU_{\text{ET}}}{dA} = \frac{k_0^2 L}{8\mu k_c^4} \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* + \frac{L}{8\mu} |\mathcal{B}_z|^2 + \frac{q^2 \pi^2}{8\mu k_c^4 L} \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*$$

ou

$$\frac{dU_{\text{ET}}}{dA} = \frac{L}{8\mu k_c^4} \left(k_0^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \right) \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* + \frac{L}{8\mu} |\mathcal{B}_z|^2 \quad (26.263)$$

Agora, obtemos a energia média armazenada integrando essa expressão na área transversal, ou seja,

$$U_{\text{ET}} = \int_A \frac{dU_{\text{ET}}}{dA} dA$$

ou

$$U_{\text{ET}} = \frac{L}{8\mu k_c^4} \left(k_0^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \right) \int_A \nabla_t \mathcal{B}_z \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* dA + \frac{L}{8\mu} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA \quad (26.264)$$

Podemos reescrever a primeira integral usando a primeira identidade de Green bidimensional, o que resulta na equação 26.123,

$$\int_A (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \cdot \nabla_t \mathcal{B}_z dA = k_c^2 \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA \quad (26.265)$$

onde $k_c = k_{c,nm}$ é dado pela equação 26.246,

$$k_{c,nm}^2 = k_0^2 - k_q^2$$

ou

$$k_{c,nm}^2 = k_0^2 - \frac{q^2 \pi^2}{L^2}$$

Com isso, a equação 26.264 torna-se

$$U_{\text{ET}} = \frac{L}{8\mu k_{c,nm}^2} \left(k_0^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \right) \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA + \frac{L}{8\mu} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA$$

ou

$$U_{\text{ET}} = \frac{L}{8\mu k_{c,nm}^2} \left(k_0^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2} + k_{c,nm}^2 \right) \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA$$

ou ainda, usando o valor de $k_{c,nm}^2$ no numerador,

$$U_{\text{ET}} = \frac{L}{8\mu k_{c,nm}^2} \left(k_0^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2} + k_0^2 - \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \right) \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA$$

e então,

$$U_{\text{ET}} = \frac{L k_0^2}{4\mu k_{c,nm}^2} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA \quad (26.266)$$

que fornece a energia média armazenada na cavidade para os modos ET. Os modos MT são estudados no exercício 26.9. O próximo passo agora é determinar a potência absorvida pelo condutor que forma a cavidade. A potência média absorvida pelo condutor, por unidade de área, é dada pela equação 23.119,

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} = \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta} |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}|^2$$

onde $\hat{n}$ é o versor normal à área considerada. No caso de uma cavidade, temos três superfícies, as duas “tampas” e o condutor lateral que forma a guia de ondas que foi delimitada pelas tampas. No caso das tampas, $\hat{n}$ está na direção z , enquanto, na lateral, ele está no plano xy , para a configuração que estamos usando. Assim, precisamos determinar, inicialmente, o produto $\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}$ nas superfícies relevantes. Vamos iniciar considerando a tampa superior, em $z = L$, ou seja,

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = -\frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{k}} \times (\vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} + \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}})$$

ou

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = -\frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}}$$

Utilizando a equação 26.239b, obtemos

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = -\frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{k}} \times \left[\frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \right) \right]$$

ou

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = -\frac{1}{\mu k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \right)$$

Considerando a forma explícita para o termo entre parênteses, dado pela expressão 26.257, achamos

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = -\frac{1}{\mu k_c^2} \hat{\mathbf{k}} \times \nabla_t \left[\frac{q\pi}{L} \mathcal{B}_z \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \right]$$

ou

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = -\frac{1}{\mu k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z) \quad (26.267)$$

Considerando o complexo conjugado, temos

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^* = -\frac{1}{\mu k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \quad (26.268)$$

Agora, efetuando o produto escalar entre 26.267 e 26.268, obtemos o módulo quadrado de $\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}$, isto é,

$$\begin{aligned} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^*) &= \left[-\frac{1}{\mu k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z) \right] \\ &\quad \cdot \left[-\frac{1}{\mu k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{i\omega t} \hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^*) &= \\ &\quad \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] \end{aligned} \quad (26.269)$$

Usando a identidade 1.20, encontramos

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] &= \\ &\quad (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}})[(\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] - [\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*][\hat{\mathbf{k}} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \end{aligned}$$

ou, considerando as devidas ortogonalidades,

$$[\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \cdot [\hat{\mathbf{k}} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] = (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \quad (26.270)$$

Empregando 26.270 em 26.269, achamos

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|^2 = \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \quad (26.271)$$

Note que, na tampa em $z = L$, temos

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|_{z=L}^2 = \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \quad (26.272)$$

O cálculo para a tampa em $z = 0$ é idêntico, apenas $\hat{n} = +\hat{\mathbf{k}}$, e o resultado é

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|_{z=0}^2 = \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \quad (26.273)$$

Portanto, a potência média absorvida por unidade de área nas duas tampas fica

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} \Big|_{\text{tampas}} = 2 \times \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta} \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*$$

ou

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} \Big|_{\text{tampas}} = \frac{1}{\mu^2 k_c^4 \mathfrak{s}\zeta} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \quad (26.274)$$

e, integrando na área, temos

$$\langle P \rangle_{\text{abs}} \Big|_{\text{tampas}} = \frac{1}{\mu^2 k_c^4 \mathfrak{s}\zeta} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \int_A (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* dA$$

ou, usando a equação 26.265,

$$\langle P \rangle_{\text{abs}} \Big|_{\text{tampas}} = \frac{1}{\mu^2 k_{c,nm}^2 \mathfrak{s}\zeta} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA \quad (26.275)$$

Precisamos agora calcular $\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}$ na superfície lateral da cavidade, ou seja,

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{t,\text{ET}} + \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_{z,\text{ET}}$$

Usando as equações 26.237 e 26.239b, temos

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \left[\frac{1}{k_c^2} \nabla_t \left(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{\mu} \hat{n} \times \left[\vec{\mathcal{B}}_z(x, y) \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \right]$$

ou, usando a forma explícita 26.257,

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = \frac{1}{\mu k_c^2} \hat{n} \times \nabla_t \left[\frac{q\pi}{L} \mathcal{B}_z \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \right] + \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}} = & \frac{1}{\mu k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \\ & + \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z \quad (26.276) \end{aligned}$$

O complexo conjugado dessa expressão é

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^* = & \frac{1}{\mu k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{i\omega t} \hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \\ & + \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{i\omega t} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z^* \quad (26.277) \end{aligned}$$

Efetuamos agora o produto escalar entre as equações 26.276 e 26.277, encontrando

$$\begin{aligned} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}^*) = & \left[\frac{1}{\mu k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_z \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{-i\omega t} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z \right] \cdot \left[\frac{1}{\mu k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{i\omega t} \hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu} \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) e^{i\omega t} \hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z^* \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} |\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|^2 = & \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot [\hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] \\ & + \frac{1}{\mu^2 k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z^*) \\ & + \frac{1}{\mu^2 k_c^2} \frac{q\pi}{L} \cos\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{L}\right) (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z) \cdot [\hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] \\ & + \frac{1}{\mu^2} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z^*) \end{aligned}$$

Note que $\hat{n}$ neste caso está no plano xy , assim como $\nabla_t \mathcal{B}_z$, de modo que $\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_z$ está na direção z . Além disso, $\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z$ está no plano xy . Com isso, a equação se simplifica para

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|^2 = \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) (\hat{n} \times \nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot [\hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] \\ + \frac{1}{\mu^2} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z^*) \quad (26.278)$$

Para reescrever a expressão acima, vamos usar a identidade 1.20 duas vezes, começando com

$$[\hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \cdot [\hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] = \\ (\hat{n} \cdot \hat{n})[(\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] - [\hat{n} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*][\hat{n} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)]$$

ou

$$[\hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \cdot [\hat{n} \times (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*] = \\ (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* - [\hat{n} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*][\hat{n} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \quad (26.279)$$

Aplicando mais uma vez 1.20, temos

$$(\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z^*) = (\hat{n} \cdot \hat{n})(\vec{\mathcal{B}}_z \cdot \vec{\mathcal{B}}_z^*) - (\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_z^*)(\hat{n} \cdot \vec{\mathcal{B}}_z)$$

ou

$$(\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z) \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{B}}_z^*) = |\mathcal{B}_z|^2 \quad (26.280)$$

Voltando à equação 26.278 e usando as equações 26.279 e 26.280, achamos

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|^2 = \\ \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \left\{ (\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^* - [\hat{n} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*][\hat{n} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)] \right\} \\ + \frac{1}{\mu^2} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) |\mathcal{B}_z|^2 \quad (26.281)$$

Quando aplicamos essa equação na área lateral da cavidade, dada pela superfície S_g , temos

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|_{S_g}^2 = \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) \left\{ [(\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*]_{S_g} \right. \\ \left. - \{[\hat{n} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*][\hat{n} \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)]\}_{S_g} \right\} + \frac{1}{\mu^2} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) |\mathcal{B}_z|_{S_g}^2$$

ou, usando a condição de contorno 26.91c, temos

$$|\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{\text{ET}}|_{S_g}^2 = \frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) [(\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*]_{S_g} + \frac{1}{\mu^2} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) |\mathcal{B}_z|_{S_g}^2 \quad (26.282)$$

Portanto, a potência média absorvida por unidade de área lateral da cavidade é

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} \Big|_{S_g} = \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta} \left[\frac{1}{\mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) [(\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*]_{S_g} + \frac{1}{\mu^2} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) |\mathcal{B}_z|_{S_g}^2 \right]$$

ou

$$\frac{d\langle P \rangle_{\text{abs}}}{dA} \Big|_{S_g} = \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta \mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) [(\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*]_{S_g} + \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta \mu^2} \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) |\mathcal{B}_z|_{S_g}^2 \quad (26.283)$$

Integrando essa expressão em z e numa variável ℓ que representa a curva no plano xy descrita pelo contorno C da seção transversal da cavidade, temos a potência média absorvida pela lateral, ou seja,

$$\langle P \rangle_{\text{abs}} \Big|_{S_g} = \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta \mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \oint_C \int_0^L \cos^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) [(\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*]_{S_g} dz d\ell + \frac{1}{2\mathfrak{s}\zeta \mu^2} \oint_C \int_0^L \sin^2\left(\frac{q\pi z}{L}\right) |\mathcal{B}_z|_{S_g}^2 dz d\ell$$

ou, utilizando as integrais 26.261 e 26.262, temos

$$\langle P \rangle_{\text{abs}} \Big|_{S_g} = \frac{1}{4\mathfrak{s}\zeta \mu^2 k_c^4} \frac{q^2 \pi^2}{L} \oint_C [(\nabla_t \mathcal{B}_z) \cdot (\nabla_t \mathcal{B}_z)^*]_{S_g} d\ell + \frac{L}{4\mathfrak{s}\zeta \mu^2} \oint_C |\mathcal{B}_z|_{S_g}^2 d\ell$$

ou ainda,

$$\langle P \rangle_{\text{abs}} \Big|_{S_g} = \frac{L}{4\mathfrak{s}\zeta \mu^2} \oint_C \left[\frac{q^2 \pi^2}{k_{c,nm}^4 L^2} |\nabla_t \mathcal{B}_z|^2 + |\mathcal{B}_z|^2 \right]_{S_g} d\ell \quad (26.284)$$

A potência média total absorvida na cavidade é a soma de 26.275 e 26.284, ou seja,

$$\langle P \rangle_{\text{abs}} = \frac{1}{\mu^2 k_{c,nm}^2 \mathfrak{s}\zeta} \frac{q^2 \pi^2}{L^2} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA + \frac{L}{4\mathfrak{s}\zeta \mu^2} \oint_C \left[\frac{q^2 \pi^2}{k_{c,nm}^4 L^2} |\nabla_t \mathcal{B}_z|^2 + |\mathcal{B}_z|^2 \right]_{S_g} d\ell$$

ou

$$\langle P \rangle_{\text{abs}} = \frac{1}{\mu^2 \mathfrak{s}\zeta} \left\{ \frac{q^2 \pi^2}{k_{c,nm}^2 L^2} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA + \frac{L}{4} \oint_C \left[\frac{q^2 \pi^2}{k_{c,nm}^4 L^2} |\nabla_t \mathcal{B}_z|^2 + |\mathcal{B}_z|^2 \right]_{S_g} d\ell \right\} \quad (26.285)$$

Agora, para determinar o fator $\mathcal{Q}$ de qualidade, reunimos as equações 26.266, 26.285 e também 26.247 (a qual dá as frequências de ressonância), na equação 26.251, ou seja,

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{k_{c,nm}^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2}} \times \frac{\frac{L k_0^2}{4\mu k_{c,nm}^2} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA}{\frac{1}{\mu^2 \mathfrak{s}\zeta} \left\{ \frac{q^2 \pi^2}{k_{c,nm}^2 L^2} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA + \frac{L}{4} \oint_C \left[\frac{q^2 \pi^2}{k_{c,nm}^4 L^2} |\nabla_t \mathcal{B}_z|^2 + |\mathcal{B}_z|^2 \right]_{S_g} d\ell \right\}}$$

ou, como

$$\mathcal{Q} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\mathfrak{s}\zeta L k_0}{4 k_{c,nm}^2} \sqrt{k_{c,nm}^2 + \frac{q^2 \pi^2}{L^2}} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA \times \left\{ \frac{q^2 \pi^2}{k_{c,nm}^2 L^2} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA + \frac{L}{4} \oint_C \left[\frac{q^2 \pi^2}{k_{c,nm}^4 L^2} |\nabla_t \mathcal{B}_z|^2 + |\mathcal{B}_z|^2 \right]_{S_g} d\ell \right\}^{-1}$$

Usando a definição 22.42 para a impedância do meio,

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

temos, para o fator de qualidade,

$$Q = \frac{Z\mathfrak{s}\zeta Lk_0}{4k_{c,nm}^2} \sqrt{k_{c,nm}^2 + \frac{q^2\pi^2}{L^2}} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA$$

$$\times \left\{ \frac{q^2\pi^2}{k_{c,nm}^2 L^2} \int_A |\mathcal{B}_z|^2 dA + \frac{L}{4} \oint_C \left[\frac{q^2\pi^2}{k_{c,nm}^4 L^2} |\nabla_t \mathcal{B}_z|^2 + |\mathcal{B}_z|^2 \right]_{S_g} d\ell \right\}^{-1}$$
(26.286)

onde, é importante lembrar, a profundidade de penetração é dada por 22.79,

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_c\mathfrak{s}}}$$

sendo que μ_c é a permeabilidade magnética do condutor que forma a cavidade ressonante. A expressão 26.286, apesar de ser aparentemente complicada, na verdade reduz-se, quando os campos apropriados a cada problema específico são substituídos nas integrais, a uma relação que envolve fatores geométricos como área das tampas, perímetro da superfície das tampas e altura da cavidade, além de depender das permeabilidades do meio e do condutor e também da profundidade de penetração no condutor. Assim, com uma escolha apropriada dos fatores acima, é possível fazer com que a qualidade da cavidade seja bastante alta, ou seja, ela responde apenas se for ser sintonizada ou excitada numa faixa de frequências bastante estreita em torno da frequência desejada. Note que esse resultado vale para modos ET, e os modos MT são estudados no exercício 26.9.

Um sistema interessante que pode ser aproximado por uma cavidade ressonante consiste na região formada pela superfície da Terra e pela ionosfera, dando origem a uma cavidade ressonante esférica onde o condutor interno tem o raio da Terra $R_T \approx 6400$ km e o outro, externo, formado pela ionosfera, tem um raio cerca de 100 km maior. Os modos nesse sistema têm frequências bastante baixas, correspondendo aos valores médios de 8, 14, 20, 26, 32, 37 e 43 Hz, sendo dadas, aproximadamente, por

$$\nu_\ell = 5,8\sqrt{\ell(\ell+1)} \quad (26.287)$$

Esses modos são chamados de ressonâncias Schumann, e eles correspondem a modos nos quais o sistema Terra-ionosfera é preferencialmente excitado. Assim, raios, que ocorrem a todo instante em algum local do planeta, agem como fontes de campos elétricos e magnéticos num amplo espectro de frequências, algumas das quais coincidem com as frequências de Schumann e se propagam pela

atmosfera em escala global. Os valores médios mencionados acima alteram-se diariamente e mesmo no decorrer de um dia, e eventos de alcance global podem alterar sensivelmente as frequências de ressonância de Schumann. Um exemplo foi a explosão de uma bomba nuclear no oceano Pacífico, nas ilhas Johnston e a uma altura bem acima do nível do mar, em 9 de julho de 1962, em que se constatou um decréscimo brusco de 3–5% nos valores das frequências das ressonâncias, seguido de um retorno gradual aos valores normais em algumas horas. Outra questão interessante com relação a essas ressonâncias é que existe a hipótese de que elas possam servir como uma espécie de termômetro global, já que as intensidades dos campos magnéticos associados a elas dependem dos raios que ocorrem na atmosfera, e esses, por sua vez, estão relacionados à temperatura atmosférica. Assim, alterações nas ressonâncias poderiam ser correlacionadas com alterações de temperatura global, o que pode ser utilizado, por exemplo, em medições do aquecimento global.

Após estudar alguns modos de transmissão de ondas eletromagnéticas, vamos passar ao estudo dos fenômenos de difração e espalhamento.

26.4 Exercícios

- 26.1** Seguindo o procedimento descrito na seção 26.1, estude a propagação de ondas entre os planos condutores, considerando agora os modos MT.
- 26.2** Resolva a equação 26.141 e mostre que as soluções são dadas pela equação 26.146.
- 26.3** Considerando o procedimento discutido no texto, obtenha, para uma guia na qual a radiação se propaga em modos MT, as grandezas
- densidade linear de energia armazenada nos campos;
 - potência transmitida pela guia;
 - potência dissipada por unidade de comprimento da guia.
- 26.4** Obtenha os campos eletromagnéticos para o modo TE_{01} numa guia de onda retangular, de lados a e $3a$, assim como a frequência de corte

$\omega_{c,01}$, o fluxo de potência e a potência transmitida associada a esse modo.

- 26.5** Obtenha os campos para o modo TE_{11} , assim como o fluxo de potência e a potência transmitida associada a esse modo, para uma guia de ondas de seção quadrada de lado a .
- 26.6** Obtenha, para as guias dos dois problemas anteriores, as grandezas associadas ao modo MT_{11} .
- 26.7** Obtenha os campos dos modos ET para uma cavidade ressonante de seção reta retangular de lados a e b e altura L .
- 26.8** Considerando uma cavidade ressonante cilíndrica de raio R e altura L , obtenha os campos dos modos ET e MT.
- 26.9** Determine, seguindo o procedimento apresentado no texto, o fator de qualidade Q para uma cavidade ressonante sujeita a modos MT.

Capítulo 27

Radiação, IV: Difração

N uma boa parte dos fenômenos que presenciamos em nossa vida diária, a luz, e a radiação em geral, se propagam como se fossem constituídas por raios de luz que descrevem trajetórias retilíneas entre dois pontos considerados. Esse é o domínio da óptica geométrica, e grande parte dos instrumentos ópticos comuns, como óculos, lupas, telescópios, microscópios, etc, faz uso dessa idéia. Entretanto, como já vimos, a radiação que incide num material atua, de alguma forma, sobre os constituintes do material, e sempre há algum tipo de reemissão de radiação. A radiação reemitida não necessariamente tem que ter as mesmas características da radiação inicial, de modo que fenômenos interessantes podem ocorrer. Um exemplo simples é o de um orifício que, ao ser iluminado por luz, produz, num anteparo, regiões anelares claras e escuras, sendo que, se fosse válida a óptica geométrica nesse caso, haveria apenas uma região central clara e o resto seria escuro. Esse é um exemplo onde ocorre o fenômeno de difração, no qual os raios de luz se “curvam” ao passarem por obstáculos, podendo atingir regiões proibidas pela óptica geométrica ¹. Estamos, então, no domínio da óptica física, onde os fenômenos são um pouco mais complexos e o formalismo matemático é mais complicado do que na óptica geométrica. Por outro lado, qualquer estudo estrutural feito em qualquer material passa necessariamente por uma medida de difração de raios-x ou nêutrons do material, e a base dessa técnica experimental é justamente o fenômeno de difração. Assim, neste capítulo estudamos esse fenômeno, introduzindo as teorias escalar e vetorial de difração, assim como

¹ Note que o fenômeno de difração ocorre também com ondas sonoras. Por exemplo, ocorre difração quando estamos de um lado de um muro e ouvimos sons produzidos do outro lado dele.

os limites de Fraunhofer e Fresnel para a difração. A teoria de difração inclui também o estudo do espalhamento, sendo que eles são basicamente o mesmo fenômeno com dois nomes diferentes, dependendo da comparação entre o comprimento de onda da radiação e o tamanho característico do objeto no qual a radiação incide, chamado de obstáculo. Quando o obstáculo é muito menor que o comprimento de onda da radiação, é usual chamar o fenômeno de espalhamento, ao passo que, se ele for da mesma ordem de tamanho ou maior que o comprimento de onda, chamamos o fenômeno de difração. Já estudamos na seção 25.1.1 um exemplo importante de espalhamento, e vamos nos concentrar em estabelecer as bases, juntamente com exemplos, da difração. É interessante começar o estudo apresentando um método qualitativo bastante útil que explica a difração (e também outros fenômenos, como a reflexão e a refração), devido a Huygens.

27.1 Princípio de Huygens e Visão Qualitativa da Difração

Para explicar qualitativamente a propagação de ondas, incluindo também reflexão, refração e difração, Christian Huygens, em 1678, desenvolveu uma idéia simples e bastante útil que pode ser aplicada a esses processos, chamada de princípio de Huygens. Vamos considerar, como exemplo ilustrativo, frentes de onda plana, movendo-se com velocidade $\vec{v}$, como mostra a figura 27.1.

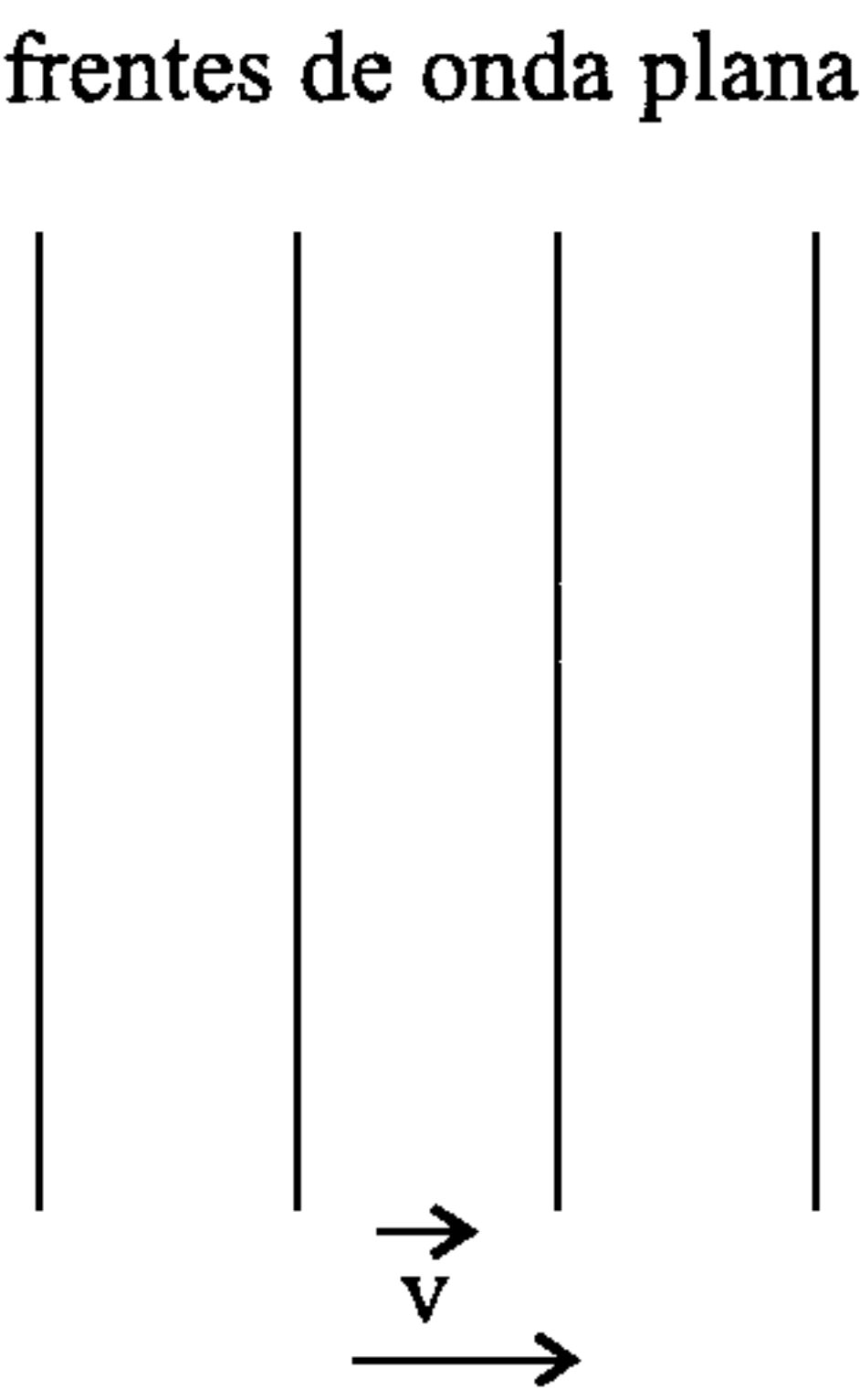


Figura 27.1: Frentes de onda plana, para a construção de Huygens.

Vamos isolar uma das frentes de onda e vamos considerar pontos sobre ela que chamaremos de minifontes, como mostra a figura 27.2.

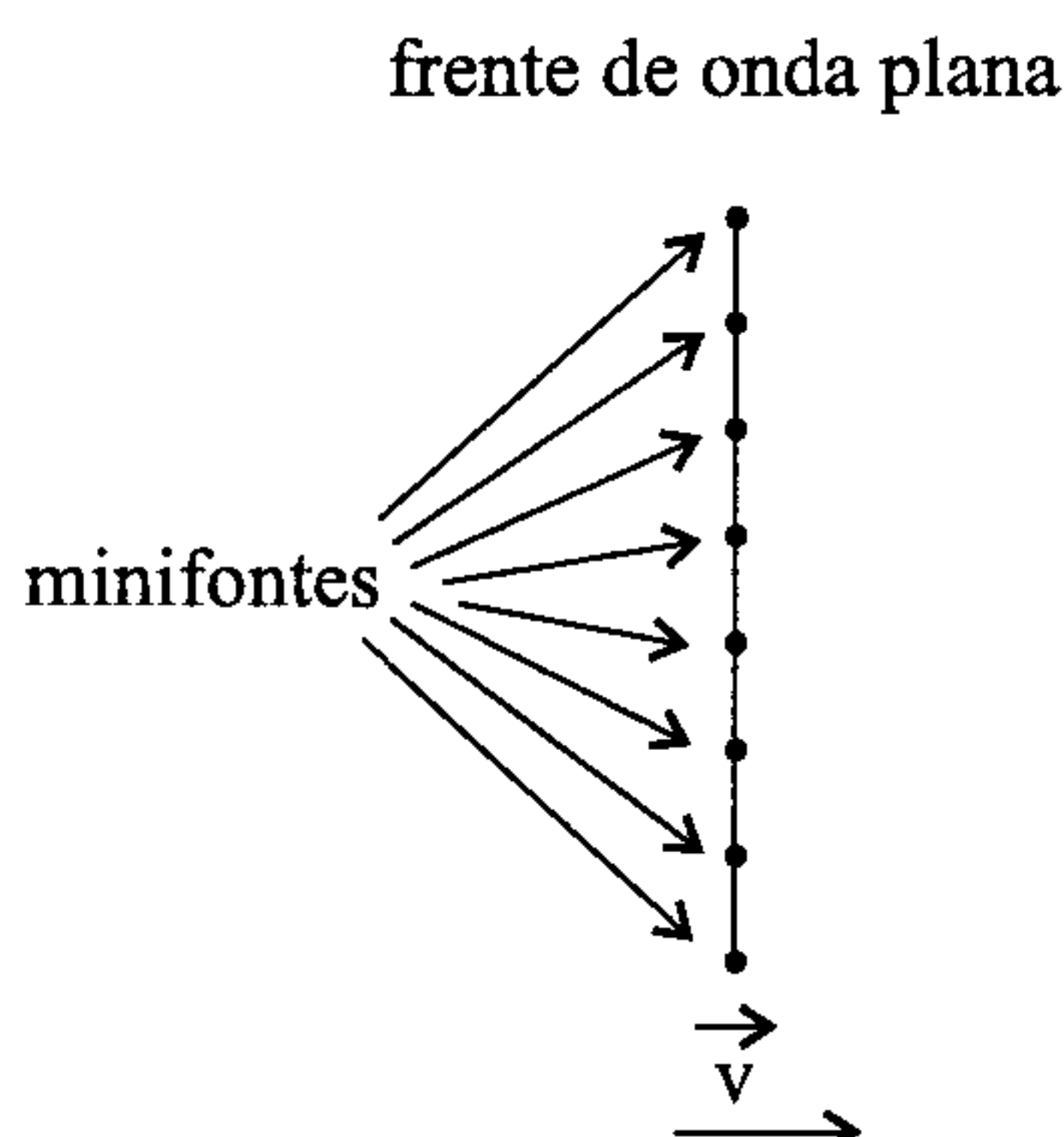


Figura 27.2: Uma frente de onda plana com minifontes.

O princípio de Huygens, ou construção de Huygens, estabelece que devemos considerar cada uma das minifontes como sendo uma fonte de uma minionda, que se propaga a partir da minifonte em todas as direções, na forma esférica. Então, considerando que a figura 27.2 represente a frente de onda num instante t_1 , a mesma frente de onda num instante de tempo t_2 pode ser obtida através da superfície que intercepta todas as miniondas no instante t_2 , como mostra a figura 27.3, respeitando-se as condições de contorno e a velocidade original das ondas.

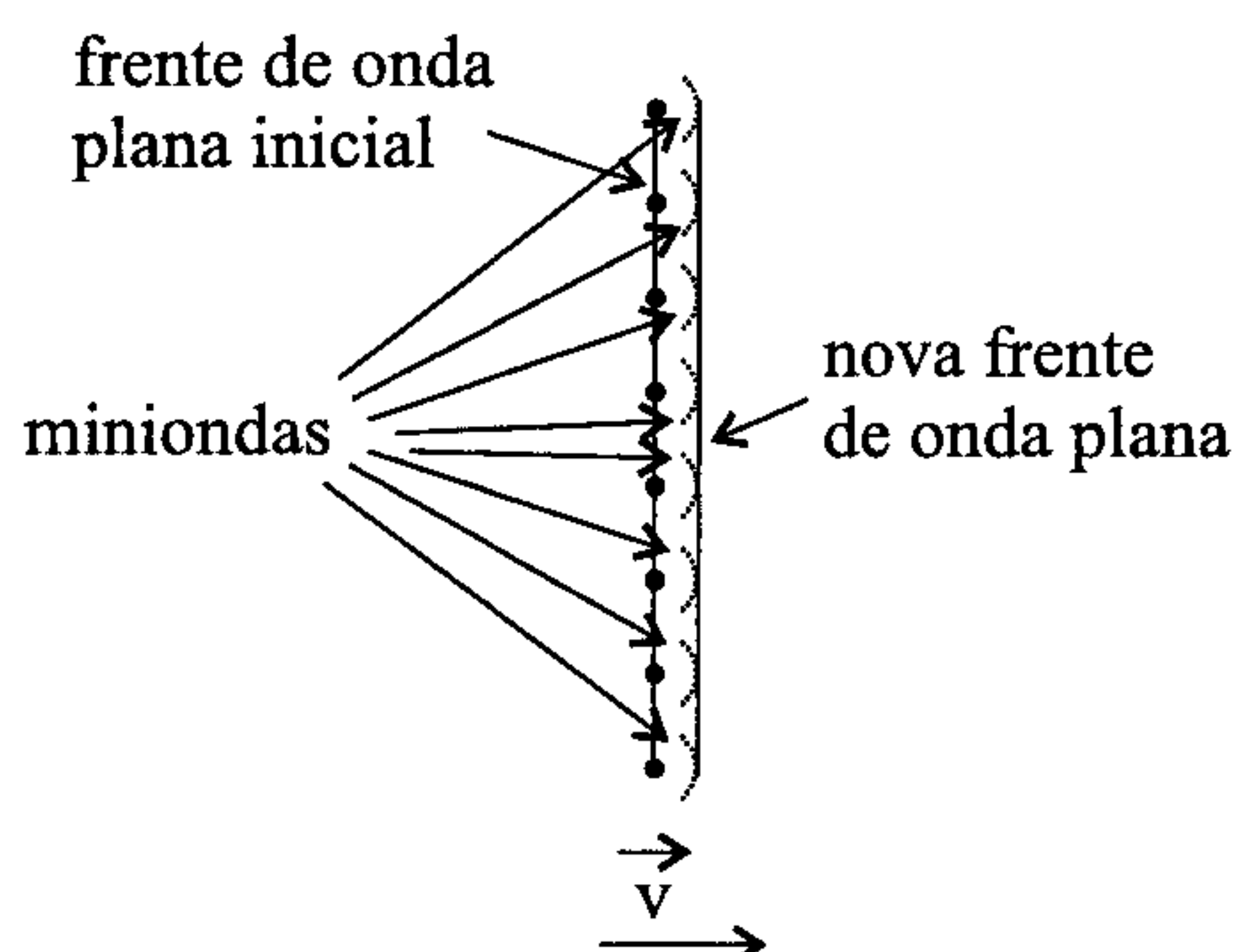


Figura 27.3: Miniondas obtidas a partir das minifontes e intersecção, formando a nova frente de onda.

Assim, uma frente de onda plana de extensão infinita continuaria a se propagar dessa forma até eventualmente interagir com alguma interface, como um espelho, onde teríamos reflexão, uma lâmina d'água, onde ocorreria refração, ou um obstáculo, onde aconteceria difração. Esse é o caso que nos interessa. A figura 27.4 ilustra o que ocorre quando ondas se propagam através de um orifício feito num obstáculo, em termos das miniondas.

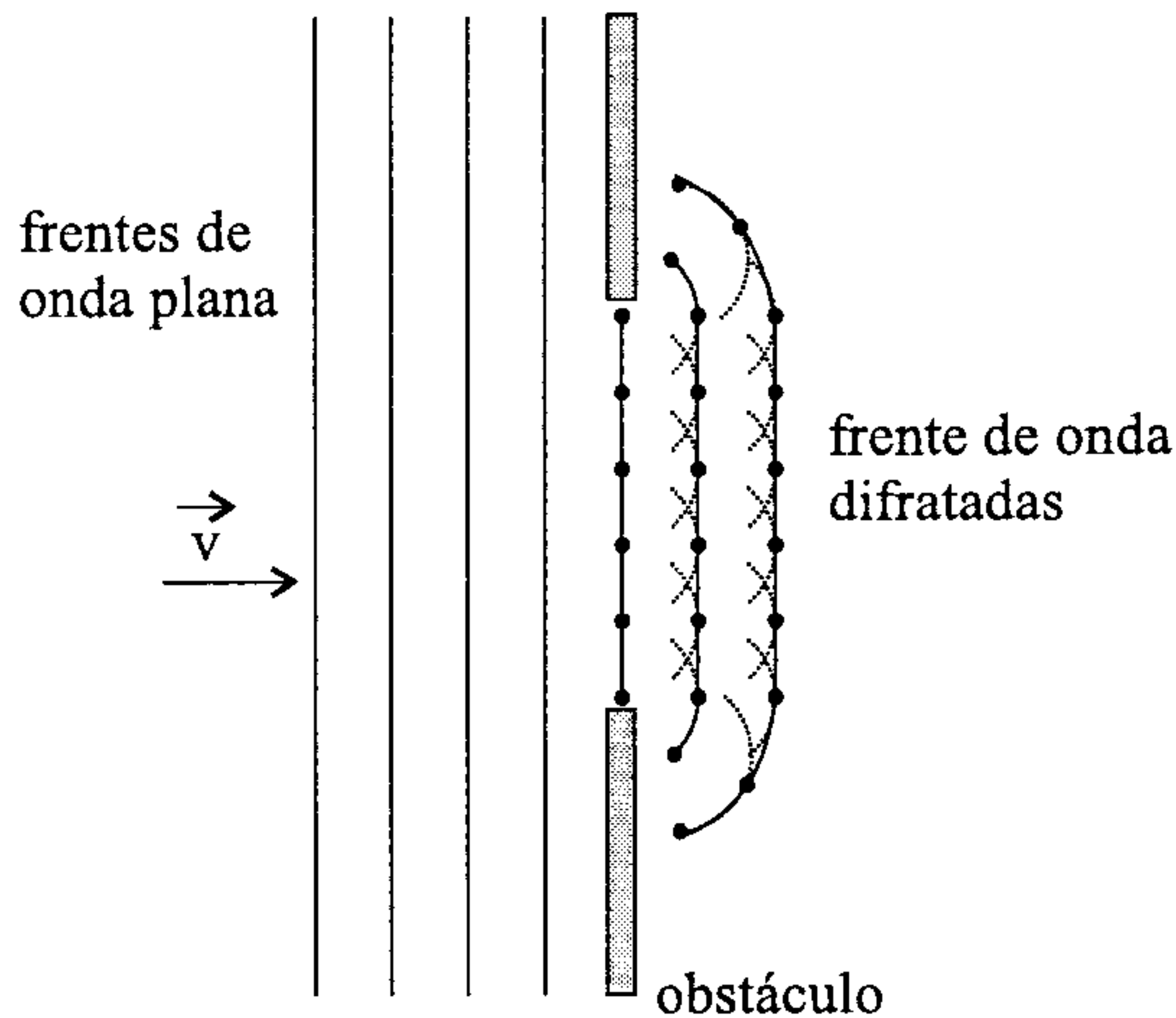


Figura 27.4: Construção de Huygens para difração através de um orifício.

Como se vê na figura, as frentes de onda inicialmente planas, ao passarem pelo orifício, perdem o caráter plano e começam a se curvar, alterando a direção de propagação e atingindo regiões proibidas pela óptica geométrica. Note que, considerando um dado intervalo de tempo, se o comprimento de onda da radiação for pequeno quando comparado com o tamanho do orifício, então na região próxima a ele os campos que formam a onda não se alteram apreciavelmente. Entretanto, se o comprimento de onda for da mesma ordem ou maior que o orifício, então os efeitos de difração tornam-se perceptíveis logo após o orifício.

Qualitativamente, a construção de Huygens dá uma idéia bastante clara do que ocorre durante a difração. Entretanto, precisamos também de algo quantitativo, e para isso vamos então iniciar nosso estudo apresentando a teoria escalar de difração.

27.2 Teoria Escalar de Difração

Para estabelecer uma teoria sobre difração, podemos iniciar fazendo considerações simples e gerais a respeito do fenômeno. A primeira coisa a fazer é definir alguns termos relevantes. A figura 27.5 ilustra esses termos.

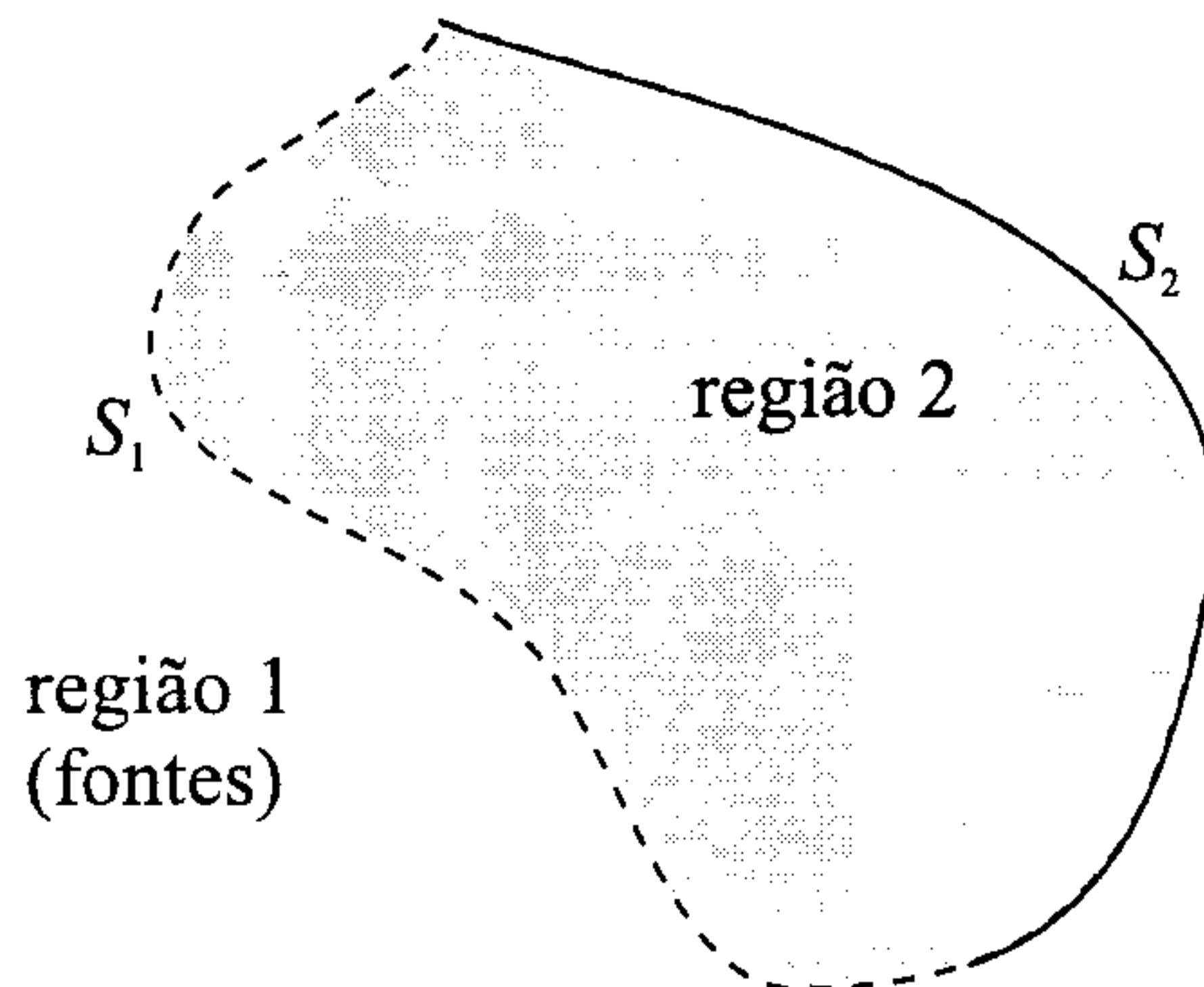


Figura 27.5: Considerações iniciais sobre difração.

Na região 1 estão as fontes de radiação, que interagem com a superfície S_1 , que pode ser, por exemplo, uma fenda de difração numa tela, e o resultado dessa interação são campos de radiação que se propagam na região 2. Em geral, considera-se que a superfície S_2 não participa do problema, podendo ser considerada como estando muito afastada da superfície S_1 (no infinito, portanto). Assim, a idéia é tentar relacionar os campos na região 2 com a superfície S_1 ou com os campos na região 1. Vamos considerar que os campos tenham uma dependência temporal descrita por uma função harmônica, do tipo $e^{-i\omega t}$. Além disso, qualquer componente escalar dos campos, tanto elétrico como magnético, será representado por $\aleph(\vec{r})$, e deve ser descrito por uma equação de Helmholtz dada por

$$\nabla^2 \aleph + k^2 \aleph = 0 \quad (27.1)$$

Agora, introduzimos uma função de Green $\mathcal{U}(\vec{r})$ para resolver a equação de Helmholtz acima, ou seja,

$$\nabla^2 \mathcal{U} + k^2 \mathcal{U} = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'') \quad (27.2)$$

onde $\vec{r}''$ indica posições no volume da região 2. Vamos considerar agora o

teorema de Green 1.62,

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot \hat{n} dA$$

sendo que o operador ∇ age nas coordenadas com duas linhas. Fazendo

$$\Psi = \aleph \qquad \Phi = \mathfrak{U}$$

achamos, para o teorema de Green,

$$\int_V (\aleph \nabla^2 \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \nabla^2 \aleph) dV = \oint_S (\aleph \nabla \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \nabla \aleph) \cdot \hat{n} dA$$

Utilizando 27.1 e 27.2, temos

$$\int_V \{ \aleph [-\delta(\vec{r} - \vec{r}'') - k^2 \mathfrak{U}] + \mathfrak{U} k^2 \aleph \} dV = \oint_S (\aleph \nabla \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \nabla \aleph) \cdot \hat{n} dA$$

ou

$$\int_V [-\aleph \delta(\vec{r} - \vec{r}'') - k^2 \aleph \mathfrak{U} + \mathfrak{U} k^2 \aleph] dV = \oint_S (\aleph \nabla \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \nabla \aleph) \cdot \hat{n} dA \quad (27.3)$$

e então,

$$\aleph(\vec{r}) = \oint_S (\aleph \nabla \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \nabla \aleph) \cdot (-\hat{n}) dA$$

ou, definindo uma normal $\hat{n}' = -\hat{n}$ que aponta para dentro do volume, e não para fora, como é usual, temos

$$\aleph(\vec{r}) = \oint_S (\aleph \nabla \mathfrak{U} - \mathfrak{U} \nabla \aleph) \cdot \hat{n}' dA \quad (27.4)$$

Agora introduzimos a função de Green dada por H.39, ou seja,

$$\mathfrak{U}(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}''|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad (27.5)$$

onde $R = |\vec{r} - \vec{r}''|$ e, com isso, achamos

$$\aleph(\vec{r}) = \oint_S \left[\aleph \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{4\pi R} \right) - \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \nabla \aleph \right] \cdot \hat{n}' dA$$

ou

$$\aleph(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\aleph \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \aleph \right] \cdot \hat{n}' dA$$

Agora, utilizamos a expressão 25.59,

$$\nabla \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] = ik \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \hat{r}$$

e encontramos, lembrando que $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}''$ e que o operador ∇ age sobre as coordenadas com duas linhas, o que acrescenta um sinal negativo à expressão acima,

$$\aleph(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[-\aleph ik \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 - \frac{1}{ikR} \right) \hat{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \nabla \aleph \right] \cdot \hat{n}' dA$$

ou

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikR}}{R} \left[ik \left(1 - \frac{1}{ikR} \right) \hat{R} \aleph + \nabla \aleph \right] \cdot \hat{n}' dA \quad (27.6)$$

Agora devemos efetuar considerações a respeito da superfície S , que é formada pelas superfícies S_1 e S_2 . Inicialmente, vamos subdividir a superfície S_1 em duas outras regiões, como mostra a figura 27.6. Na superfície $S_{1,o}$ ficam os orifícios por onde a radiação pode passar, e a superfície $S_{1,t}$ fica atrás da tela (que seria o obstáculo) que contém os orifícios, do lado da região 2. Temos assim três superfícies, $S_{1,o}$, $S_{1,t}$ e S_2 . Para essas superfícies fazemos as seguintes hipóteses, conhecidas como hipóteses de Kirchhoff para as condições de contorno:

1. Na superfície $S_{1,o}$ tudo se passa como se não houvesse o obstáculo, ou seja, a presença da tela não altera significativamente os campos originalmente produzidos na região 1 e que estão se propagando em direção à região 2. Assim, por hipótese, os valores de $\aleph$ e $\nabla \aleph \cdot \hat{n}'$ em $S_{1,o}$ são os mesmos, com ou sem tela. Se o tamanho característico do orifício for bem maior que o comprimento de onda da radiação, essa hipótese se justifica, conforme vimos quando discutimos a construção de Huygens para a difração. Porém, se o orifício for da mesma ordem ou maior que o comprimento de onda, ela perde a validade. Em qualquer caso, na

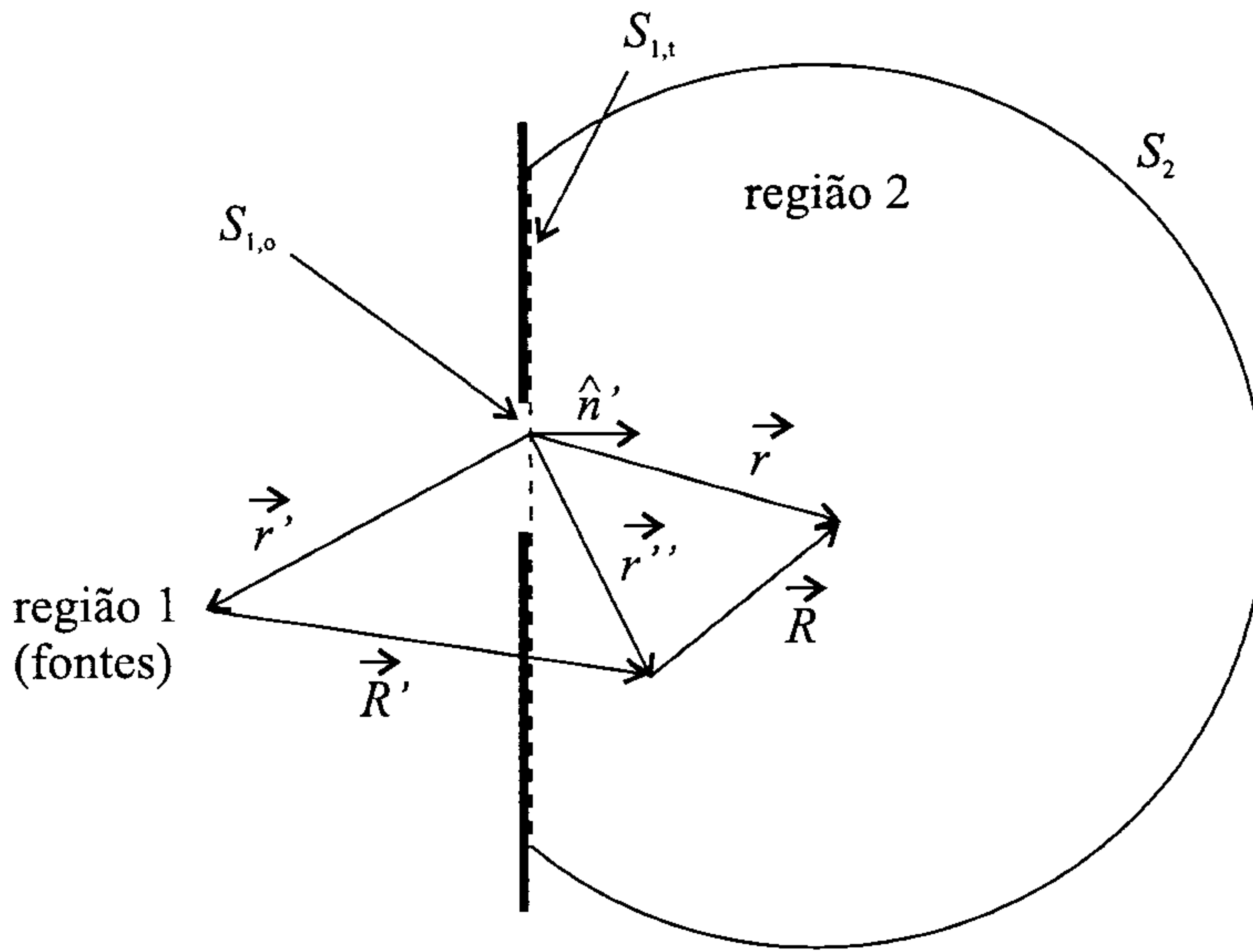


Figura 27.6: Superfícies importantes para a difração.

região de $S_{1,o}$ próxima à fronteira entre o orifício e a tela (ou entre $S_{1,o}$ e $S_{1,t}$) essa hipótese também falha.

2. Na superfície $S_{1,t}$ considera-se que $\mathcal{N} = 0$ e $\nabla \mathcal{N} \cdot \hat{n}' = 0$ em toda a superfície. Se a tela for perfeitamente opaca, essa hipótese seria justificável. Entretanto, ela também perde a validade na fronteira entre a tela e o orifício.
3. Para a superfície S_2 , supõe-se que ela seja escolhida de forma que não contribua para a integral. Note que, em princípio, isso não precisaria ser assim. É importante lembrar que os campos na região 2 são campos de radiação, os quais são descritos funcionalmente por

$$\mathcal{N}(\vec{r}) \sim f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (27.7)$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial r} \sim f(\theta, \phi) \left[ik \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \right] = ik \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \mathcal{N} \quad (27.8)$$

Portanto, considerando as expressões 27.7 e 27.8, vemos que a dependência em r para os termos da equação 27.6 é, pelo menos, da ordem de $\frac{1}{r^2}$. Como a área dA cresce com r^2 , em princípio a superfície S_2 contribuiria para a integral acima. Porém, precisamos lembrar que a radiação tem uma velocidade finita de propagação. Então, se considerarmos que a superfície S_2 está tão afastada da fronteira entre as regiões 1 e 2 que a radiação não teve tempo para se propagar até ela, aí sim os campos serão nulos em S_2 .

É importante fazer alguns comentários a respeito das condições acima. Em primeiro lugar, elas são aproximações, que são feitas com o objetivo de facilitar o desenvolvimento e que têm a vantagem de fornecer resultados bastante razoáveis em vários casos. Entretanto, conforme já discutimos acima, elas têm pontos frágeis. Em particular, a hipótese 2, se fosse inteiramente válida, teria como resultado o fato de que não haveria difração de forma alguma! Quando se especificam, ao mesmo tempo, $\aleph$ e $\nabla \aleph \cdot \hat{n}'$ numa dada superfície para uma equação diferencial como a equação de Helmholtz, isso torna o problema superdeterminado. Se, além disso, os valores de $\aleph$ e $\nabla \aleph \cdot \hat{n}'$ forem nulos, o único resultado possível é que $\aleph = 0$ em toda a região 2, o que é internamente inconsistente. Além disso, em geral a equação 27.6 não fornecerá esses valores em $S_{1,t}$ para $\aleph$ e $\nabla \aleph \cdot \hat{n}'$. É possível resolver as inconsistências matemáticas presentes nas hipóteses de Kirchhoff se considerarmos condições de Dirichlet ou Neumann para a função de Green que aparece em 27.4. No primeiro caso, teríamos uma função de Green que satisfaz uma condição de Dirichlet, ou seja, seria nula nos pontos pertencentes a $S_{1,t}$, mas sua derivada normal não seria necessariamente nula, de modo que $\aleph$ seria nulo na superfície $S_{1,t}$. No segundo caso, com condições de Neumann, a derivada normal de $\aleph$, dada por $\nabla \aleph \cdot \hat{n}'$, é que se anularia em $S_{1,t}$, permitindo que $\aleph$ pudesse não ser nula em toda $S_{1,t}$. O ponto mais interessante é que, mesmo com essas correções, os resultados obtidos são muito similares aos que são conseguidos quando apenas as hipóteses de Kirchhoff são consideradas. Além disso, qualquer um dos casos acima implica em que o ponto em que queremos determinar os campos difratados (ponto de observação situado em $\vec{r}$) esteja separado da região em que há os orifícios por uma distância maior que alguns comprimentos de onda da radiação.

Com o uso das hipóteses de Kirchhoff, a equação 27.6 pode ser escrita como

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ikR}}{R} \left[ik \left(1 - \frac{1}{ikR} \right) \hat{\mathbf{R}} \aleph + \nabla \aleph \right] \cdot \hat{n}' dA \quad (27.9)$$

Agora, se a onda emitida pelas fontes na região 1 se propagar como uma onda esférica, podemos escrever, para uma dada posição $\vec{r}''$,

$$\aleph(\vec{r}'') = A \frac{e^{ik|\vec{r}'' - \vec{r}'|}}{|\vec{r}'' - \vec{r}'|} = A \frac{e^{ikR'}}{R'} \quad (27.10)$$

onde

$$\vec{R}' = \vec{r}'' - \vec{r}' \quad (27.11)$$

Substituindo 27.10 em 27.6, temos

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ikR}}{R} \left[ik \left(1 - \frac{1}{ikR} \right) \hat{\mathbf{R}} A \frac{e^{ikR'}}{R'} + \nabla \left(A \frac{e^{ikR'}}{R'} \right) \right] \cdot \hat{n}' dA$$

ou, usando novamente a expressão 25.59,

$$\begin{aligned} \aleph(\vec{r}) = & \\ & -\frac{A}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ikR}}{R} \left[ik \frac{e^{ikR'}}{R'} \left(1 - \frac{1}{ikR} \right) \hat{\mathbf{R}} + ik \frac{e^{ikR'}}{R'} \left(1 - \frac{1}{ikR'} \right) \hat{\mathbf{R}}' \right] \cdot \hat{n}' dA \end{aligned}$$

que fica, já considerando apenas a potência de $\frac{1}{r}$ relevante,

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{Aik}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikR'}}{R'} (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}') \cdot \hat{n}' dA \quad (27.12)$$

Assim, a onda é produzida na forma de uma onda esférica em $\vec{r}'$, propaga-se dessa forma até um ponto $\vec{r}''$ que é fixado a pertencer à superfície $S_{1,o}$ onde estão os orifícios da tela de difração, e, a partir daí, a função de Green $\Omega(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{e^{ikR}}{4\pi R}$ é a responsável pela propagação, em forma também de ondas esféricas, até o ponto de observação $\vec{r}$. Aquilo que o princípio de Huygens estabelece qualitativamente em palavras a equação 27.6, ou sua equivalente usando 27.10, estabelece quantitativamente. Essa expressão é conhecida como *integral de difração de Fresnel-Kirchhoff*. Ela pode ser reescrita como

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{Aik}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikR'}}{R'} (\cos \theta + \cos \theta') dA \quad (27.13)$$

onde θ é o ângulo entre $\hat{n}'$ e $\vec{R}$ e θ' é o ângulo entre $\hat{n}'$ e $\vec{R}'$. Se a onda incidente é uma onda plana, então a expressão 27.12 acima torna-se

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{Aik}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ikR}}{R} (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}') \cdot \hat{n}' dA \quad (27.14)$$

e, no caso particular de ser uma onda plana incidente com incidência normal, temos $\theta' = 0$ e a expressão 27.14 se simplifica, fornecendo

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{Aik}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ikR}}{R} (1 + \cos \theta) dA \quad (27.15)$$

O fator

$$\mathcal{O}(\theta, \theta') = \frac{1}{2}(\cos \theta + \cos \theta') \quad (27.16)$$

é chamado de fator de obliquidade. Note que quando $\theta = \pi + \theta'$ temos uma onda que é difratada no sentido oposto ao da onda incidente. Nesse caso, o fator de obliquidade fornece $\mathcal{O}(\theta, \theta') = 0$. Assim, a amplitude da onda retrodifratada se anula, e isso explica por que nas figuras 27.2, 27.3 e 27.4 não desenhamos as miniondas como esferas completas, apenas como partes de calotas esféricas.

Vamos considerar novamente as equações 27.12–27.15 quando aplicadas a um problema qualquer. Suponha que um dado ponto da região de difração (região 2) tenha uma certa intensidade $\aleph_1(P)$ quando uma certa disposição de obstáculos e orifícios é utilizada. Considere agora que invertamos os papéis desempenhados pelos obstáculos e orifícios, ou seja, onde havia orifícios agora temos obstáculos, e vice-versa (uma espécie de “negativo” do problema inicial). Nesse caso, a intensidade em P vale $\aleph_2(P)$. É claro que, se somarmos as duas intensidades, teremos como resultado $\aleph_t(P)$, o valor total da intensidade em P quando não há obstáculos. Este resultado é conhecido como *princípio de Babinet* para orifícios ou fendas complementares, e ele tem algumas implicações interessantes. Por exemplo, considere um ponto P tal que $\aleph_1(P) = 0$, ou seja, a intensidade em P é nula para um dado arranjo de obstáculos e fendas. Se fendas e obstáculos forem intercambiados, a intensidade em P agora será $\aleph_2(P) = \aleph_t(P)$, que é a intensidade total. Então, as áreas “claras” de uma figura de difração tornam-se escuras, e as “escuras” tornam-se claras. Outro caso interessante é o que ocorre quando a intensidade em algum ponto qualquer é nula quando não há obstáculos, ou seja, temos $\aleph_t(P) = 0$. Assim, quando algum obstáculo for colocado, a intensidade no ponto passará a ser $\aleph_1(P)$ por causa da difração. Se trocarmos os papéis do obstáculo e das fendas, a nova intensidade será $\aleph_2(P)$ e, por causa do princípio de Babinet, devemos ter $\aleph_1(P) + \aleph_2(P) = \aleph_t(P) = 0$, ou seja, $\aleph_1(P) = -\aleph_2(P)$. Como a grandeza relevante é $|\aleph|^2$, vemos que as intensidades nos dois casos são iguais, para as duas configurações de fendas e obstáculos. O sinal negativo surge apenas para

representar uma inversão de fase da onda difratada num caso em relação ao outro.

A expressão 27.12,

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{Aik}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{e^{ikR'}}{R'} (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{R}}') \cdot \hat{n}' dA$$

que é a integral de difração de Fresnel-Kirchhoff, fornece o valor de uma grandeza escalar, associada com as componentes escalares dos campos. Podemos tentar uma aproximação semelhante visando considerar os campos vetoriais, na forma de uma equação vetorial, e não escalar. Nesse sentido, o equivalente à equação 27.4 seria, para o campo elétrico,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S [\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla' \mathcal{U}) - \mathcal{U}(\hat{n}' \cdot \nabla') \vec{\mathcal{E}}] dA \quad (27.17)$$

Vamos agora reescrever essa equação acima. Para isso, vamos considerar inicialmente que

$$(\hat{n}' \cdot \nabla')(\mathcal{U} \vec{\mathcal{E}}) = \mathcal{U}(\hat{n}' \cdot \nabla') \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla') \mathcal{U}$$

Portanto,

$$\mathcal{U}(\hat{n}' \cdot \nabla') \vec{\mathcal{E}} = (\hat{n}' \cdot \nabla')(\mathcal{U} \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla') \mathcal{U}$$

Com essa expressão, a equação 27.17 torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S [2\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla' \mathcal{U}) - (\hat{n}' \cdot \nabla')(\mathcal{U} \vec{\mathcal{E}})] dA$$

Vamos usar agora um análogo ao teorema do divergente 1.54 na segunda integral, obtendo

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S 2\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla' \mathcal{U}) dA + \int_V \nabla'^2(\mathcal{U} \vec{\mathcal{E}}) dV \quad (27.18)$$

Em seguida, consideramos a propriedade 1.58c, para escrever

$$\nabla' \times [\nabla' \times (\mathcal{U} \vec{\mathcal{E}})] = \nabla'[\nabla'(\mathcal{U} \vec{\mathcal{E}})] - \nabla'^2(\mathcal{U} \vec{\mathcal{E}})$$

ou

$$\nabla'^2(\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}}) = \nabla'[\nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] - \nabla' \times [\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})]$$

Então, a expressão 27.18 fica

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S 2\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla' \mathcal{U}) dA + \int_V \{ \nabla'[\nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] - \nabla' \times [\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] \} dV$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S 2\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla' \mathcal{U}) dA + \int_V \nabla'[\nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] dV - \int_V \nabla' \times [\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] dV \quad (27.19)$$

Vamos reescrever alguns termos nessa equação. Primeiro, considere a propriedade 1.64a,

$$\int_V \nabla \Phi dV = \oint_S \Phi \hat{n} dA$$

Então,

$$\int_V \nabla'[\nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] dV = \oint_S \nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}}) \hat{n} dA \quad (27.20)$$

onde $\hat{n} = -\hat{n}'$ é a normal para fora de S . Além disso, considere agora a identidade 1.64c,

$$\int_V \nabla \times \vec{B} dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{B} dA$$

Portanto,

$$\int_V \nabla' \times [\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] dV = \oint_S \hat{n} \times [\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] dA \quad (27.21)$$

onde $\hat{n} = -\hat{n}'$, como no caso anterior. Usando as equações 27.20 e 27.21 em 27.19, obtemos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S 2\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla' \mathcal{U}) dA + \oint_S \nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}}) \hat{n} dA - \oint_S \hat{n} \times [\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] dA$$

ou, substituindo $\hat{n} = -\hat{n}'$ e reunindo todas as integrais numa só,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S \{ 2\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla' \mathcal{U}) - \hat{n}'[\nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] + \hat{n}' \times [\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})] \} dA \quad (27.22)$$

Agora, usamos a propriedade 1.58e para reexpressar o termo $\nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})$, que fica

$$\nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}}) = (\nabla'\mathcal{U}) \cdot \vec{\mathcal{E}} + \mathcal{U}(\nabla' \cdot \vec{\mathcal{E}}) \quad (27.23)$$

O fator $\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})$ também pode ser reescrito, utilizando-se a identidade 1.58f, ou seja,

$$\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}}) = (\nabla'\mathcal{U}) \times \vec{\mathcal{E}} + \mathcal{U}(\nabla' \times \vec{\mathcal{E}}) \quad (27.24)$$

Vamos relembrar agora as equações de Maxwell para o vácuo dadas pelas equações 25.108, já supondo uma dependência temporal do tipo $e^{-i\omega t}$,

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (27.25a)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (27.25b)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = -i\mu_0\epsilon_0\omega\vec{\mathcal{E}} \quad (27.25c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = i\omega\vec{\mathcal{B}} \quad (27.25d)$$

Então, as equações 27.23 e 27.24 tornam-se

$$\nabla' \cdot (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}}) = (\nabla'\mathcal{U}) \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (27.26)$$

O fator $\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}})$ também pode ser reescrito mediante a identidade 1.58f, ou seja,

$$\nabla' \times (\mathcal{U}\vec{\mathcal{E}}) = (\nabla'\mathcal{U}) \times \vec{\mathcal{E}} + i\omega\mathcal{U}\vec{\mathcal{B}} \quad (27.27)$$

Usando 27.26 e 27.27 em 27.22, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S \{2\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla'\mathcal{U}) - \hat{n}'[(\nabla'\mathcal{U}) \cdot \vec{\mathcal{E}}] + \hat{n}' \times [(\nabla'\mathcal{U}) \times \vec{\mathcal{E}} + i\omega\mathcal{U}\vec{\mathcal{B}}]\} dA$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = & \oint_S \{2\vec{\mathcal{E}}(\hat{n}' \cdot \nabla'\mathcal{U}) - \hat{n}'[(\nabla'\mathcal{U}) \cdot \vec{\mathcal{E}}] + \hat{n}' \times [(\nabla'\mathcal{U}) \times \vec{\mathcal{E}}] + i\omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}})\mathcal{U}\} dA \\ & (27.28) \end{aligned}$$

Agora, vamos reescrever a equação 27.28. Para isso, vamos precisar da propriedade 1.19b do duplo produto vetorial,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Vamos reescrever 1.19b na seguinte forma:

$$\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

Agora, vamos considerar

$$\vec{a} = \vec{\mathcal{E}} \quad \vec{b} = \nabla' \mathcal{U} \quad \vec{c} = \hat{n}'$$

Assim, temos

$$\vec{\mathcal{E}}[(\nabla' \mathcal{U}) \cdot \hat{n}'] = (\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}')(\nabla' \mathcal{U}) - [\vec{\mathcal{E}} \times (\nabla' \mathcal{U})] \times \hat{n}' \quad (27.29)$$

O próximo passo consiste em fazer

$$\vec{a} = \hat{n}' \quad \vec{b} = \vec{\mathcal{E}} \quad \vec{c} = \nabla' \mathcal{U}$$

de modo que

$$\hat{n}'[(\nabla' \mathcal{U}) \cdot \vec{\mathcal{E}}] = [\hat{n}' \cdot (\nabla' \mathcal{U})]\vec{\mathcal{E}} - (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}) \times (\nabla' \mathcal{U})$$

ou, usando 27.29,

$$\hat{n}'[(\nabla' \mathcal{U}) \cdot \vec{\mathcal{E}}] = (\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}')(\nabla' \mathcal{U}) - [\vec{\mathcal{E}} \times (\nabla' \mathcal{U})] \times \hat{n}' - (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}) \times (\nabla' \mathcal{U}) \quad (27.30)$$

Agora, usamos 27.29 e 27.30 para reescrever a expressão 27.28, ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S \Big\{ & 2\{(\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}')(\nabla' \mathcal{U}) - [\vec{\mathcal{E}} \times (\nabla' \mathcal{U})] \times \hat{n}'\} \\ & - \{(\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}')(\nabla' \mathcal{U}) - [\vec{\mathcal{E}} \times (\nabla' \mathcal{U})] \times \hat{n}' - (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}) \times (\nabla' \mathcal{U})\} \\ & + \hat{n}' \times [(\nabla' \mathcal{U}) \times \vec{\mathcal{E}}] + i\omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}})\mathcal{U} \Big\} dA \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S \bigg\{ & 2(\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}')(\nabla' \mathcal{U}) - 2[\vec{\mathcal{E}} \times (\nabla' \mathcal{U})] \times \hat{n}' \\ & - (\vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n}')(\nabla' \mathcal{U}) + [\vec{\mathcal{E}} \times (\nabla' \mathcal{U})] \times \hat{n}' + (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}) \times (\nabla' \mathcal{U}) \\ & + [\vec{\mathcal{E}} \times (\nabla' \mathcal{U})] \times \hat{n}' + i\omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}})\mathcal{U} \bigg\} dA\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_S \left\{ (\hat{n}' \cdot \vec{\mathcal{E}})(\nabla' \mathcal{U}) + (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}) \times (\nabla' \mathcal{U}) + i\omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}})\mathcal{U} \right\} dA \quad (27.31)$$

que é o análogo vetorial, para o campo elétrico, da equação escalar 27.4. A equação para o campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$ pode ser obtida facilmente se observarmos que as equações de Maxwell 27.25 podem ser transformadas umas nas outras por meio da equivalência

$$\vec{\mathcal{E}} \rightarrow c\vec{\mathcal{B}} \qquad \vec{\mathcal{B}} \rightarrow -\frac{\vec{\mathcal{E}}}{c}$$

Então, a equação para $\vec{\mathcal{B}}$ fica

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \oint_S \left\{ (\hat{n}' \cdot \vec{\mathcal{B}})(\nabla' \mathcal{U}) + (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}) \times (\nabla' \mathcal{U}) - i\mu_0\epsilon_0\omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}})\mathcal{U} \right\} dA \quad (27.32)$$

Considerando as mesmas superfícies definidas para a figura 27.6, as integrais passam a ser apenas na superfície $S_{1,o}$, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \oint_{S_{1,o}} \left\{ (\hat{n}' \cdot \vec{\mathcal{E}})(\nabla' \mathcal{U}) + (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}) \times (\nabla' \mathcal{U}) + i\omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}})\mathcal{U} \right\} dA \quad (27.33a)$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) = \oint_{S_{1,o}} \left\{ (\hat{n}' \cdot \vec{\mathcal{B}})(\nabla' \mathcal{U}) + (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}) \times (\nabla' \mathcal{U}) - i\mu_0\epsilon_0\omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}})\mathcal{U} \right\} dA \quad (27.33b)$$

Essas expressões correspondem às integrais de difração vetoriais de Kirchhoff, e elas podem ser usadas da mesma forma que a expressão escalar obtida anteriormente. É interessante notar que os resultados obtidos pela teoria vetorial não são substancialmente melhores que os extraídos por meio da teoria escalar, sendo que essa última é mais simples matematicamente. Por essa razão, vamos nos concentrar, nos exemplos, apenas na teoria escalar.

Antes de passar aos exemplos, é interessante definir uma relação vetorial para a amplitude de espalhamento. Considere a figura 27.7.

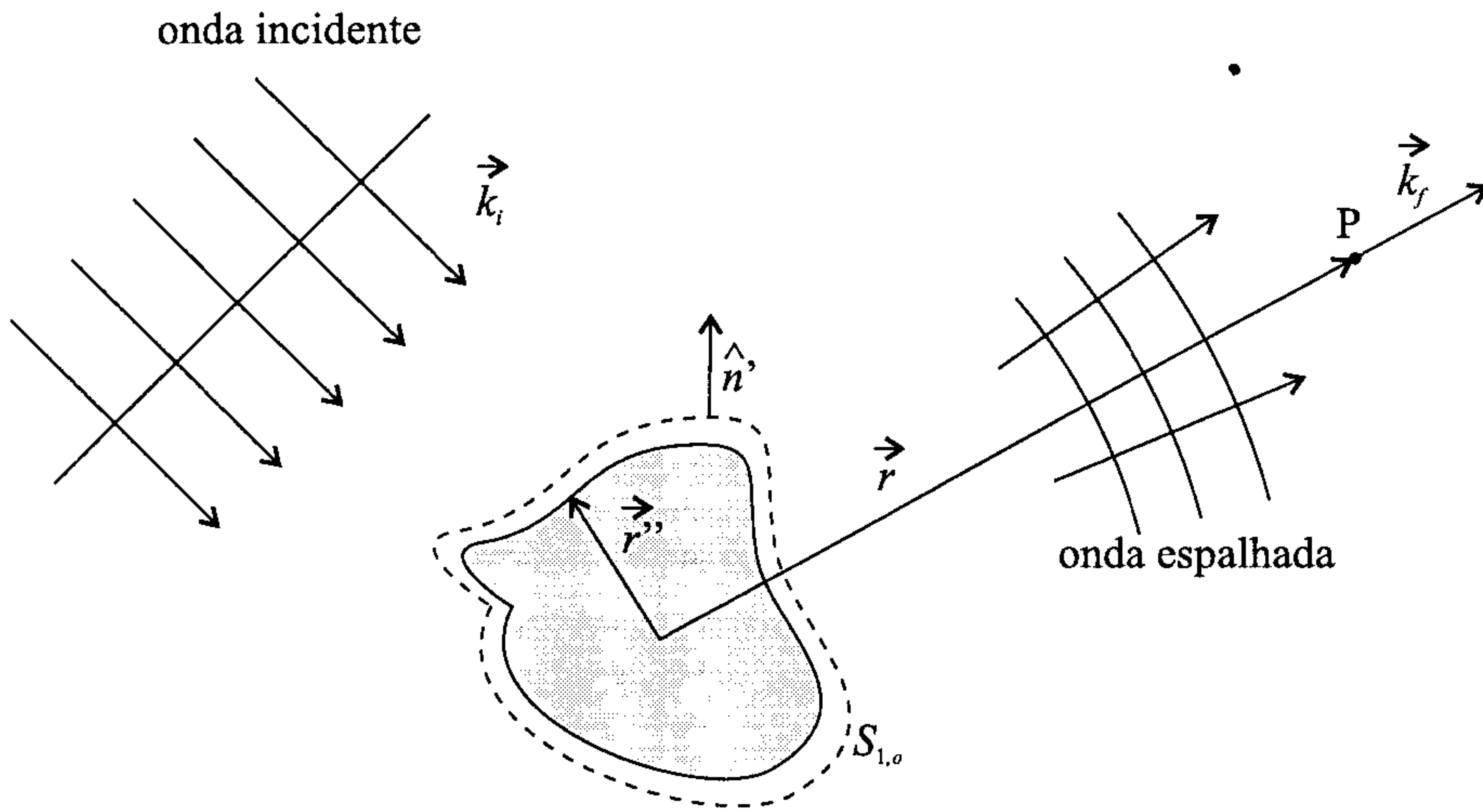


Figura 27.7: Configuração para o espalhamento de radiação por um objeto de formato qualquer.

Na figura, vemos um feixe de ondas planas caracterizado pelo vetor de onda $\vec{k}_i$ incidindo num objeto e sendo espalhado em todas as direções. Os campos associados à onda plana são $\vec{\mathcal{E}}_i$ e $\vec{\mathcal{B}}_i$, enquanto os campos da radiação espalhada são $\vec{\mathcal{E}}_f$ e $\vec{\mathcal{B}}_f$. A uma distância r grande quando comparada com as dimensões do objeto, a onda espalhada pode ser aproximada por uma onda esférica, com vetor de onda $\vec{k}_f$. A superfície $S_{1,0}$ corresponde à superfície do objeto, como mostra a figura. Nesse caso, a função de Green 27.5 torna-se

$$\mathcal{U}(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{e^{i\vec{k}_f \cdot (\vec{r} - \vec{r}'')}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|}$$

ou

$$\mathcal{U}(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{e^{ik_f r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}''|}$$

Quando $r \gg r''$, o denominador pode ser aproximado por meio de uma série de Taylor, por exemplo, e ficamos com

$$\mathcal{U}(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \quad (27.34)$$

Além disso, temos que

$$\nabla' \mathcal{U} = \nabla' \left[\frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \right] = \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} \nabla' \left[e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \right]$$

ou

$$\nabla' \mathcal{U} = -i\vec{k}_f \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} = -i\vec{k}_f \mathcal{U} \quad (27.35)$$

como pode ser facilmente demonstrado se escrevermos as expressões acima em coordenadas retangulares e efetuarmos as derivadas. Do capítulo anterior, sabemos que ondas esféricas têm comportamento assintótico na zona de radiação na forma

$$\vec{\mathcal{E}}_f \rightarrow \frac{e^{ikr}}{r} \vec{\alpha}(\vec{k}_f, \vec{k}_i) \quad (27.36)$$

onde $\vec{\alpha}(\vec{k}_f, \vec{k}_i)$ é a amplitude da onda espalhada. Se usarmos agora a equação vetorial de Kirchhoff 27.33a para obter o campo elétrico da onda espalhada, teremos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_f(\vec{r}) = \oint_{S_{1,o}} \left\{ (\hat{n}' \cdot \vec{\mathcal{E}}_f) \left(-i\vec{k}_f \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \right) \right. \\ \left. + (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f) \times \left(-i\vec{k}_f \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \right) \right. \\ \left. + i\omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f) \frac{e^{ik_f r}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \right\} dA \end{aligned}$$

onde usamos 27.34 e 27.35. Empregando também 27.36, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{\alpha}(\vec{k}_f, \vec{k}_i) = \\ - \frac{ie^{ik_f r}}{4\pi r} \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \left\{ \vec{k}_f (\hat{n}' \cdot \vec{\mathcal{E}}_f) + (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f) \times \vec{k}_f - \omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f) \right\} dA \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\alpha}(\vec{k}_f, \vec{k}_i) = \frac{i}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \left\{ \vec{k}_f \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f) + \omega(\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f) - \vec{k}_f (\hat{n}' \cdot \vec{\mathcal{E}}_f) \right\} dA \quad (27.37)$$

que estabelece a amplitude do espalhamento para a onda esférica emitida pelo objeto. Note que ela depende explicitamente de $\vec{k}_f$, o vetor de onda da onda espalhada. Ela depende também de $\vec{k}_i$, o vetor de onda da onda incidente, pois $\vec{\mathcal{E}}_f$ e $\vec{\mathcal{B}}_f$ dependem de $\vec{\mathcal{E}}_i$ e $\vec{\mathcal{B}}_i$, os quais estão ligados a $\vec{k}_i$. Note que os campos $\vec{\mathcal{E}}_f$ e $\vec{\mathcal{B}}_f$ são ortogonais a $\vec{k}_f$. Assim, se quisermos selecionar uma dada polarização para a radiação, representada pelo versor $\hat{\omega}$, devemos calcular, usando 27.37,

$$\begin{aligned} \hat{\omega} \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}_f, \vec{k}_i) = \frac{i}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \left\{ \hat{\omega} \cdot [\vec{k}_f \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] \right. \\ \left. + \omega \hat{\omega} \cdot (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f) - \hat{\omega} \cdot \vec{k}_f (\hat{n}' \cdot \vec{\mathcal{E}}_f) \right\} dA \end{aligned}$$

ou, como $\vec{k}_f \perp \hat{\omega}$,

$$\begin{aligned} \hat{\omega} \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}_f, \vec{k}_i) = \\ \frac{i}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \left\{ \hat{\omega} \cdot [\vec{k}_f \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] + \omega \hat{\omega} \cdot (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f) \right\} dA \quad (27.38) \end{aligned}$$

A relação 27.38 pode ser usada para obter uma expressão bastante relevante no Eletromagnetismo e também em Mecânica Quântica conhecida como *teorema óptico*. Para isso, vamos lembrar que os campos totais em qualquer ponto do espaço são dados pela soma dos campos incidentes com os espalhados, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_i + \vec{\mathcal{E}}_f$$

e

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}_i + \vec{\mathcal{B}}_f$$

Agora, relembremos que o fluxo de energia transportado pela radiação por unidade de área e tempo numa dada direção, o que equivale ao fluxo de potência por unidade de área, é dado pelo vetor de Poynting multiplicado por um versor daquela direção. O valor médio do vetor de Poynting é obtido da relação 22.52,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

e, para o vácuo, temos

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}^*] = \frac{1}{2\mu_0} \Re[\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{B}}]$$

Podemos determinar a potência total espalhada, associada à onda espalhada, mediante a integração do vetor de Poynting sobre uma superfície grande o suficiente para que os campos sejam campos de radiação. No entanto, como não há fontes de radiação espalhada além do objeto espalhador circundado pela superfície $S_{1,o}$, podemos calcular a potência espalhada usando essa superfície, ou seja,

$$P_{\text{esp}} = \oint_{S_{1,o}} \langle \vec{S}_{\text{esp}} \rangle \cdot \hat{n}' dA$$

ou

$$P_{\text{esp}} = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_f^*] \cdot \hat{n}' dA \quad (27.39)$$

Em geral, o objeto espalhador pode absorver parte da energia que recebe da onda plana incidente, devolvendo na forma de radiação espalhada uma fração dessa energia, e não toda ela. Por exemplo, a radiação incidente pode gerar correntes elétricas que farão com que parte da energia seja dissipada na forma de calor. A potência total que atravessa a superfície $S_{1,o}$ é obtida por meio de

$$P_{\text{total}} = \oint_{S_{1,o}} \langle \vec{S}_{\text{total}} \rangle \cdot \hat{n}' dA$$

ou

$$P_{\text{total}} = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}^*] \cdot \hat{n}' dA \quad (27.40)$$

Note que essa potência é um balanço entre o que entra e o que sai da superfície, e se o objeto não absorvesse nada, então essa potência total seria nula. Como o objeto não é uma fonte de energia, essa integral normalmente resulta num valor negativo, pelo fato de uma parte da energia ficar no objeto e não retornar ao espaço em volta dele. Essa integral, com o sinal oposto, resulta na potência absorvida pelo objeto, ou seja,

$$P_{\text{abs}} = -P_{\text{total}} = -\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}^*] \cdot \hat{n}' dA \quad (27.41)$$

Portanto, a potência total que é absorvida ou espalhada, isto é, a potência total que é retirada da onda incidente, é a soma das equações 27.39 e 27.41, ou seja,

$$P = P_{\text{esp}} + P_{\text{abs}}$$

ou

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_f^*] \cdot \hat{n}' dA - \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}^*] \cdot \hat{n}' dA$$

ou ainda,

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_f^* - \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}^*] \cdot \hat{n}' dA \quad (27.42)$$

Agora, para simplificar essa expressão, devemos calcular

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}^* = (\vec{\mathcal{E}}_i + \vec{\mathcal{E}}_f) \times (\vec{\mathcal{B}}_i^* + \vec{\mathcal{B}}_f^*)$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}^* = \vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^* + \vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_f^* + \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_i^* + \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_f^*$$

Com essa equação, a expressão 27.42 pode ser reescrita como

$$P = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_f^* - (\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^* + \vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_f^* + \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_i^* + \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_f^*)] \cdot \hat{n}' dA$$

ou

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^* + \vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_f^* + \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA$$

que pode ser escrita ainda como

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA - \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_f^* + \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA \quad (27.43)$$

Note que

$$\Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_f^*] = \frac{\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_f^* + \vec{\mathcal{E}}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f}{2}$$

e que

$$\Re[\vec{\mathcal{E}}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f] = \frac{\vec{\mathcal{E}}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f + \vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_f^*}{2}$$

Então,

$$\Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_f^*] = \Re[\vec{\mathcal{E}}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f]$$

Assim, a equação 27.43 pode ser escrita como

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA - \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f + \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA \quad (27.44)$$

Precisamos agora dos campos referentes à onda plana, os quais são dados pelas equações 22.18 e 22.25. Considerando apenas a dependência espacial, temos

$$\vec{\mathcal{E}}_i(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_{0,i} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = \mathcal{E}_{0,i} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \hat{\omega}_i \quad (27.45)$$

onde o versor $\hat{\omega}_i$ representa a direção de polarização da onda plana incidente e $\mathcal{E}_{0,i}$ é a amplitude do campo elétrico da onda incidente, além de

$$\vec{\mathcal{B}}_i(\vec{r}) = \frac{1}{c} \hat{k}_i \times \vec{\mathcal{E}}_i = \frac{1}{ck_i} \vec{k}_i \times \vec{\mathcal{E}}_i \quad (27.46)$$

Assim, temos

$$\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^* = \varepsilon_{0,i} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \hat{\omega}_i \times \left[\frac{1}{ck_i} \vec{k}_i \times (\varepsilon_{0,i}^* e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}) \hat{\omega}_i^* \right]$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^* = \frac{|\varepsilon_{0,i}|^2}{ck_i} \hat{\omega}_i \times (\vec{k}_i \times \hat{\omega}_i^*) \quad (27.47)$$

Utilizando a identidade 1.19a, temos

$$\hat{\omega}_i \times (\vec{k}_i \times \hat{\omega}_i^*) = (\hat{\omega}_i \cdot \hat{\omega}_i^*) \vec{k}_i - (\hat{\omega}_i \cdot \vec{k}_i) \hat{\omega}_i^*$$

Como a onda plana é transversal, $\vec{k} \perp \hat{\omega}_i$. Além disso, $\hat{\omega}_i \cdot \hat{\omega}_i^* = 1$, de modo que

$$\hat{\omega}_i \times (\vec{k}_i \times \hat{\omega}_i^*) = \vec{k}_i$$

Então, a equação 27.47 torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^* = \frac{|\varepsilon_{0,i}|^2}{ck_i} \vec{k}_i \quad (27.48)$$

o que faz com que o primeiro termo do lado direito da equação 27.44 torne-se

$$\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re\left[\frac{|\varepsilon_{0,i}|^2}{ck_i} \vec{k}_i\right] \cdot \hat{n}' dA$$

ou

$$\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA = \frac{1}{2\mu_0} \frac{|\varepsilon_{0,i}|^2}{c} \int_{S_{1,o}} \hat{k}_i \cdot \hat{n}' dA$$

A integral acima é, na verdade, nula, como pode ser facilmente demonstrado se uma superfície $S_{1,o}$ esférica for considerada e $\hat{k}_i$ e $\hat{n}'$ forem escritos em termos de coordenadas retangulares, o que é deixado como exercício para o leitor (veja o exercício 27.1). Isso também pode ser entendido de outra forma, mais simples. A onda plana transporta energia, mas esse transporte ocorre sem perdas pelo espaço. Assim, o fluxo total de energia através de qualquer superfície fechada é nulo. Portanto, temos

$$\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA = 0 \quad (27.49)$$

Com o uso de 27.49, a equação 27.44 simplifica-se para

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{\mathcal{E}}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f + \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{B}}_i^*] \cdot \hat{n}' dA$$

ou, utilizando as equações 27.45 e 27.46,

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re \left\{ \mathcal{E}_{0,i}^* e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''} \hat{\omega}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f + \vec{\mathcal{E}}_f \times \left[\frac{1}{ck_i} \vec{k}_i \times (\mathcal{E}_{0,i}^* e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''} \hat{\omega}_i^*) \right] \right\} \cdot \hat{n}' dA$$

que pode ser escrita como

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \mathcal{E}_{0,i}^* \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''} \left\{ \hat{\omega}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f \cdot \hat{n}' + \frac{1}{ck_i} [\vec{\mathcal{E}}_f \times (\vec{k}_i \times \hat{\omega}_i^*)] \cdot \hat{n}' \right\} dA \right\} \quad (27.50)$$

Agora, usamos a propriedade 1.17 dos produtos mistos, de forma que

$$\hat{\omega}_i^* \times \vec{\mathcal{B}}_f \cdot \hat{n}' = \vec{\mathcal{B}}_f \times \hat{n}' \cdot \hat{\omega}_i^* = -\hat{\omega}_i^* \cdot \hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f \quad (27.51)$$

Além disso, usamos também a identidade 1.19a, o que faz com que tenhamos

$$[\vec{\mathcal{E}}_f \times (\vec{k}_i \times \hat{\omega}_i^*)] \cdot \hat{n}' = [(\vec{\mathcal{E}}_f \cdot \hat{\omega}_i^*) \vec{k}_i - (\vec{\mathcal{E}}_f \cdot \vec{k}_i) \hat{\omega}_i^*] \cdot \hat{n}'$$

ou

$$[\vec{\mathcal{E}}_f \times (\vec{k}_i \times \hat{\omega}_i^*)] \cdot \hat{n}' = (\vec{\mathcal{E}}_f \cdot \hat{\omega}_i^*) (\vec{k}_i \cdot \hat{n}') - (\vec{\mathcal{E}}_f \cdot \vec{k}_i) (\hat{\omega}_i^* \cdot \hat{n}') \quad (27.52)$$

Agora, vamos calcular, usando a mesma identidade,

$$\hat{\omega}_i^* \cdot [\vec{k}_i \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] = \hat{\omega}_i^* \cdot [(\vec{k}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}_f) \hat{n}' - (\vec{k}_i \cdot \hat{n}') \vec{\mathcal{E}}_f]$$

ou

$$\hat{\omega}_i^* \cdot [\vec{k}_i \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] = (\hat{\omega}_i^* \cdot \hat{n}') (\vec{k}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}_f) - (\hat{\omega}_i^* \cdot \vec{\mathcal{E}}_f) (\vec{k}_i \cdot \hat{n}') \quad (27.53)$$

Comparando as equações 27.52 e 27.53, vemos que elas são iguais a menos de um sinal negativo, ou seja,

$$[\vec{\mathcal{E}}_f \times (\vec{k}_i \times \hat{\omega}_i^*)] \cdot \hat{n}' = -\hat{\omega}_i^* \cdot [\vec{k}_i \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] \quad (27.54)$$

Com o uso das equações 27.51 e 27.54, a expressão 27.50 fica

$$P = -\frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \varepsilon_{0,i}^* \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''} \left\{ -\hat{\omega}_i^* \cdot \hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f - \frac{1}{ck_i} \hat{\omega}_i^* \cdot [\vec{k}_i \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] \right\} dA \right\}$$

ou

$$P = \frac{1}{2\mu_0 ck_i} \Re \left\{ \varepsilon_{0,i}^* \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''} \left\{ \omega \hat{\omega}_i^* \cdot \hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f + \hat{\omega}_i^* \cdot [\vec{k}_i \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] \right\} dA \right\} \quad (27.55)$$

Vamos relembrar agora a equação 27.38, que fornece a componente da intensidade da radiação espalhada numa dada direção,

$$\hat{\omega} \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}_f, \vec{k}_i) = \frac{i}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}''} \left\{ \hat{\omega} \cdot [\vec{k}_f \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] + \omega \hat{\omega} \cdot (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f) \right\} dA$$

Vamos considerar o caso particular em que ocorre $\vec{k}_f = \vec{k}_i$ e também $\hat{\omega} = \hat{\omega}_i^*$, ou seja,

$$\hat{\omega}_i^* \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}_f = \vec{k}_i, \vec{k}_i) = \frac{i}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}''} \left\{ \hat{\omega}_i^* \cdot [\vec{k}_i \times (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{E}}_f)] + \omega \hat{\omega}_i^* \cdot (\hat{n}' \times \vec{\mathcal{B}}_f) \right\} dA \quad (27.56)$$

Note que as integrais nas equações 27.55 e 27.56 são idênticas, o que permite escrever

$$P = \frac{1}{2\mu_0 ck_i} \Re \left[\frac{4\pi}{i} \varepsilon_{0,i}^* \hat{\omega}_i^* \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}_f = \vec{k}_i, \vec{k}_i) \right]$$

ou

$$P = -\frac{2\pi}{\mu_0 ck_i} \Re \left[i \varepsilon_{0,i}^* \hat{\omega}_i^* \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}_f = \vec{k}_i, \vec{k}_i) \right] \quad (27.57)$$

Precisamos considerar agora que, se $a + bi$ é um número complexo, temos

$$\Re[i(a + bi)] = \Re(ai - b) = -b$$

e também

$$\Im(a + bi) = b$$

de modo que

$$\Re[i(a + bi)] = -\Im(a + bi)$$

Então, a equação 27.57 torna-se

$$P = \frac{2\pi}{\mu_0 c k_i} \Im \left[\mathcal{E}_{0,i}^* \hat{\omega}_i^* \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}_f = \vec{k}_i, \vec{k}_i) \right] \quad (27.58)$$

Calculemos agora o vetor de Poynting da onda plana incidente, mediante a equação 27.48, ou seja,

$$\langle \vec{S}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \vec{\mathcal{E}}_i \times \vec{\mathcal{B}}_i^* = \frac{|\mathcal{E}_{0,i}|^2}{2\mu_0 c k_i} \vec{k}_i$$

Então, na direção de propagação da onda temos

$$\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{k}_i = \frac{|\mathcal{E}_{0,i}|^2}{2\mu_0 c k_i} \vec{k}_i \cdot \hat{k}_i$$

ou

$$\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{k}_i = \frac{|\mathcal{E}_{0,i}|^2}{2\mu_0 c} \quad (27.59)$$

Agora, definimos a seção de choque total σ_t como sendo a potência total absorvida ou espalhada dividida pela potência incidente, ou seja, considerando a razão entre as equações 27.58 e 27.59, temos

$$\sigma_t = \frac{P}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{k}_i}$$

ou

$$\sigma_t = \frac{\frac{2\pi}{\mu_0 c k_i} \Im \left[\varepsilon_{0,i}^* \hat{\omega}_i^* \cdot \vec{\alpha}(\vec{k}_f = \vec{k}_i, \vec{k}_i) \right]}{\frac{|\varepsilon_{0,i}|^2}{2\mu_0 c}}$$

ou ainda, fazendo algumas manipulações,

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{|\varepsilon_{0,i}|^2 k_i} \Im \left[\varepsilon_{0,i}^* \varepsilon_{0,i} \hat{\omega}_i^* \cdot \frac{\vec{\alpha}(\vec{k}_f = \vec{k}_i, \vec{k}_i)}{\varepsilon_{0,i}} \right] \quad (27.60)$$

Agora, definimos a amplitude de espalhamento normalizada por intermédio de

$$\vec{f}(\vec{k}_f, \vec{k}_i) = \frac{\vec{\alpha}(\vec{k}_f, \vec{k}_i)}{\varepsilon_{0,i}} \quad (27.61)$$

o que faz com que a equação 27.60 fique sendo

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k_i} \Im \left[\hat{\omega}_i^* \cdot \vec{f}(\vec{k}_f = \vec{k}_i) \right] \quad (27.62)$$

que é o teorema óptico, válido tanto no Eletromagnetismo Clássico quanto, na forma padrão 27.62, em Mecânica Quântica. Ele relaciona a seção de choque total de espalhamento com a amplitude de espalhamento frontal produzida pelo espalhador. É uma relação bastante útil, que pode ser empregada para obter outras propriedades relevantes.

Após estudar as teorias escalar e vetorial para a difração, vamos passar a alguns casos particulares relevantes.

27.3 Difração de Fraunhofer

Para um problema geral de difração, a resolução das equações 27.12–27.15 pode ser extremamente complicada matematicamente. Podemos simplificar o tratamento, considerando alguns casos-limite relevantes, sendo o primeiro conhecido como difração de Fraunhofer. Vamos considerar uma fenda ou orifício plano, de seção reta qualquer, perpendicular a um dado eixo, escolhido aqui como sendo o eixo z . Queremos determinar a figura de difração que se forma num plano também perpendicular a esse eixo situado a uma certa distância do plano da fenda. A figura 27.8 ilustra as grandezas relevantes.

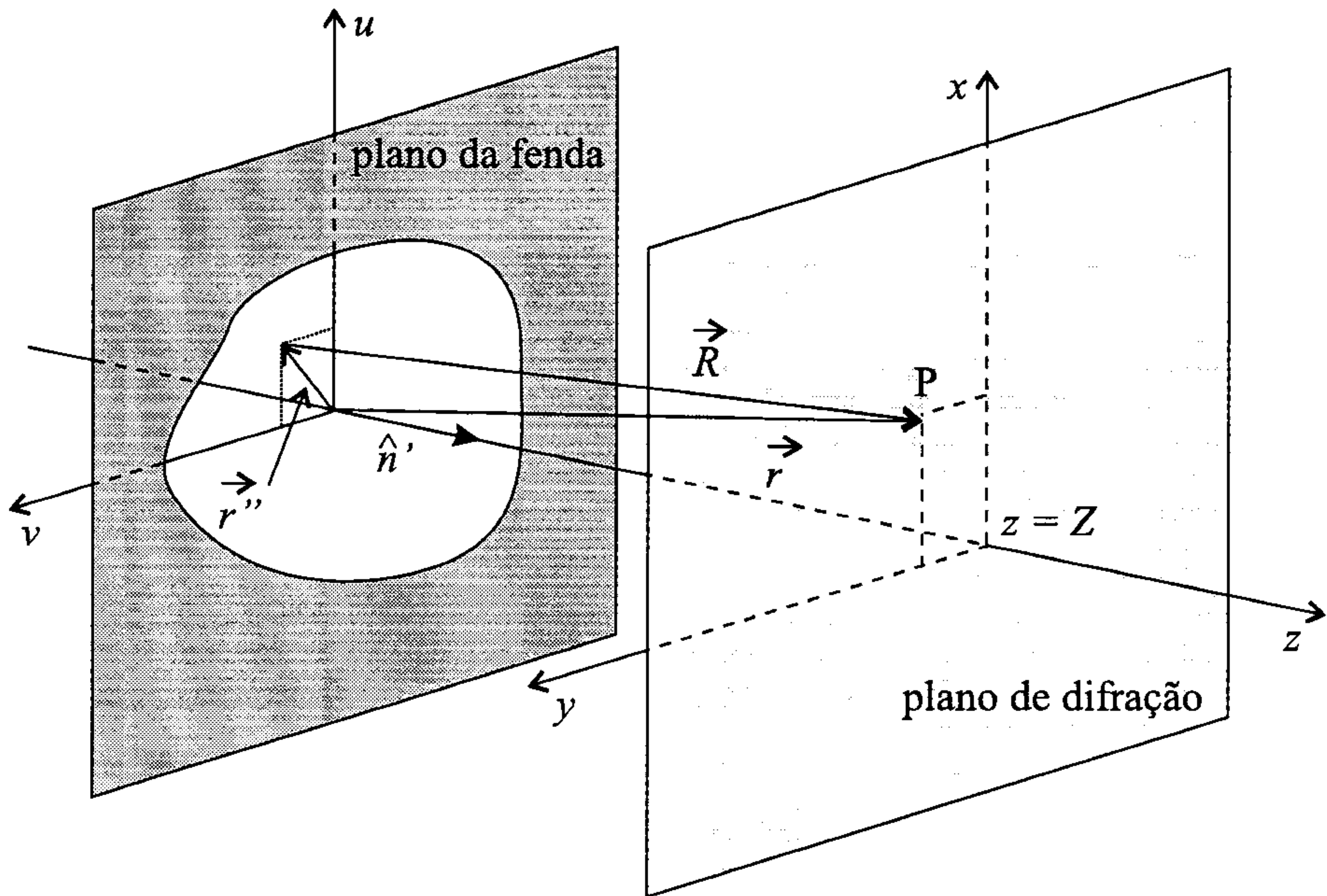


Figura 27.8: Diagrama para a difração de Fraunhofer.

O plano da fenda situa-se em $z = 0$, e posições na fenda são descritas por pontos com coordenadas (u, v) e são descritas pelo vetor $\vec{r}''$. O plano de difração está em $z = Z$, e o ponto de observação P tem coordenadas (x, y) . Pontos, nesse plano, são dados pelo vetor $\vec{r}$. O versor normal ao plano da fenda vale $\hat{n}' = \hat{k}$.

Vamos restringir a radiação incidente na fenda ao caso de frentes de onda planas com incidência normal. Assim, a equação de interesse é a 27.15,

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{Aik}{4\pi} \oint_{S_{1,0}} \frac{e^{ikR}}{R} (1 + \cos \theta) dA$$

Além disso, vamos considerar que o tamanho característico da fenda (D), o tamanho característica da figura de difração no plano de difração (D_f) e a distância r entre a origem e o ponto de observação sigam as seguintes condições:

$$\frac{D^2}{4} = (u^2 + v^2)_{max} \ll r^2 \quad (27.63a)$$

$$D_f^2 = (x^2 + y^2)_{max} \ll r^2 \quad (27.63b)$$

As duas condições são conhecidas como limite paraxial, e a idéia é obter as grandezas numa região próxima ao eixo z , limitando a radiação a essa vizinhança. Com essas condições, o ângulo θ entre $\hat{n}'$ e $\vec{R}$ é pequeno, e o fator de obliquidade 27.16 pode ser aproximado por

$$\mathcal{O}(\theta, \theta') = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \approx 1 \quad (27.64)$$

Além disso, no denominador de 27.15, podemos fazer

$$R \approx Z \quad (27.65)$$

Entretanto, essa é uma aproximação muito simplista para o fator R que aparece na exponencial, pois ele está associado a uma fase que pode variar apreciavelmente, mesmo quando R em si não varia muito. Vamos lembrar que

$$\vec{r}'' = u \hat{i} + v \hat{j} \quad (27.66a)$$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + Z \hat{k} \quad (27.66b)$$

Então,

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'' = (x - u) \hat{i} + (y - v) \hat{j} + Z \hat{k} \quad (27.67)$$

de modo que

$$R = |\vec{r} - \vec{r}''| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + Z^2}$$

ou

$$R = \sqrt{x^2 + u^2 - 2xu + y^2 + v^2 - 2vy + Z^2}$$

Note que, de 27.66b,

$$r^2 = x^2 + y^2 + Z^2$$

Então,

$$R = \sqrt{r^2 + u^2 + v^2 - 2(xu + vy)}$$

ou

$$R = r \sqrt{1 + \frac{u^2 + v^2}{r^2} - \frac{2(xu + vy)}{r^2}} \quad (27.68)$$

Agora, vamos introduzir os cossenos diretores de $\vec{r}$ por meio de

$$\alpha = \frac{x}{r} \quad \beta = \frac{y}{r} \quad \gamma = \frac{Z}{r} \quad (27.69)$$

Lembrando que estamos considerando o limite paraxial, a equação 27.63b implica que α e β são pequenos, enquanto $\gamma \rightarrow 1$, o que faz com que o último termo dentro da raiz quadrada em 27.68 seja pequeno. Além disso, a equação 27.63a implica que o segundo termo dentro da raiz quadrada é pequeno. Podemos então efetuar uma expansão em série de Taylor, ou seja,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{u^2 + v^2}{r^2} - \frac{2(xu + vy)}{r^2}} &= \left[1 + \frac{u^2 + v^2}{r^2} - \frac{2(xu + vy)}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{1 + \frac{u^2 + v^2}{r^2} - \frac{2(xu + vy)}{r^2}} &\approx 1 - \frac{\alpha u + \beta v}{r} + \frac{1}{2} \frac{u^2 + v^2}{r^2} + \dots \end{aligned} \quad (27.70)$$

onde usamos as equações 27.69. Com o uso da expansão 27.70, a equação 27.68 fica

$$R = r \left[1 - \frac{\alpha u + \beta v}{r} + \frac{1}{2} \frac{u^2 + v^2}{r^2} + \dots \right]$$

ou

$$R = r - (\alpha u + \beta v) + \frac{u^2 + v^2}{2r} \quad (27.71)$$

Agora, a questão é a relevância do terceiro termo do lado direito da equação acima. Na difração de Fraunhofer, a condição que importa é

$$\frac{D^2}{8r} \ll \lambda \quad (27.72)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{D^2}{8\lambda} \ll r \quad (27.73)$$

que relaciona ao mesmo tempo as três grandezas relevantes, λ (o comprimento de onda da radiação), D (o tamanho médio da fenda) e r , a distância entre a fenda e o ponto de observação. Note que essa condição é mais restritiva do que simplesmente a condição de raios paraxiais, já que, se ela for satisfeita, a condição 27.63a é automaticamente satisfeita. Além disso, a condição de estarmos na zona de radiação, ou seja, $\lambda \ll r$, também é satisfeita com a condição de Fraunhofer. Assim, considerando que essa condição seja válida, podemos desconsiderar o terceiro termo do lado direito em 27.71 e obter, para a difração de Fraunhofer,

$$R = r - (\alpha u + \beta v) \quad (27.74)$$

É interessante notar que, no outro caso relevante envolvendo difração, que é a difração de Fresnel, que veremos depois, o terceiro termo não é desprezado em comparação com os outros dois. Com o uso de 27.64, 27.65 e 27.74, a equação 27.15 pode ser escrita como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{Aik}{4\pi} \oint_{S_{1,o}} \frac{e^{ik[r-(\alpha u+\beta v)]}}{Z} 2 \, dudv$$

ou

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{2\pi Z} \oint_{S_{1,o}} e^{-ik(\alpha u+\beta v)} \, dudv \quad (27.75)$$

Antes de aplicar a equação acima, é interessante considerar também o problema de uma fenda de difração que seja muito extensa em uma das direções, como em v , por exemplo, e que está sendo iluminada por uma fonte de radiação também muito extensa numa direção paralela àquela em que a fenda é extensa. Este caso, apesar de violar o critério de Fraunhofer, pode ser tratado de forma similar, partindo-se da equação 27.12 e efetuando uma integral na direção em que a fonte de radiação e a fenda são extensas. Isso inclui uma constante à equação, e a integral de Fraunhofer, nesse caso, fica

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = A \oint_{S_{1,o}} e^{-ik\alpha u} \, du \quad (27.76)$$

onde A reúne as constantes que surgem durante o desenvolvimento e u descreve a direção em que a fenda (ou fendas) é (são) limitada(s). Vejamos agora alguns casos relevantes.

27.3.1 Difração por Fenda Única

O primeiro caso que vamos estudar corresponde a termos uma fenda plana de tamanho $2D$ que está separada de um anteparo também plano por uma distância Z , conforme a figura 27.9.

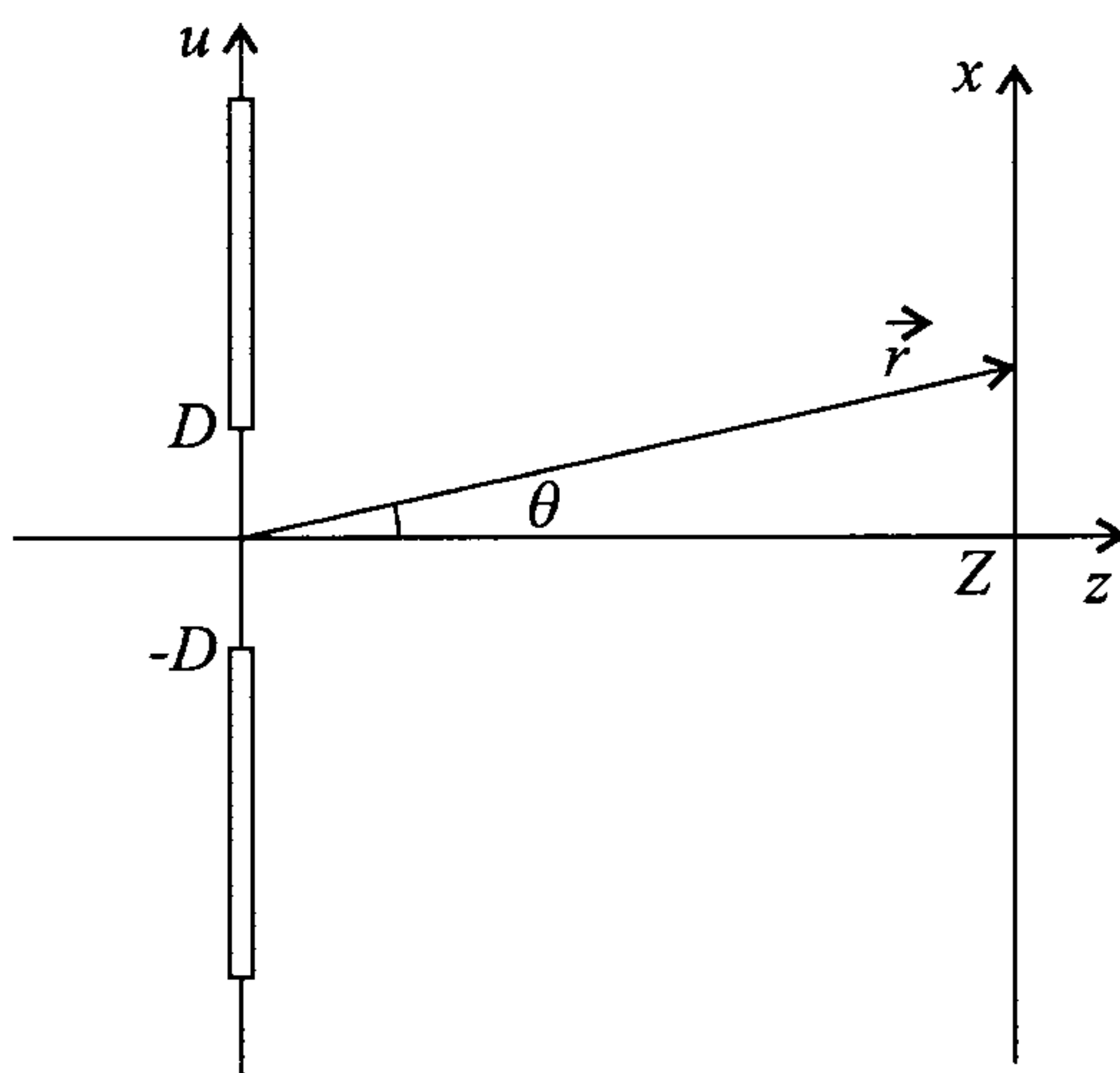


Figura 27.9: Diagrama para a difração por fenda única.

Para esse caso simples, a equação 27.76 fornece

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = A \int_{-D}^D e^{-ik\alpha u} du$$

ou

$$\mathcal{N}(\theta) = A \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_{-D}^D$$

que fica

$$\aleph(\theta) = -A \left[\frac{e^{-ik\alpha D} - e^{ik\alpha D}}{ik\alpha} \right]$$

que pode ser reescrito como

$$\aleph(\theta) = \frac{2A}{k\alpha} \text{sen } k\alpha D$$

ou

$$\aleph(\theta) = 2AD \frac{\text{sen } k\alpha D}{k\alpha D} \quad (27.77)$$

Definindo

$$t = k\alpha D = \frac{2\pi}{\lambda} D \text{sen } \theta \approx \frac{2\pi D}{\lambda} \frac{x}{Z} \quad (27.78)$$

onde usamos 27.69, temos

$$\aleph(\theta) = 2AD \frac{\text{sen } t}{t} \quad (27.79)$$

A figura 27.10 apresenta a amplitude normalizada para a difração por fenda única.

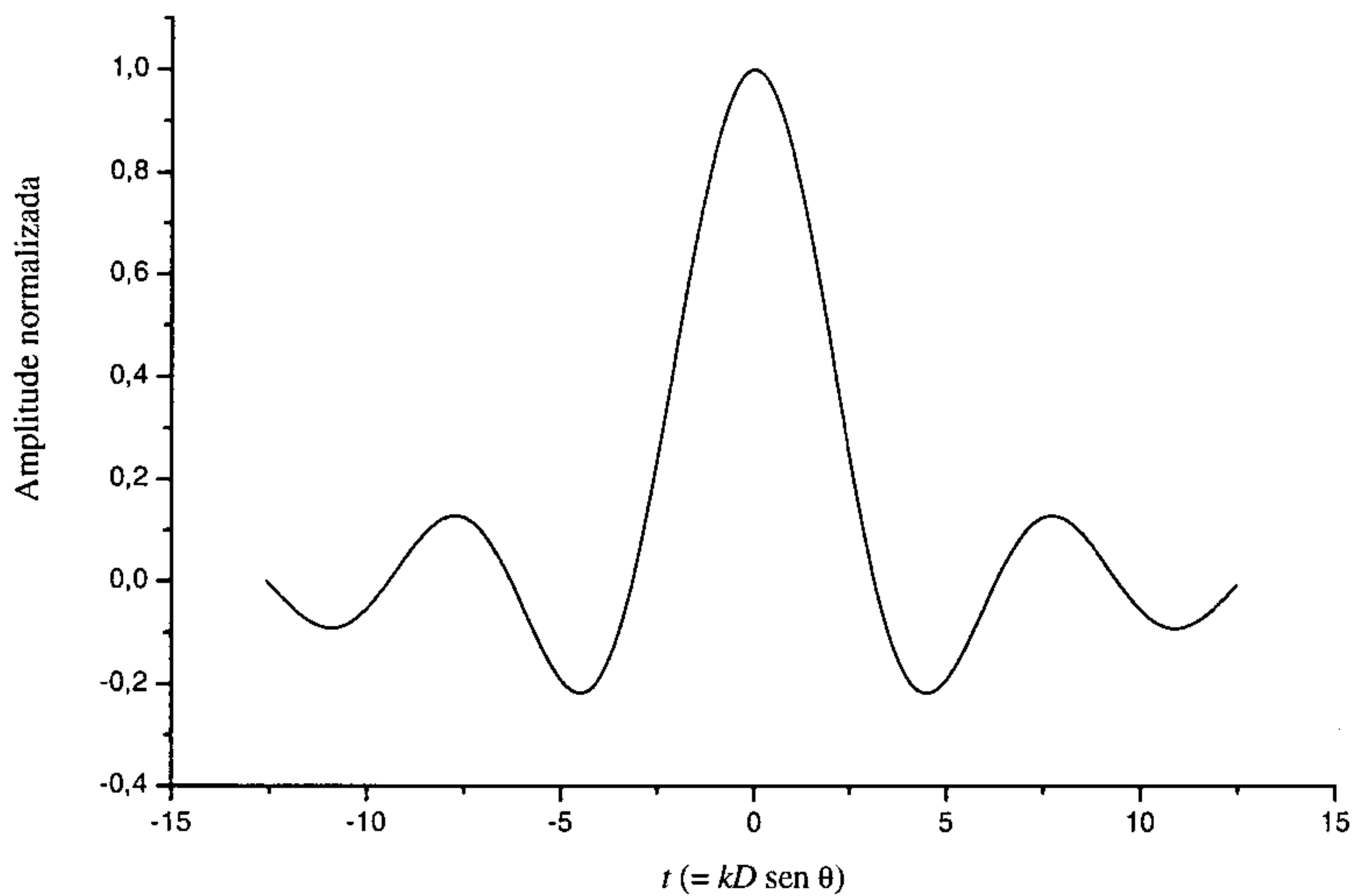


Figura 27.10: Amplitude normalizada para a difração por fenda única.

A intensidade da radiação que chega ao plano de observação é proporcional ao módulo quadrado da expressão 27.79 acima, ou seja,

$$I(\theta) \propto |\mathcal{N}|^2 = 4|A|^2 D^2 B \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \quad (27.80)$$

onde B é uma constante de proporcionalidade. Lembrando que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1 \quad (27.81)$$

a intensidade para $\theta = 0$ vale

$$I_0 = I(0) = 4|A|^2 D^2 B \quad (27.82)$$

Então,

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \quad (27.83)$$

e a figura 27.11 mostra a intensidade normalizada para a difração por uma fenda única.

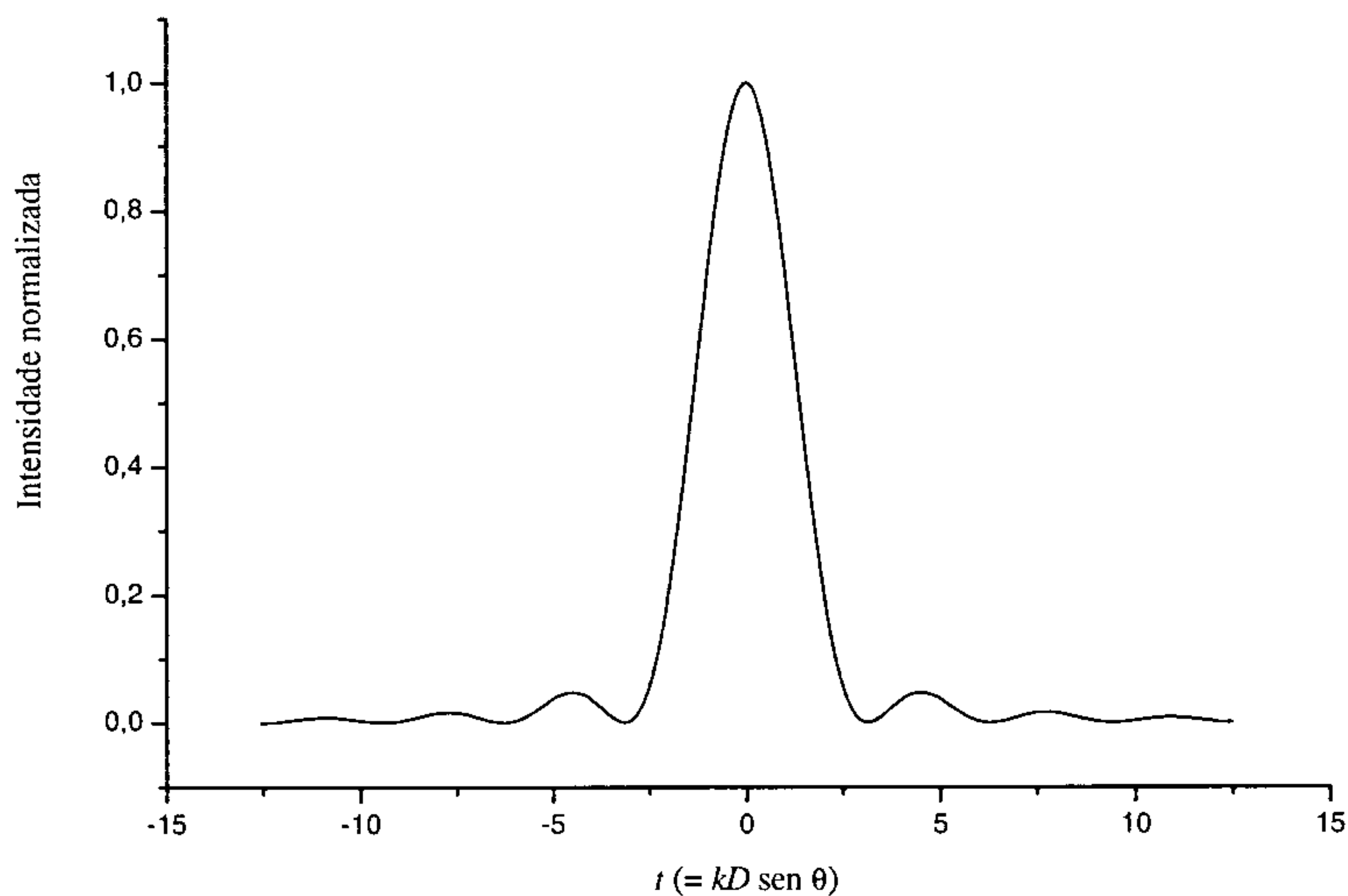


Figura 27.11: Intensidade normalizada para a difração por fenda única.

É interessante notar, na figura 27.11, que existe um máximo central em $t = 0$

que é bastante intenso, e as intensidades dos máximos secundários diminuem rapidamente com o aumento de t . Os mínimos de intensidade ($I = 0$) ocorrem para $t = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$. A largura angular do primeiro máximo, o central, é determinada pela posição $t = \pi$, ou seja, utilizando a equação 27.78, temos

$$t = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \theta = \pi$$

ou

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2D} \quad (27.84)$$

Assim, o ângulo θ_1 referente ao primeiro mínimo ocorre em

$$\theta_1 = \arcsen \frac{\lambda}{2D} \approx \frac{\lambda}{2D} \quad (27.85)$$

onde usamos a condição de que o comprimento de onda é muito menor que o tamanho característico da fenda, de modo que θ é um ângulo pequeno (aproximação paraxial). É interessante notar que cerca de 90% da potência irradiada é encontrada na região do máximo central, enquanto o próximo máximo responde por 5% da potência total, e assim sucessivamente (veja o exercício 27.2). Além disso, pela expressão 27.85, vemos que, quanto mais estreita a fenda de difração (D menor), maior é a abertura angular do máximo central, e também dos outros máximos, se suas posições angulares forem determinadas como fizemos para o máximo central. Isso indica que os efeitos de difração são maiores e que estamos mais distantes da óptica geométrica. Esse resultado tem importância também na resolução de instrumentos ópticos, como microscópios e telescópios, por exemplo, o que discutiremos na seção 27.3.4, sobre fendas circulares. Vejamos agora o que ocorre quando temos duas ou mais fendas difratantes.

27.3.2 Difração por Fenda Dupla e por Múltiplas Fendas

Nosso próximo passo é considerar um sistema formado por duas fendas iguais, de largura $2D$, paralelas e separadas por uma distância $2b$, conforme mostra a figura 27.12.

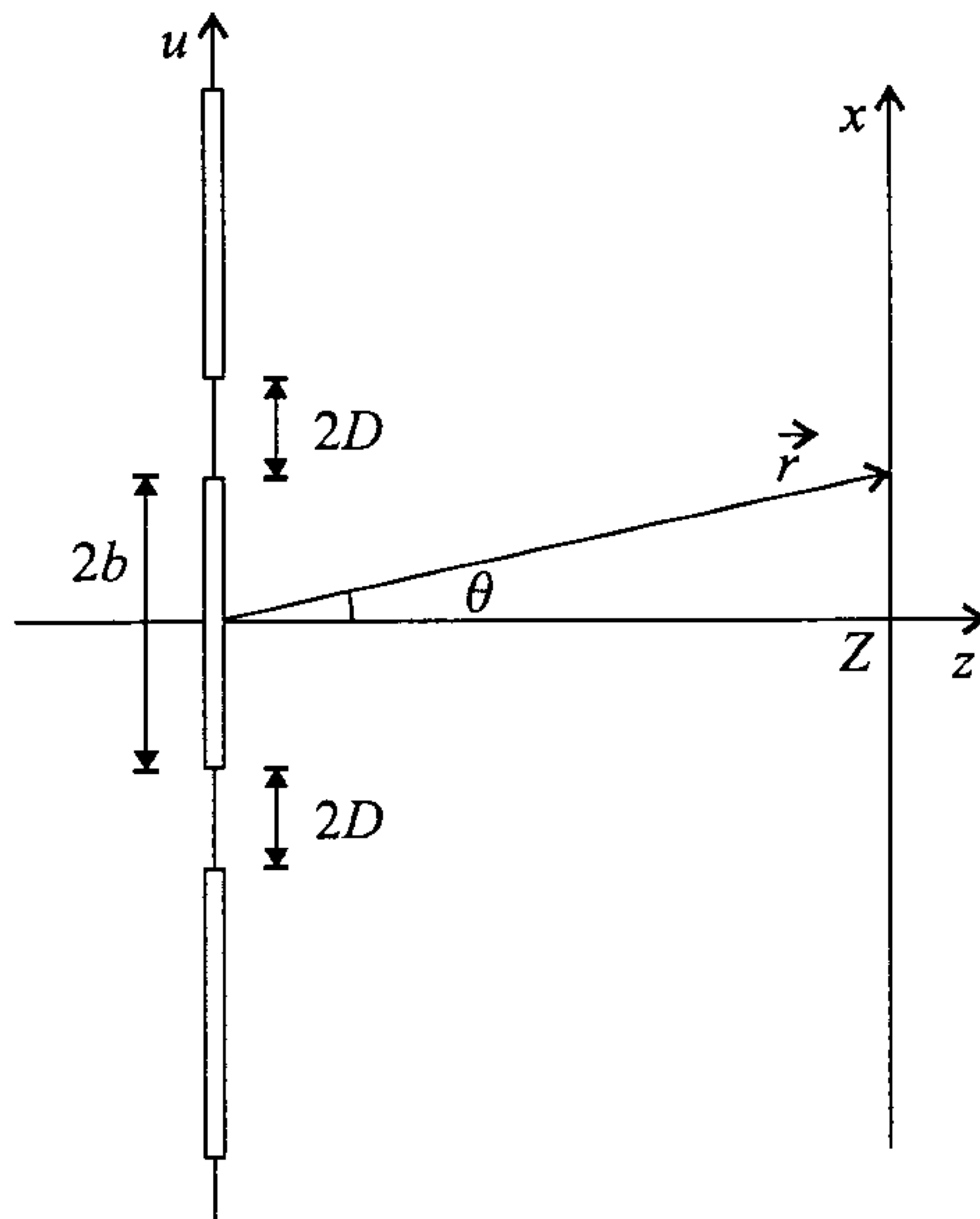


Figura 27.12: Diagrama para a difração por fenda dupla.

Para o caso da difração por fenda dupla, a equação 27.76 torna-se uma soma de duas integrais, ou seja,

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = A \int_{-b-2D}^{-b} e^{-ik\alpha u} du + A \int_b^{b+2D} e^{-ik\alpha u} du$$

ou

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = A \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_{-b-2D}^{-b} + A \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_b^{b+2D}$$

que fica, fazendo algumas simplificações,

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{A}{ik\alpha} \left\{ [e^{ik\alpha b} - e^{ik\alpha(b+2D)}] + [e^{-ik\alpha(b+2D)} - e^{-ik\alpha b}] \right\}$$

ou

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{A}{ik\alpha} \left\{ e^{ik\alpha b} [1 - e^{ik\alpha(2D)}] + e^{-ik\alpha b} [e^{-ik\alpha(2D)} - 1] \right\}$$

ou ainda,

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{A}{ik\alpha} \left\{ e^{ik\alpha b} e^{ik\alpha D} [e^{-ik\alpha D} - e^{ik\alpha D}] + e^{-ik\alpha b} e^{-ik\alpha D} [e^{-ik\alpha D} - e^{ik\alpha D}] \right\}$$

que pode ser escrito como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{A}{ik\alpha} \left\{ e^{ik\alpha(b+D)} (-2i) \operatorname{sen} k\alpha D + e^{-ik\alpha(b+D)} (-2i) \operatorname{sen} k\alpha D \right\}$$

ou

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = \frac{2A}{k\alpha} \operatorname{sen} k\alpha D [e^{ik\alpha(b+D)} + e^{-ik\alpha(b+D)}]$$

e, finalmente,

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = \frac{4A}{k\alpha} \operatorname{sen} k\alpha D \cos k\alpha(b+D)$$

Definindo, como antes,

$$t = k\alpha D = \frac{2\pi}{\lambda} D \operatorname{sen} \theta \approx \frac{2\pi D}{\lambda} \frac{x}{Z} \quad (27.86)$$

e também

$$s = k\alpha(b+D) = k(b+D) \operatorname{sen} \theta \quad (27.87)$$

achamos

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = 4AD \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cos s \quad (27.88)$$

de modo que a intensidade fica sendo

$$I \propto |\mathcal{N}(\vec{r})|^2$$

ou, introduzindo uma constante de proporcionalidade,

$$I = 16|A|^2 D^2 B \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)^2 \cos^2 s \quad (27.89)$$

Novamente considerando a intensidade para $\theta \rightarrow 0$, de modo que $t \rightarrow 0$ e $s \rightarrow 0$, temos

$$I_0 = I(0) = 16|A|^2 D^2 B \tag{27.90}$$

Então,

$$I = I_0 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \cos^2 s \tag{27.91}$$

cujo gráfico, para $b = 4D$, é mostrado na figura 27.13. Note que, comparando as equações 27.82 e 27.90, vemos que as intensidades agora são quatro vezes maiores que as intensidades no caso de fenda única, já que as fendas irradiam em fase e as amplitudes das ondas difratadas por cada fenda isoladamente somam-se, o que faz com que a amplitude dobre num dado ponto e o quadrado da amplitude, que é a intensidade, quadruplique. Além disso, o fator que envolve o seno é o mesmo que aparece no caso da fenda única, só que agora ele está multiplicado por um fator que envolve o cosseno. Como $b > D$, o fator cosseno é modulado pelo seno, como mostra a figura 27.13, que apresenta a intensidade normalizada da radiação produzida pela difração por fenda dupla para o caso em que $b = 4D$. Na figura, mostramos também a função $\frac{\text{sen}^2 t}{t^2}$ que modula o cosseno.

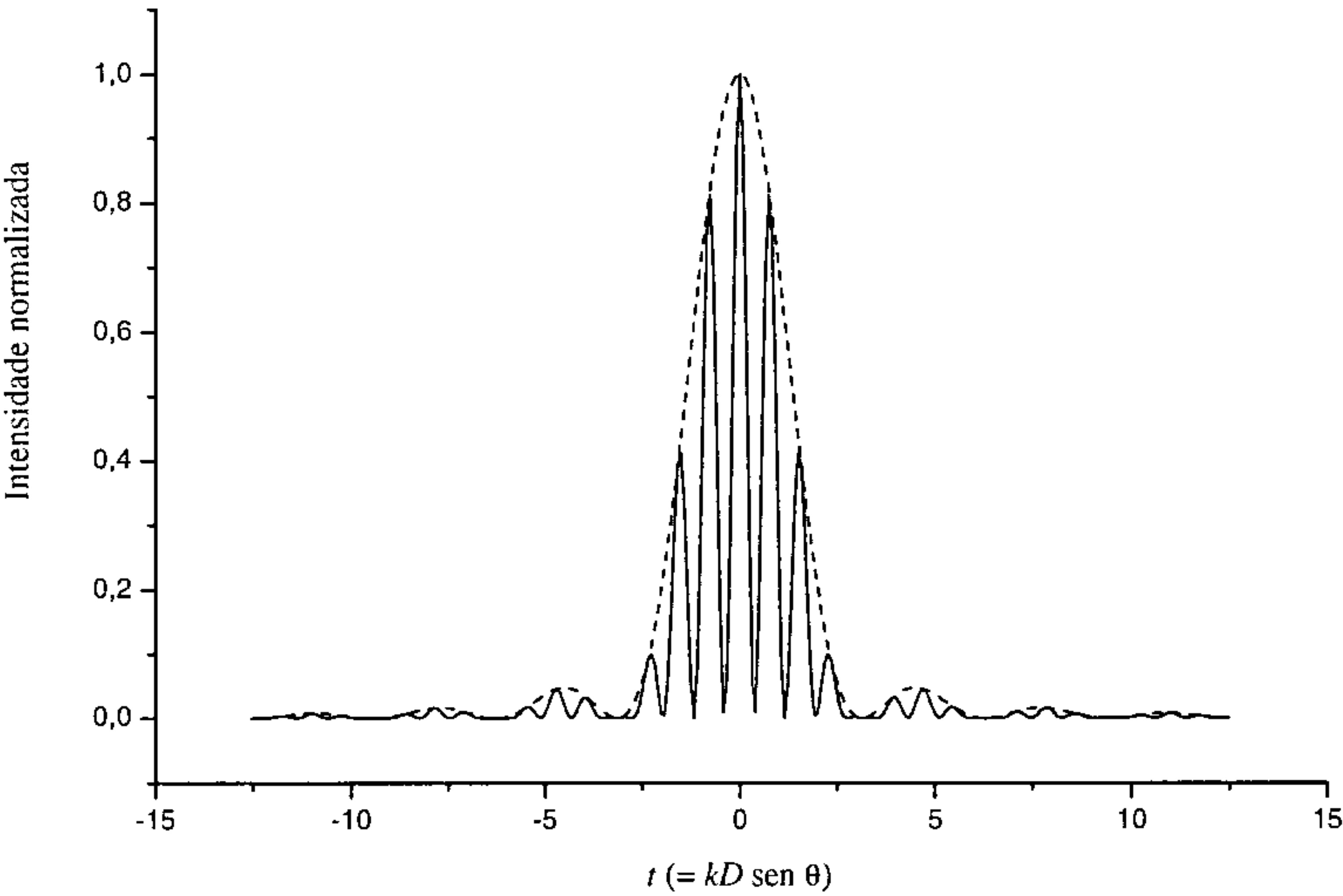


Figura 27.13: Intensidade normalizada para difração por fenda dupla para o caso $b = 4D$ (linha cheia) e a função $\frac{\text{sen}^2 t}{t^2}$, que modula a função $\cos^2 s$.

Podemos agora partir para o caso de uma tela com N fendas igualmente espaçadas, de modo que temos uma difração por múltiplas fendas, conforme mostra a figura 27.14.

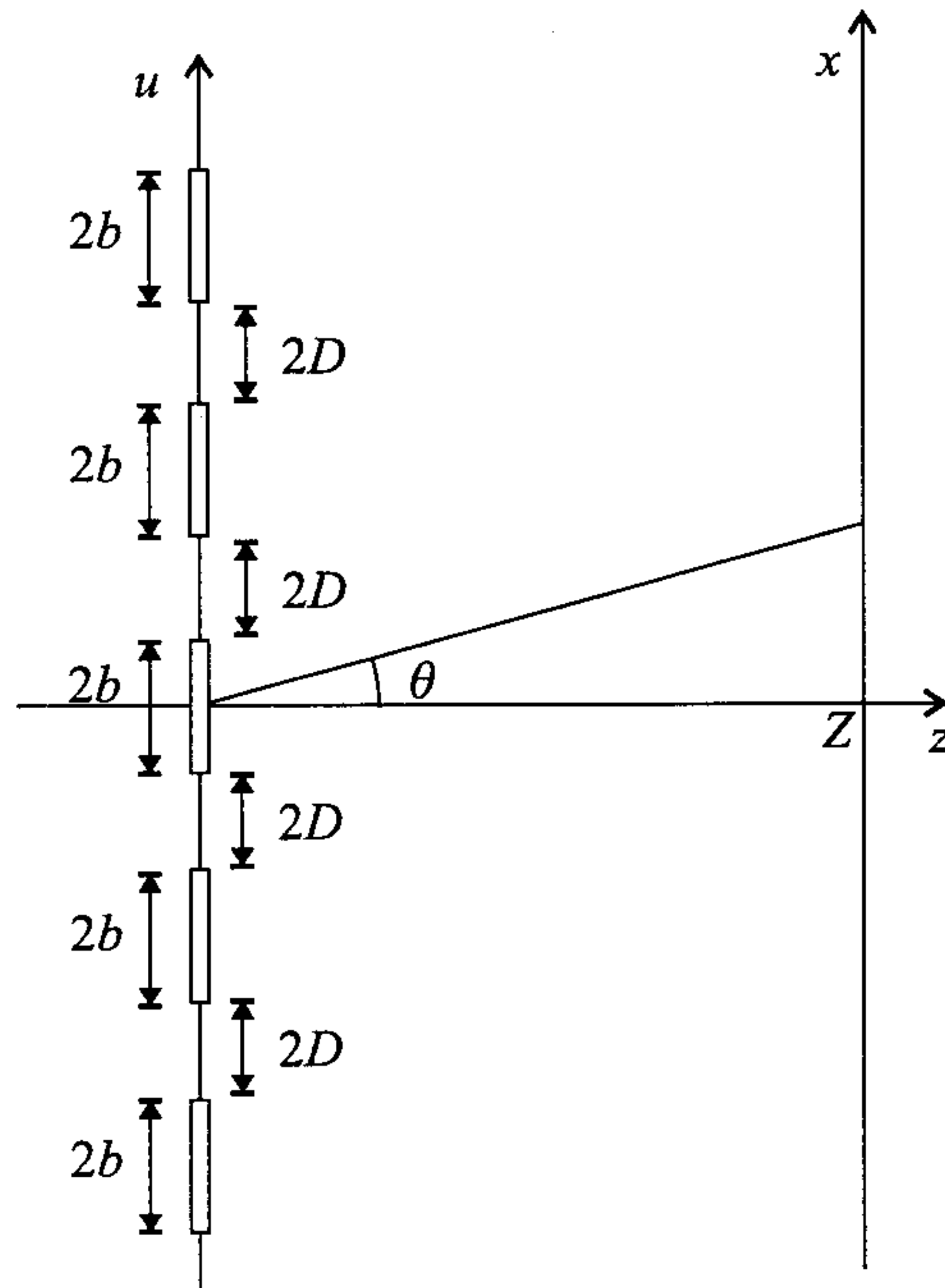


Figura 27.14: Diagrama para a difração por múltiplas fendas para N par.

Na figura, temos $N = 4$. Note que, se N for par, então o origem de u cai no meio de um obstáculo. Se for ímpar, ela situa-se no meio de uma fenda. O resultado final é o mesmo, e vamos considerar inicialmente as grandezas como definidas na figura 27.14. Com a origem colocada como na figura, a j -ésima fenda no lado positivo de u situa-se no intervalo

$$[b + (2b + 2D)j, b + 2bj + 2D(j + 1)], \quad j = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

enquanto, no lado negativo, a ℓ -ésima fenda fica no intervalo

$$[-(b + 2b\ell + 2D(\ell + 1)), -(b + (2b + 2D)\ell)], \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Assim, a equação 27.76 torna-se

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = A \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \int_{b+(2b+2D)j}^{b+2bj+2D(j+1)} e^{-ik\alpha u} du + A \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} \int_{-[b+2b\ell+2D(\ell+1)]}^{-[b+(2b+2D)\ell]} e^{-ik\alpha u} du$$

ou

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = A \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_{b+(2b+2D)j}^{b+2bj+2D(j+1)} + A \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_{-[b+2b\ell+2D(\ell+1)]}^{-[b+(2b+2D)\ell]}$$

que fica

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\vec{r}) = & -\frac{A}{ik\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} [e^{-ik\alpha[b+2bj+2D(j+1)]} - e^{-ik\alpha[b+(2b+2D)j]}] \\ & - \frac{A}{ik\alpha} \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} [e^{ik\alpha[b+(2b+2D)\ell]} - e^{ik\alpha[b+2b\ell+2D(\ell+1)]]] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\vec{r}) = & -\frac{Ae^{-ik\alpha b}}{ik\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} [e^{-ik\alpha(2D)} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} - e^{-ik\alpha(2b+2D)j}] \\ & - \frac{Ae^{ik\alpha b}}{ik\alpha} \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} [e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} - e^{ik\alpha(2D)} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell}] \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\vec{r}) = & -\frac{Ae^{-ik\alpha b}}{ik\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} [e^{-ik\alpha(2D)} - 1] e^{-ik\alpha(2b+2D)j} \\ & - \frac{Ae^{ik\alpha b}}{ik\alpha} \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} [1 - e^{ik\alpha(2D)}] e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
N(\vec{r}) = [1 - e^{-2ik\alpha D}] \frac{Ae^{-ik\alpha b}}{ik\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} \\
+ [e^{2ik\alpha D} - 1] \frac{Ae^{ik\alpha b}}{ik\alpha} \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} \quad (27.92)
\end{aligned}$$

As séries são séries geométricas, e suas somas são dadas pela equação 2.34,

$$S_n = \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r}$$

onde n é o número de termos. Então, como $a_0 = 1$ para ambas as séries, que têm $\frac{N}{2}$ termos, obtemos

$$\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} = \frac{1 - [e^{-ik\alpha(2b+2D)}]^{\frac{N}{2}}}{1 - e^{-ik\alpha(2b+2D)}}$$

ou

$$\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} = \frac{1 - e^{-ikN\alpha(b+D)}}{1 - e^{-ik\alpha(2b+2D)}}$$

e também, para a outra série,

$$\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} = \frac{1 - [e^{ik\alpha(2b+2D)}]^{\frac{N}{2}}}{1 - e^{ik\alpha(2b+2D)}}$$

ou

$$\sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} = \frac{1 - e^{ikN\alpha(b+D)}}{1 - e^{ik\alpha(2b+2D)}}$$

Agora, voltamos à equação 27.92 e obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\vec{r}) = [1 - e^{-2ik\alpha D}] \frac{Ae^{-ik\alpha b}}{ik\alpha} \frac{1 - e^{-ikN\alpha(b+D)}}{1 - e^{-ik\alpha(2b+2D)}} \\ + [e^{2ik\alpha D} - 1] \frac{Ae^{ik\alpha b}}{ik\alpha} \frac{1 - e^{ikN\alpha(b+D)}}{1 - e^{ik\alpha(2b+2D)}} \end{aligned}$$

Podemos reescrever esta expressão fazendo algumas manipulações. Temos então,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\vec{r}) = 2e^{-ik\alpha D} \frac{\overbrace{e^{ik\alpha D} - e^{-ik\alpha D}}^{\text{sen } k\alpha D}}{2i} \frac{Ae^{-ik\alpha b}}{k\alpha} \frac{1 - e^{-ikN\alpha(b+D)}}{1 - e^{-ik\alpha(2b+2D)}} \\ + 2e^{ik\alpha D} \frac{\overbrace{e^{ik\alpha D} - e^{-ik\alpha D}}^{\text{sen}(k\alpha D)}}{2i} \frac{Ae^{ik\alpha b}}{k\alpha} \frac{1 - e^{ikN\alpha(b+D)}}{1 - e^{ik\alpha(2b+2D)}} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\vec{r}) = 2 \text{sen}(k\alpha D) \frac{Ae^{-ik\alpha(b+D)}}{k\alpha} \frac{1 - e^{-ikN\alpha(b+D)}}{1 - e^{-ik\alpha(2b+2D)}} \\ + 2 \text{sen}(k\alpha D) \frac{Ae^{ik\alpha(b+D)}}{k\alpha} \frac{1 - e^{ikN\alpha(b+D)}}{1 - e^{ik\alpha(2b+2D)}} \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\vec{r}) = 2 \text{sen}(k\alpha D) \frac{A}{k\alpha} \frac{1 - e^{-ikN\alpha(b+D)}}{e^{ik\alpha(b+D)} - e^{-ik\alpha(b+D)}} \\ + 2 \text{sen}(k\alpha D) \frac{A}{k\alpha} \frac{1 - e^{ikN\alpha(b+D)}}{e^{-ik\alpha(b+D)} - e^{ik\alpha(b+D)}} \end{aligned}$$

que pode ser escrita também como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = 2AD \frac{\text{sen } k\alpha D}{k\alpha D} \frac{1 - e^{-ikN\alpha(b+D)}}{2i \text{sen } k\alpha(b+D)} + 2AD \frac{\text{sen } k\alpha D}{k\alpha D} \frac{1 - e^{ikN\alpha(b+D)}}{-2i \text{sen } k\alpha(b+D)}$$

ou

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = AD \frac{\text{sen } k\alpha D}{k\alpha D} \frac{1}{i \text{sen } k\alpha(b+D)} \left[1 - e^{-ikN\alpha(b+D)} - 1 + e^{ikN\alpha(b+D)} \right]$$

ou ainda,

$$\aleph(\vec{r}) = AD \frac{\text{sen } k\alpha D}{k\alpha D} \frac{2i \text{sen } kN\alpha(b+D)}{i \text{sen } k\alpha(b+D)}$$

e, finalmente,

$$\aleph(\vec{r}) = 2AD \frac{\text{sen } k\alpha D}{k\alpha D} \frac{\text{sen } kN\alpha(b+D)}{\text{sen } k\alpha(b+D)} \quad (27.93)$$

Agora, definimos, como nos dois casos anteriores,

$$t = k\alpha D = \frac{2\pi}{\lambda} D \text{sen } \theta \approx \frac{2\pi D}{\lambda} \frac{x}{Z} \quad (27.94)$$

e também

$$s = k\alpha(b+D) = k(b+D) \text{sen } \theta \quad (27.95)$$

Portanto, achamos

$$\aleph(\vec{r}) = 2AD \frac{\text{sen } t}{t} \frac{\text{sen } Ns}{\text{sen } s}$$

que pode ser reescrita como

$$\aleph(\vec{r}) = 2NAD \frac{\text{sen } t}{t} \frac{\text{sen } Ns}{N \text{sen } s} \quad (27.96)$$

De modo que a intensidade fica

$$I = B4N^2A^2D^2 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \left(\frac{\text{sen } Ns}{N \text{sen } s} \right)^2$$

Quando $\theta \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ e $s \rightarrow 0$, e o fator

$$\frac{\text{sen } Ns}{\text{sen } s}$$

torna-se, utilizando a regra de L'Hôpital,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{sen } Ns}{\text{sen } s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N \cos Ns}{\cos s} = N$$

Então, para $\theta = 0$, temos

$$I_0 = I(0) = B4N^2 A^2 D^2$$

Note que essa intensidade é N^2 vezes maior que a intensidade do máximo central de fenda única dada por 27.82. A intensidade fica, então,

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \left(\frac{\text{sen } Ns}{N \text{sen } s} \right)^2 \quad (27.97)$$

onde novamente temos o produto de dois fatores. O primeiro, que envolve t , refere-se à fenda única, e o segundo, relacionado a s , está ligado à interferência de N fendas. Para o caso particular de duas fendas, $N = 2$, e a expressão acima fornece

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \left(\frac{\text{sen } 2s}{2 \text{sen } s} \right)^2$$

ou

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \left(\frac{2 \text{sen } s \cos s}{2 \text{sen } s} \right)^2$$

e então,

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \cos^2 s$$

que é a equação 27.91 obtida anteriormente. A figura 27.15 apresenta o padrão de difração para uma tela com $N = 4$ fendas, onde $b = D$ e $s = 2t$, além da envoltória dada pela função $\frac{\text{sen}^2 t}{t^2}$. Como se observa da figura 27.15, o máximo central é bem definido e muito intenso, e praticamente toda a intensidade fica na região que corresponde ao primeiro pico do padrão de difração por fenda única, situado na faixa $-\pi \leq t \leq \pi$.

Note que a expressão 27.97 foi obtida para um número par de fendas. Devemos agora mostrar que esse resultado é válido também para um número ímpar. Nesse caso, considere a figura 27.16. Agora, vamos separar a fenda central das outras. Assim, temos $\frac{N-1}{2}$ fendas do lado positivo e o mesmo número para o lado negativo. A j -ésima fenda do lado positivo de u situa-se entre

$$[(2b + 2D)j - D, (2b + 2D)j + D], \quad j = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

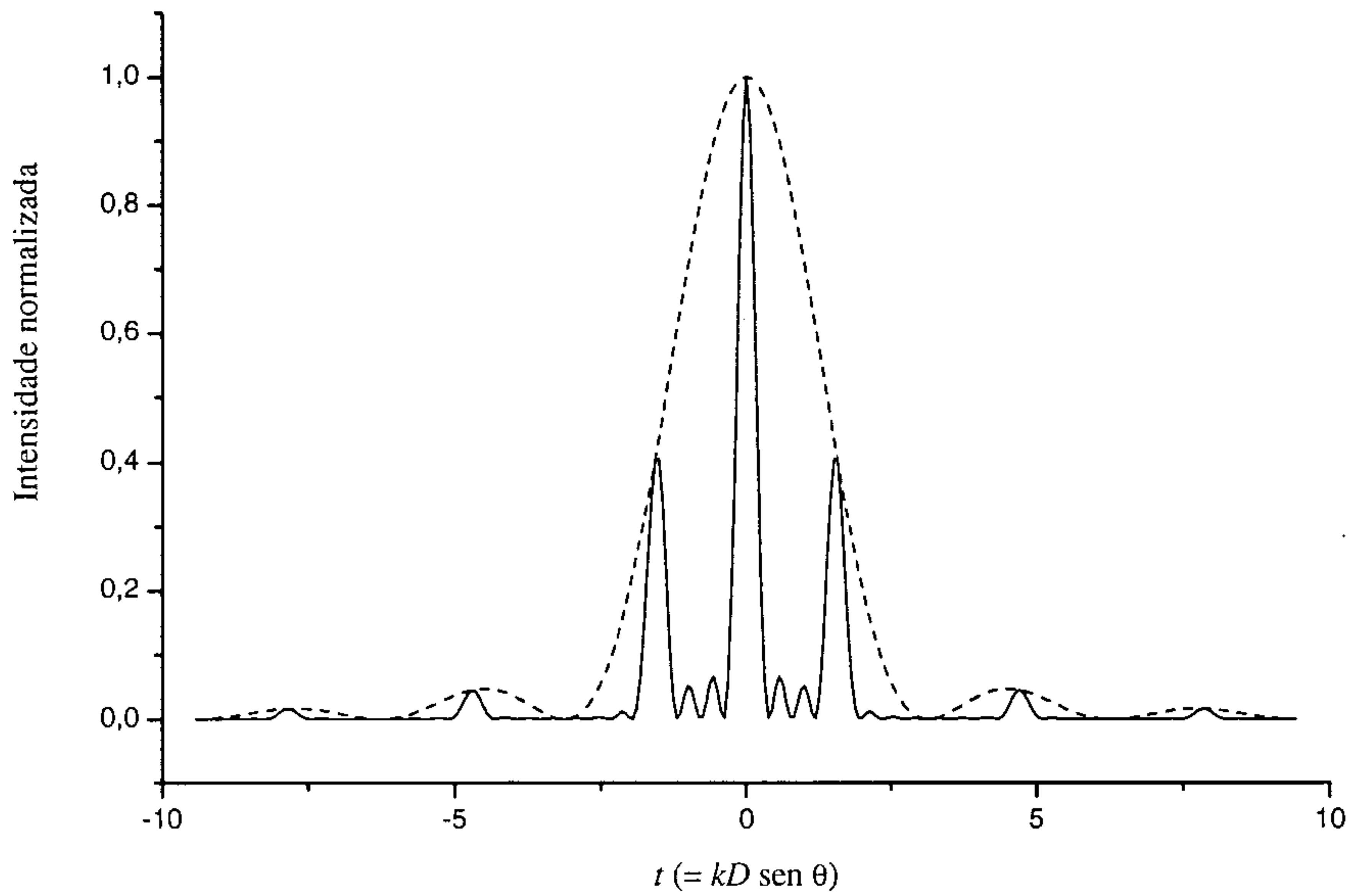


Figura 27.15: Intensidade normalizada para difração por múltiplas fendas para o caso $b = D$ e $N = 4$ (linha cheia) e a função $\frac{\text{sen}^2 t}{t^2}$, que modula a função $\frac{\text{sen}^2 N s}{N \text{sen } s}$.

ao passo que a ℓ -ésima fenda do lado negativo está em

$$[-((2b + 2D)\ell + D), -((2b + 2D)\ell - D)], \quad \ell = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

Assim, a equação 27.76 torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\vec{r}) = & A \int_{-D}^D e^{-ik\alpha u} du + A \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \int_{(2b+2D)j-D}^{(2b+2D)j+D} e^{-ik\alpha u} du \\ & + A \sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} \int_{-[(2b+2D)\ell+D]}^{-[(2b+2D)\ell-D]} e^{-ik\alpha u} du \end{aligned}$$

ou

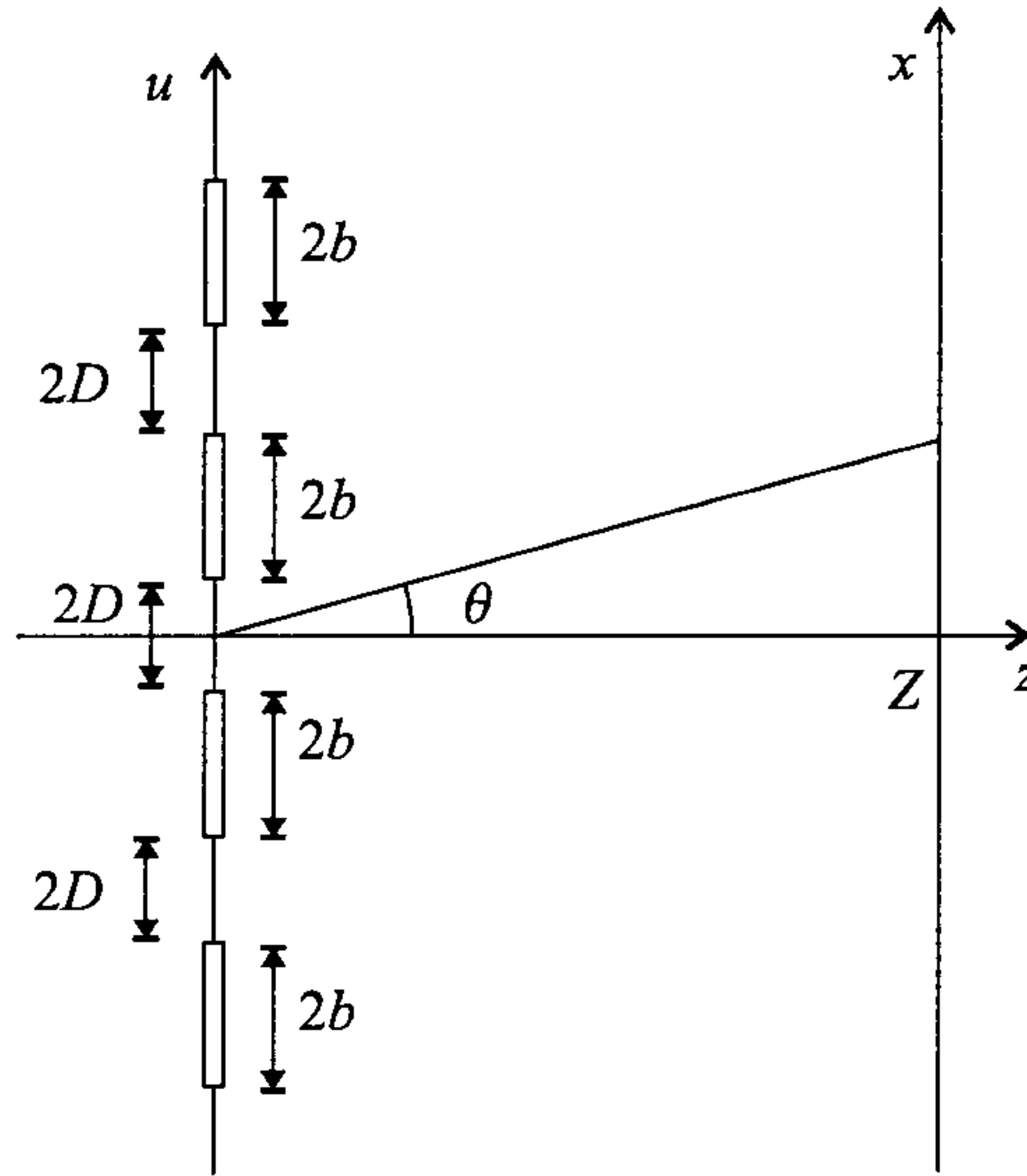


Figura 27.16: Diagrama para a difração por múltiplas fendas para N ímpar.

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\vec{r}) = & A \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_{-D}^D + A \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_{(2b+2D)j-D}^{(2b+2D)j+D} \\ & + A \sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_{-[(2b+2D)\ell-D]}^{-[(2b+2D)\ell+D]} \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\vec{r}) = & -\frac{A}{ik\alpha} \left[e^{-ik\alpha D} - e^{ik\alpha D} \right] \\ & - \frac{A}{ik\alpha} \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[e^{-ik\alpha[(2b+2D)j+D]} - e^{-ik\alpha[(2b+2D)j-D]} \right] \\ & - \frac{A}{ik\alpha} \sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[e^{ik\alpha[(2b+2D)\ell-D]} - e^{ik\alpha[(2b+2D)\ell+D]} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\vec{r}) = & \frac{2A}{k\alpha} \operatorname{sen} k\alpha D \\ & - \frac{A}{ik\alpha} \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[e^{-ik\alpha D} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} - e^{ik\alpha D} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} \right] \\ & - \frac{A}{ik\alpha} \sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[e^{-ik\alpha D} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} - e^{ik\alpha D} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} \right] \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\vec{r}) = & \frac{2A}{k\alpha} \operatorname{sen} k\alpha D - \frac{A}{ik\alpha} \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[e^{-ik\alpha D} - e^{ik\alpha D} \right] e^{-ik\alpha(2b+2D)j} \\ & - \frac{A}{ik\alpha} \sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[e^{-ik\alpha D} - e^{ik\alpha D} \right] e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\vec{r}) = & \frac{2A}{k\alpha} \operatorname{sen} k\alpha D + \frac{2A}{k\alpha} \operatorname{sen} k\alpha D \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} \\ & + \frac{2A}{k\alpha} \operatorname{sen} k\alpha D \sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} \quad (27.98) \end{aligned}$$

Agora usamos a equação 2.34,

$$S_n = \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r}$$

para encontrar as somas das duas séries acima. Na primeira, temos

$$\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} = \frac{e^{-ik\alpha(2b+2D)} \left\{ 1 - [e^{-ik\alpha(2b+2D)}]^{\frac{N-1}{2}} \right\}}{1 - e^{-ik\alpha(2b+2D)}}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} = \frac{e^{-ik\alpha(2b+2D)} \{1 - e^{-ik\alpha(b+D)(N-1)}\}}{e^{-ik\alpha(b+D)} [e^{ik\alpha(b+D)} - e^{-ik\alpha(b+D)}]}$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} = \frac{e^{-ik\alpha(b+D)} \{e^{-ik\alpha(b+D)} - e^{-ikN\alpha(b+D)}\}}{e^{-ik\alpha(b+D)} (2i) \operatorname{sen} k\alpha(b+D)}$$

que fica

$$\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{-ik\alpha(2b+2D)j} = \frac{e^{-ik\alpha(b+D)} - e^{-ikN\alpha(b+D)}}{2i \operatorname{sen} k\alpha(b+D)}$$

A segunda série torna-se

$$\sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} = \frac{e^{ik\alpha(2b+2D)} \{1 - [e^{ik\alpha(2b+2D)}]^{\frac{N-1}{2}}\}}{1 - e^{ik\alpha(2b+2D)}}$$

ou

$$\sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} = \frac{e^{ik\alpha(b+D)} \{e^{ik\alpha(b+D)} - e^{ikN\alpha(b+D)}\}}{e^{ik\alpha(b+D)} [e^{-ik\alpha(b+D)} - e^{ik\alpha(b+D)}]}$$

e então,

$$\sum_{\ell=1}^{\frac{N-1}{2}} e^{ik\alpha(2b+2D)\ell} = \frac{e^{ikN\alpha(b+D)} - e^{ik\alpha(b+D)}}{2i \operatorname{sen} k\alpha(b+D)}$$

Agora, voltamos à equação 27.98, que fica

$$\begin{aligned} \aleph(\vec{r}) = \frac{2A}{k\alpha} \operatorname{sen} k\alpha D \left\{ 1 + \frac{e^{-ik\alpha(b+D)} - e^{-ikN\alpha(b+D)}}{2i \operatorname{sen} k\alpha(b+D)} \right. \\ \left. + \frac{e^{ikN\alpha(b+D)} - e^{ik\alpha(b+D)}}{2i \operatorname{sen} k\alpha(b+D)} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\aleph(\vec{r}) = \frac{2A}{k\alpha} \sin k\alpha D \left\{ 1 + \frac{\sin[Nk\alpha(b+D)] - \sin[k\alpha(b+D)]}{\sin[k\alpha(b+D)]} \right\}$$

ou ainda,

$$\aleph(\vec{r}) = 2ADN \frac{\sin k\alpha D}{k\alpha D} \frac{\sin[Nk\alpha(b+D)]}{N \sin[k\alpha(b+D)]}$$

Usando as definições 27.94 e 27.95, ficamos com

$$\aleph(\vec{r}) = 2ADN \frac{\sin t}{t} \frac{\sin Ns}{N \sin s}$$

que é a equação 27.96, válida agora também para N ímpar. A intensidade fica, então,

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \left(\frac{\sin Ns}{N \sin s} \right)^2$$

que é a equação 27.97, mostrando que ela é válida em geral. Vamos voltar agora ao estudo da difração por orifícios finitos nas duas dimensões, aplicando então a equação 27.75.

27.3.3 Fenda Retangular

Nosso objetivo agora é determinar o padrão de difração formado num plano de difração quando existe na tela difratante uma fenda retangular de dimensões $2D_u$ (direção u) e $2D_v$ (direção v), como mostra a figura 27.17.

Nesse caso, podemos aplicar a equação 27.75 para obter a amplitude de difração, ou seja,

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{2\pi Z} \oint_{S_{1,o}} e^{-ik(\alpha u + \beta v)} du dv$$

ou

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{2\pi Z} \int_{-D_v}^{D_v} \int_{-D_u}^{D_u} e^{-ik(\alpha u + \beta v)} du dv$$

que fica então,

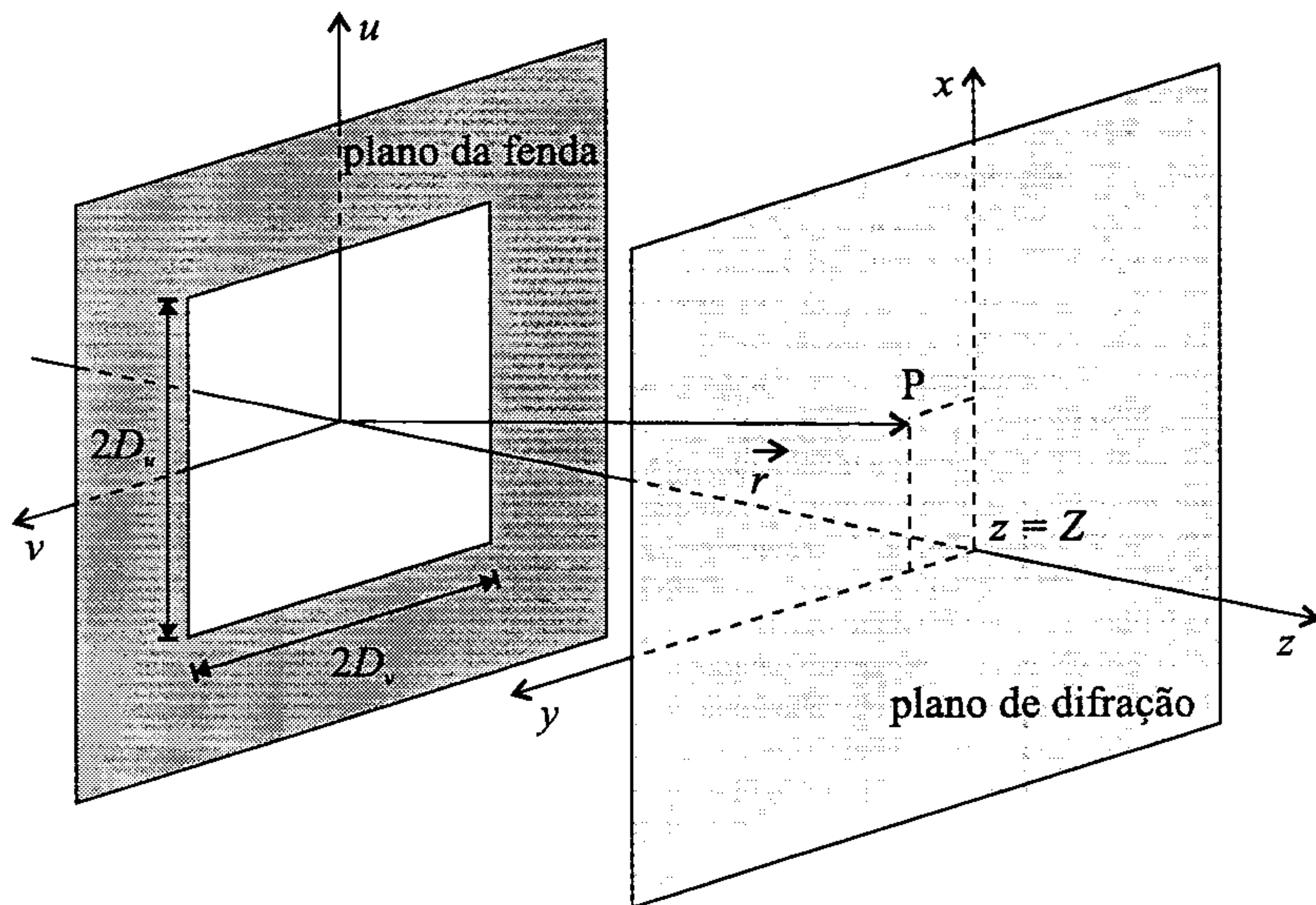


Figura 27.17: Diagrama para a difração por uma fenda retangular.

$$N(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{2\pi Z} \int_{-D_v}^{D_v} e^{-ik\beta v} dv \int_{-D_u}^{D_u} e^{-ik\alpha u} du$$

ou

$$N(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{2\pi Z} \left[\frac{e^{-ik\beta v}}{-ik\beta} \right]_{-D_v}^{D_v} \left[\frac{e^{-ik\alpha u}}{-ik\alpha} \right]_{-D_u}^{D_u}$$

que pode ser escrita como

$$N(\vec{r}) = \frac{Aie^{ikr}}{2\pi k\alpha\beta Z} [e^{-ik\beta D_v} - e^{ik\beta D_v}] [e^{-ik\alpha D_u} - e^{ik\alpha D_u}]$$

ou

$$N(\vec{r}) = \frac{Aie^{ikr}}{2\pi k\alpha\beta Z} [-2i \sin k\beta D_v] [-2i \sin k\alpha D_u]$$

que pode ser reescrita como

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{4AikD_vD_ue^{ikr}}{2\pi Z} \frac{\text{sen } k\beta D_v}{k\beta D_v} \frac{\text{sen } k\alpha D_u}{k\alpha D_u}$$

ou, definindo

$$t = k\alpha D_u = kD_u \frac{x}{Z} \quad (27.99)$$

e

$$s = k\beta D_v = kD_v \frac{y}{Z} \quad (27.100)$$

obtemos

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{2AikD_vD_ue^{ikr}}{\pi Z} \frac{\text{sen } s}{s} \frac{\text{sen } t}{t} \quad (27.101)$$

Assim, a amplitude é caracterizada pelo produto das funções de difração associadas à fenda única, combinando uma difração na direção x e uma na direção y . A intensidade, que é proporcional ao módulo quadrado da amplitude, fica

$$I(\vec{r}) = \frac{4|A|^2 Bk^2 D_v^2 D_u^2}{\pi^2 Z^2} \left(\frac{\text{sen } s}{s} \right)^2 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \quad (27.102)$$

Para $t = s \rightarrow 0$, temos a intensidade máxima, dada por

$$I_0 = I(0) = \frac{4|A|^2 Bk^2 D_v^2 D_u^2}{\pi^2 Z^2} \quad (27.103)$$

de modo que a intensidade do padrão de difração produzido pela fenda retangular é

$$I(\vec{r}) = I_0 \left(\frac{\text{sen } s}{s} \right)^2 \left(\frac{\text{sen } t}{t} \right)^2 \quad (27.104)$$

A figura 27.18 ilustra o padrão de difração produzido por uma fenda retangular num anteparo quando $D_v = 2D_u$. Note que regiões onde a coordenada z é grande correspondem a regiões onde há grande intensidade de radiação.

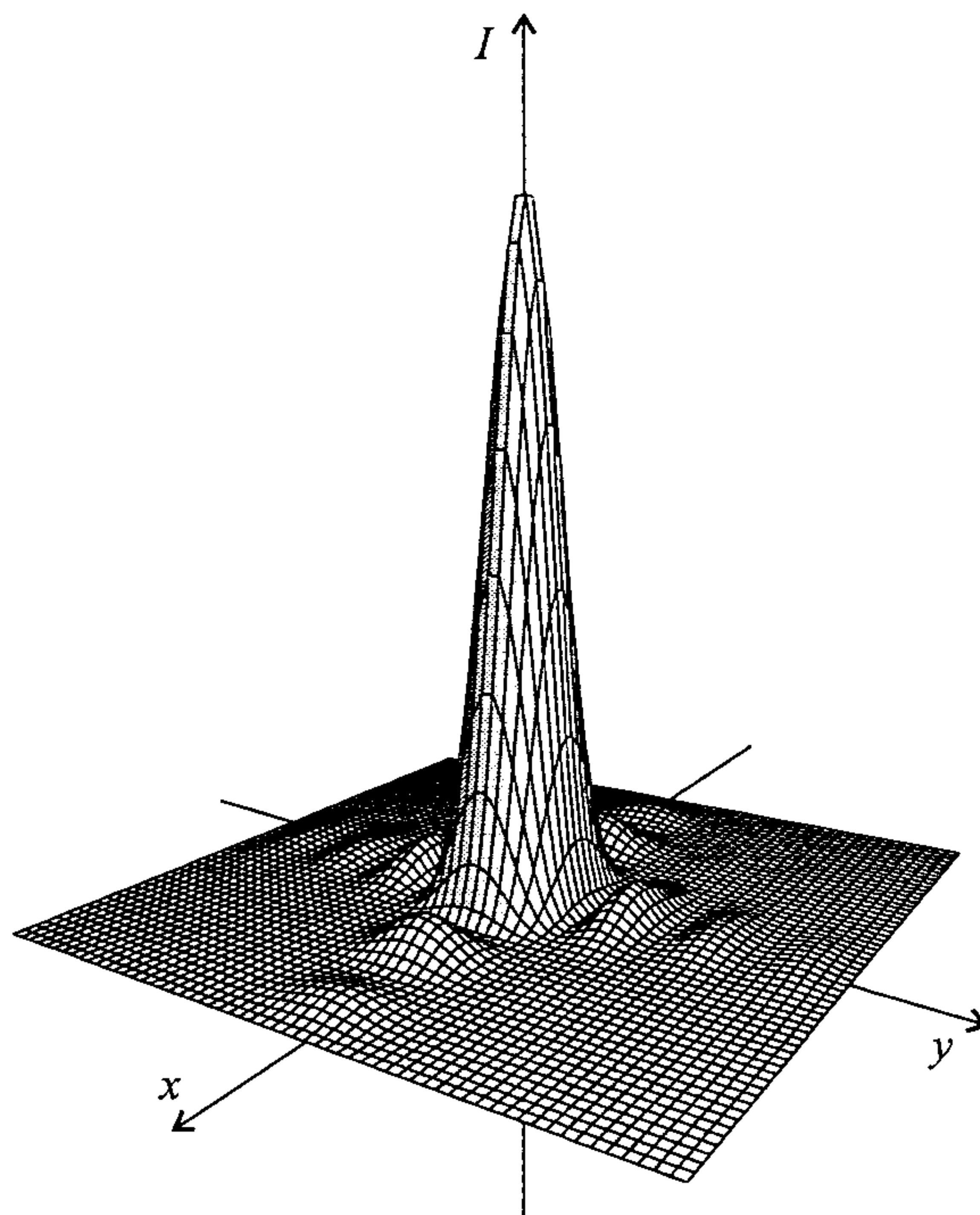


Figura 27.18: Intensidade normalizada para difração por uma fenda retangular para o caso $D_v = 2D_u$.

Da figura, podemos perceber um máximo central bastante intenso cercado por alguns máximos secundários que diminuem de intensidade à medida que se afastam do máximo central. Além disso, todos os máximos são mais largos na direção em que a fenda é mais estreita (direção x). Vejamos agora o que ocorre quando temos uma fenda circular.

27.3.4 Fenda Circular

Vamos estudar agora o que ocorre quando o orifício difratante é um orifício, ou fenda, circular. Esse caso é importante porque instrumentos ópticos como telescópios e microscópios ópticos, por exemplo, possuem lentes de seção transversal circular, e a difração nesses objetos está diretamente ligada à resolução desses objetos. A figura 27.19 apresenta o esquema para a difração por uma fenda circular de raio D .

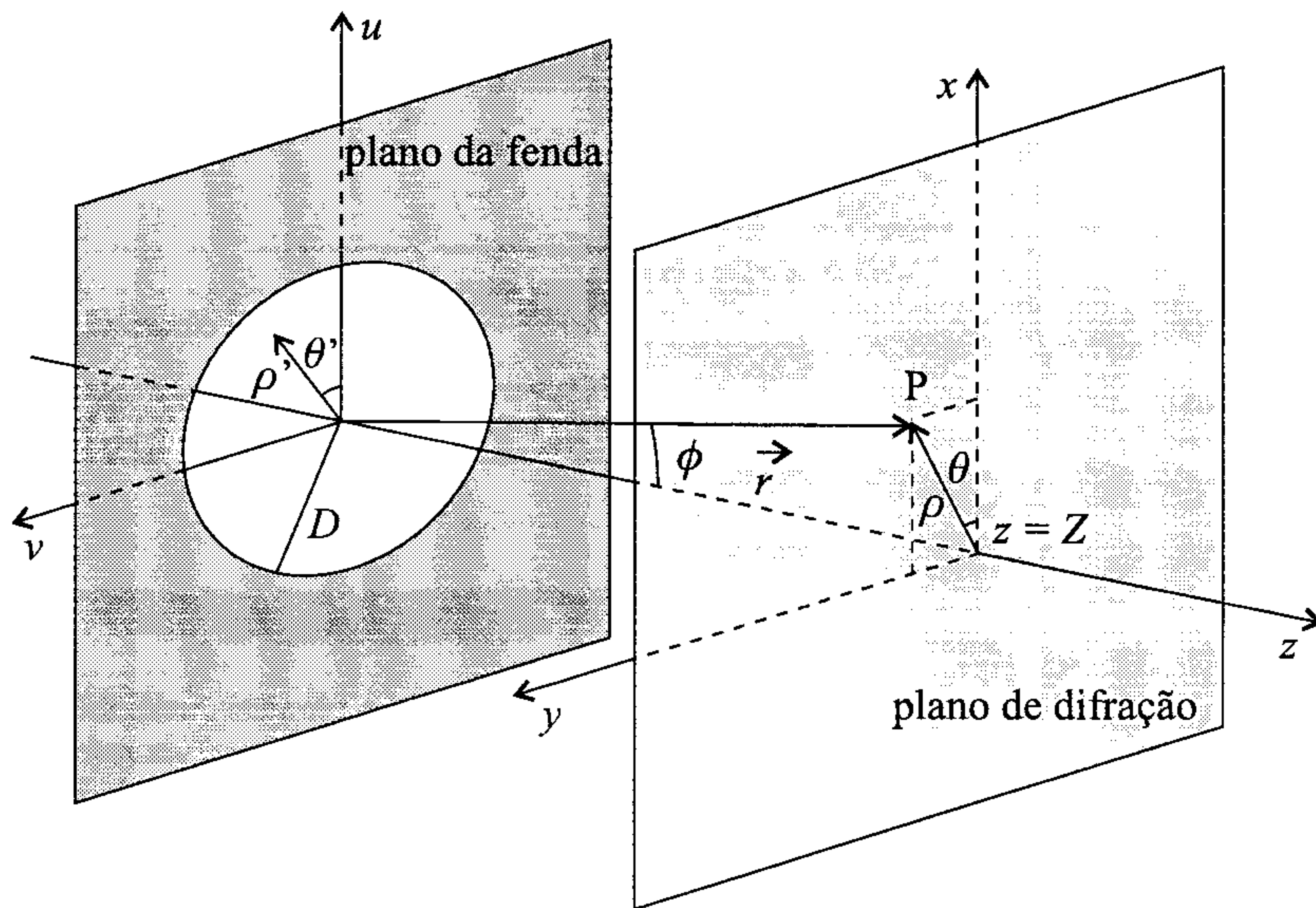


Figura 27.19: Diagrama para a difração por uma fenda circular.

Note, na figura, que definimos coordenadas polares tanto no plano da fenda quanto no plano de difração, já que nesse caso tais coordenadas são mais apropriadas. A amplitude de difração é dada pela equação 27.75,

$$\mathcal{N}(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{2\pi Z} \oint_{S_{1,o}} e^{-ik(\alpha u + \beta v)} du dv \quad (27.105)$$

Assim, temos

$$u = \rho' \cos \theta' \quad v = \rho' \sin \theta' \quad du dv = \rho' d\rho' d\theta' \quad (27.106)$$

além de

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

e, lembrando as definições 27.69,

$$\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\rho \cos \theta}{r} \quad \beta = \frac{y}{r} = \frac{\rho \sin \theta}{r}$$

Como estamos considerando a difração de Fraunhofer, temos que respeitar o limite paraxial, o que implica que o ângulo ϕ da figura é pequeno. Portanto, como

$$\text{sen } \phi = \frac{\rho}{r}$$

podemos escrever

$$\text{sen } \phi \approx \phi = \frac{\rho}{r} \quad (27.107)$$

Precisamos ainda de

$$\alpha u + \beta v = \frac{\rho \cos \theta}{r} \rho' \cos \theta' + \frac{\rho \text{sen } \theta}{r} \rho' \text{sen } \theta'$$

ou

$$\alpha u + \beta v = \frac{\rho \rho'}{r} (\cos \theta \cos \theta' + \text{sen } \theta \text{sen } \theta')$$

ou ainda,

$$\alpha u + \beta v = \frac{\rho \rho'}{r} \cos(\theta - \theta')$$

que fica, usando a expressão 27.107,

$$\alpha u + \beta v = \rho' \phi \cos(\theta - \theta')$$

Note que, devido à simetria cilíndrica do problema, podemos girar os eixos de modo a fazer com que θ , que é um ângulo fixo, torne-se nulo, e assim

$$\alpha u + \beta v = \rho' \phi \cos \theta' \quad (27.108)$$

Com o uso das equações 27.106 e 27.108, a expressão 27.108 fica

$$\aleph(\vec{r}) = -\frac{A i k e^{i k r}}{2 \pi Z} \int_0^D \int_0^{2\pi} e^{-i k \rho' \phi \cos \theta'} \rho' d\rho' d\theta' \quad (27.109)$$

A integral angular pode ser escrita em termos das funções de Bessel $J_n u(x)$. Para ver isso, considere a função

$$f(\rho, \theta) = e^{ik\rho \cos \theta}$$

O cosseno de θ pode ser escrito como

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\vartheta + \vartheta^{-1}}{2}$$

onde

$$\vartheta = e^{i\theta} \quad (27.110)$$

Definimos também

$$t = \frac{k\rho}{2} \quad (27.111)$$

de modo que

$$f(\rho, \theta) = e^{ik\rho \cos \theta} = e^{it(\vartheta + \vartheta^{-1})}$$

Agora, expandimos a função acima em série de Taylor em torno de $\rho = 0$ ($t = 0$), ou seja,

$$e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n (\vartheta + \vartheta^{-1})^n}{n!} \quad (27.112)$$

Podemos reescrever essa expressão considerando o binômio de Newton, isto é,

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

ou também

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} a^j b^{n-j}$$

que pode ser escrito na forma

$$(a + b)^n = \sum_{\substack{j+\ell=n \\ j,\ell \leq n}} \frac{n!}{j!\ell!} a^j b^\ell$$

Assim, a equação 27.112 pode ser escrita como

$$e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \sum_{\substack{j+\ell=n \\ j,\ell \leq n}} \frac{n!}{j!\ell!} \vartheta^j \vartheta^{-\ell}$$

ou

$$e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{j+\ell} t^{j+\ell} \vartheta^{j-\ell}}{j!\ell!}$$

Vamos definir agora um índice m tal que $m = j - \ell$. Então, $j = m + \ell$, e a somatória em j passa a ser uma somatória em m , só que com limites diferentes. Como j e ℓ varrem de 0 a infinito, m estará na faixa $-\infty < m < \infty$. Então,

$$e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{m+2\ell} t^{m+2\ell} \vartheta^m}{(m+\ell)!\ell!}$$

ou

$$e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ i^m t^m \vartheta^m \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{i^{2\ell} t^{2\ell}}{(m+\ell)!\ell!} \right\}$$

Agora, lembramos que a função gama está relacionada ao fatorial através de

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Então, usando essa expressão e também as definições 27.110 e 27.111, achamos

$$e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ i^m \left(\frac{k\rho}{2} \right)^m e^{im\theta} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell! \Gamma(m+\ell+1)} \left(\frac{k\rho}{2} \right)^{2\ell} \right\} \quad (27.113)$$

Relembrando a expressão D.10 para as funções de Bessel, temos

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Portanto, a equação 27.113 pode ser escrita finalmente como

$$e^{ik\rho \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\theta} J_m(k\rho) \quad (27.114)$$

Conseqüentemente, se multiplicarmos essa expressão por $e^{-im'\theta}$ e integrarmos em θ , teremos

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos \theta} e^{-im'\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\theta} J_m(k\rho) e^{-im'\theta} d\theta$$

ou, trocando a ordem da soma com a integral,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k\rho) \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos \theta} e^{-im'\theta} d\theta$$

A integral resulta numa delta de Kronecker, de modo que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k\rho) 2\pi \delta_{m,m'} = \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos \theta} e^{-im'\theta} d\theta$$

e então, efetuando a soma, temos

$$2\pi i^{m'} J_{m'}(k\rho) = \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos \theta} e^{-im'\theta} d\theta$$

ou, omitindo a linha em m' por ser desnecessária, achamos

$$J_m(k\rho) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos \theta - im\theta} d\theta \quad (27.115)$$

Em particular, para $m = 0$, temos

$$J_0(k\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos \theta} d\theta \quad (27.116)$$

Lembrando que a função de Bessel é real, vemos que ela também pode ser escrita como

$$J_0(k\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho \cos \theta} d\theta \quad (27.117)$$

Note que essa é uma das integrais que aparecem na equação 27.109, que fica, então,

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{Z} \int_0^D J_0(k\rho'\phi) \rho' d\rho' \quad (27.118)$$

Agora, precisamos da propriedade

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x) \quad (27.119)$$

Assim, fazendo algumas manipulações na equação 27.118, temos

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{k^2\phi^2 Z} \int_0^D k\rho'\phi J_0(k\rho'\phi) d(k\rho'\phi)$$

ou

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{Aie^{ikr}}{k\phi^2 Z} \int_0^{X_D} J_0(X) X dX$$

ou ainda, substituindo 27.119,

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{Aie^{ikr}}{k\phi^2 Z} \int_0^{X_D} \frac{d}{dX}[XJ_1(X)] dX$$

e, efetuando a integral,

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{Aie^{ikr}}{k\phi^2 Z} [XJ_1(X)]_0^{X_D}$$

ou

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{Aie^{ikr}}{k\phi^2 Z} kD\phi J_1(k\phi D)$$

e, finalmente,

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{Z} D^2 \frac{J_1(k\phi D)}{k\phi D} \quad (27.120)$$

Definindo

$$t = k\phi D \simeq kD \frac{\rho}{Z} \quad (27.121)$$

ficamos com

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = -\frac{Aike^{ikr}}{Z} D^2 \frac{J_1(t)}{t} \quad (27.122)$$

A intensidade é proporcional ao módulo quadrado da amplitude, ou seja,

$$I(\phi) = C \frac{|A|^2 k^2}{Z^2} D^4 \left[\frac{J_1(t)}{t} \right]^2 \quad (27.123)$$

Note que, quando $x \ll 1$, as funções de Bessel têm a forma assintótica

$$J_m(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^m \quad (27.124)$$

então,

$$\frac{J_1(x)}{x} \simeq \frac{1}{\Gamma(2)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

Portanto, para normalizar a intensidade em $\phi = 0$, reescrevemos a equação 27.123 como

$$I(\phi) = C \frac{|A|^2 k^2}{4Z^2} D^4 \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right]^2 \quad (27.125)$$

de modo que, quando $\phi \rightarrow 0$, temos

$$I_0 = I(0) = C \frac{|A|^2 k^2}{4Z^2} D^4 \quad (27.126)$$

e a intensidade dada pela equação 27.125 fica

$$I(\phi) = I_0 \left[\frac{2J_1(t)}{t} \right]^2 \quad (27.127)$$

A figura 27.20 apresenta o padrão de difração para uma fenda circular, onde novamente se percebe que o máximo central é bastante intenso, sendo circundado por regiões anelares de intensidade menor, chamados de anéis de difração.

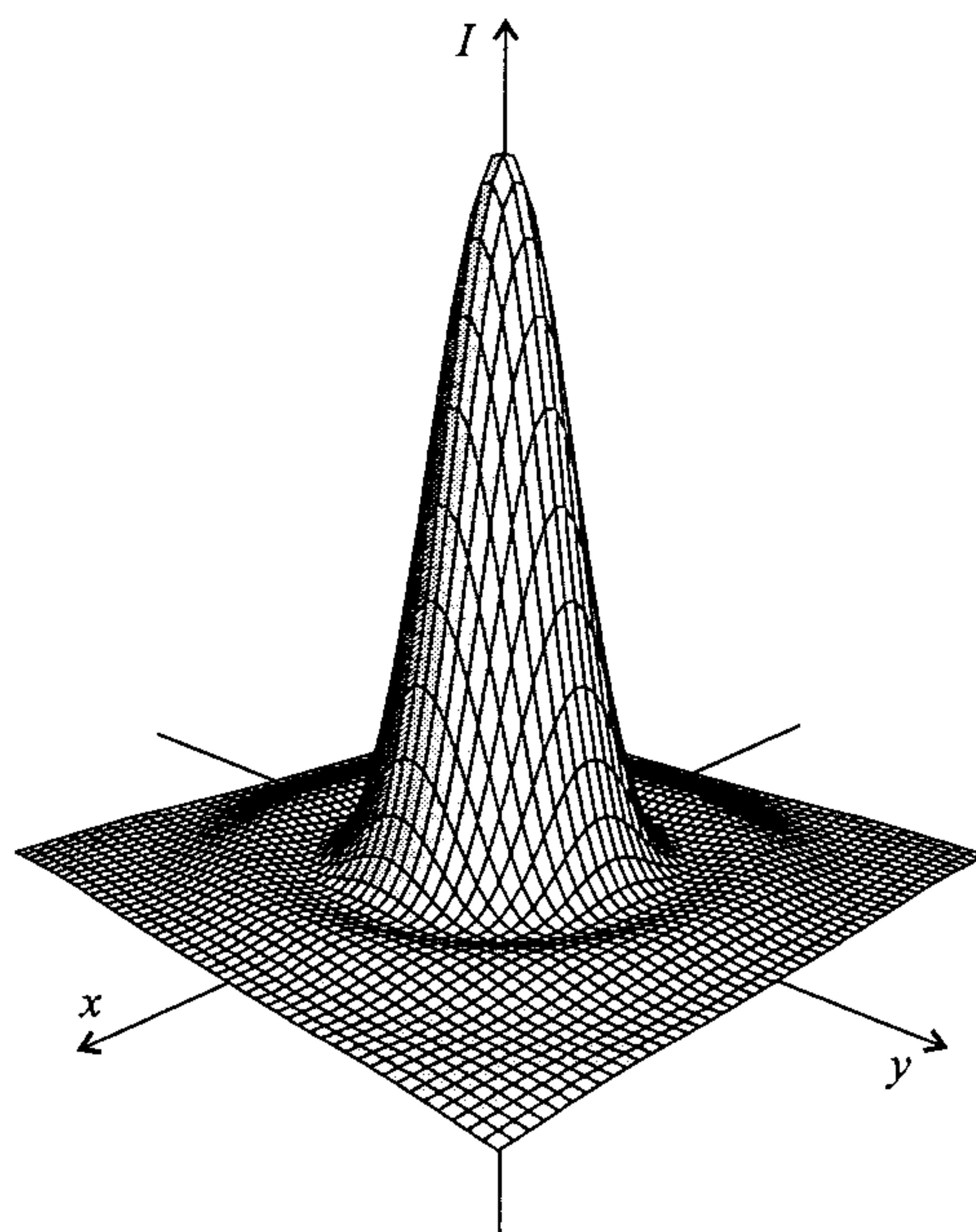


Figura 27.20: Intensidade normalizada para difração por uma fenda circular de raio D .

O máximo central é conhecido como padrão de difração de Airy, e ele contém cerca de 84% da intensidade total do espectro. As regiões escuras correspondem às raízes da função de Bessel $J_1(t)$ que aparece na equação 27.127, ou seja, em $t_z \approx 3,832; 7,016; 10,17; \dots$, o que equivale, usando a equação 27.121, a posições angulares dadas por

$$\phi_{\text{mín}} = \frac{t_z}{kD} = \frac{t_z \lambda}{2\pi D}$$

ou

$$\phi_{\text{mín}} = 0,61 \frac{\lambda}{D}, 1,12 \frac{\lambda}{D}, 1,62 \frac{\lambda}{D}, \dots \quad (27.128)$$

Assim, para que duas fontes pontuais de luz sejam identificáveis como sendo de fato duas fontes (num microscópio ou num telescópio, por exemplo), ou seja, sejam resolvidas, é interessante que o máximo de intensidade de uma coincida com uma região de intensidade nula da outra, o que é conhecido como critério de Rayleigh. Nesse caso, a resolução angular para uma fenda circular vale

$$\mathcal{R} = 0,61 \frac{\lambda}{D} \quad (27.129)$$

ou seja, objetos separados por uma distância que corresponda a ângulos menores do que o definido pela equação 27.129 não são resolvidos, ou distinguidos. Se luz visível for utilizada (λ da ordem de 400–700 nm), “objetos” microscópicos da ordem de 0,5 μm ou maiores podem ser vistos, mas detalhes menores do que isso tornam-se “borrados” ou mal resolvidos. Se, ao invés de luz visível, usarmos elétrons, teremos um microscópio eletrônico, e a vantagem é que o comprimento de onda dos elétrons é da ordem de algumas dezenas de ângstrons, o que permite que detalhes dessa ordem de tamanho sejam percebidos. Podemos diminuir ainda mais o comprimento de onda, usando por exemplo raios-x ou nêutrons, de modo que falamos agora de comprimentos de onda da ordem de 1 Å. Tais faixas de valores são utilizadas por pesquisadores que estão interessados na estrutura atômica da matéria, como, por exemplo, na determinação dos arranjos cristalinos em cristais, ou na determinação da ordem local dos átomos em materiais amorfos. Uma desvantagem dessas técnicas é a alta energia da radiação, que pode produzir danos ao material, o que é um fator importante quando se quer estudar material biológico, por exemplo.

Até agora estudamos a teoria escalar para a difração de Fraunhofer. Nosso próximo assunto consiste na teoria escalar da difração de Fresnel, que envolve um termo quadrático na expansão 27.71.

27.4 Difração de Fresnel

Na difração de Fraunhofer, a condição de Fraunhofer 27.73,

$$\frac{D^2}{8\lambda} \ll r$$

estabelece as condições para que apenas o termo linear em 27.71 seja mantido. Basicamente, deve haver um compromisso entre D (o tamanho característico da fenda), λ (o comprimento de onda) e r , a distância entre o plano da tela difratante e o plano da imagem da difração, de modo que ocorra a condição acima. Numa difração de Fresnel, o que ocorre é que a condição de Fraunhofer não é seguida, isso porque o tamanho da fenda não é tão pequeno quando comparado com o comprimento de onda da radiação (pode ser da mesma ordem ou até maior) ou porque a distância entre fenda e plano de difração não é tão grande quando comparada com o comprimento de onda. Assim, tem-se que $\frac{D^2}{8\lambda r}$ pode ser da mesma ordem ou maior que 1, mesmo que ocorra isoladamente $\frac{D}{r} \ll 1$. Nesse caso, é preciso considerar também o termo quadrático na expansão 27.71, o que complica ainda mais os procedimentos matemáticos. Para dar uma idéia do que ocorre, vamos apresentar a difração de Fresnel considerando o caso simples de uma fenda de difração com uma largura definida, mas com comprimento muito grande na direção v , como a fenda que estudamos na seção 27.3.1. A figura 27.21 ilustra as grandezas relevantes para o problema.

A fenda estende-se de $u = D_1$ até $u = D_2$, e a posição de um ponto do plano de difração em relação a um ponto do plano da tela, ou seja, $\vec{R}$, é dada por

$$\vec{R} = (x - u)\hat{i} + Z\hat{k}$$

de modo que a distância entre esses dois pontos vale

$$R = \sqrt{(x - u)^2 + Z^2} = Z \left[1 + \frac{(x - u)^2}{Z^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Considerando que estamos limitados a raios paraxiais, Z é muito grande quando comparado ao tamanho característico da fenda e ao tamanho característico da imagem de difração formada no plano de difração, de modo que podemos expandir a função acima como

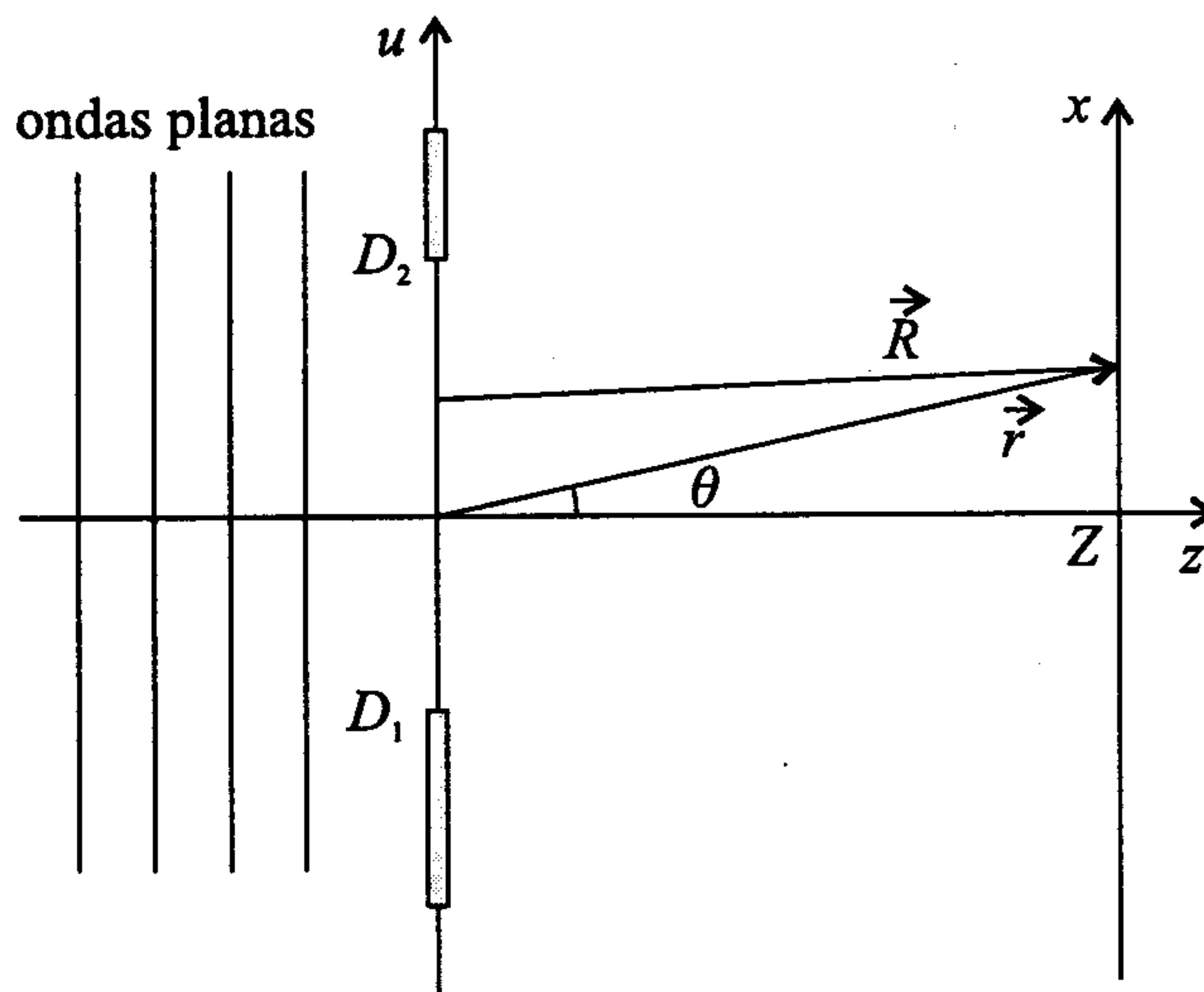


Figura 27.21: Diagrama para a difração de Fresnel por uma fenda única.

$$R = Z \left[1 + \frac{(x - u)^2}{2Z^2} \right]$$

ou

$$R = Z + \frac{(x - u)^2}{2Z}$$

Então, na equação 27.76, ao invés do termo linear que surge no caso da difração de Fraunhofer, teremos um termo quadrático, dado pela substituição de R na exponencial complexa que aparece na equação 27.15, ou seja,

$$N(\vec{r}) = A \int_{D_1}^{D_2} e^{ik \frac{(x-u)^2}{2Z}} du \quad (27.130)$$

onde as constantes foram todas incluídas no fator complexo A . Vamos definir uma variável φ tal que

$$\varphi = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}} (u - x) \quad (27.131)$$

de modo que

$$\varphi^2 = \frac{k}{\pi Z}(u - x)^2 = \frac{k}{\pi Z}(x - u)^2 \quad (27.132)$$

e

$$u = \sqrt{\frac{\pi Z}{k}}\varphi + x \quad (27.133)$$

Além disso, temos também

$$d\varphi = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}}du \quad (27.134)$$

ou

$$du = \sqrt{\frac{\pi Z}{k}}d\varphi \quad (27.135)$$

Na variável φ , os limites para a fenda estão em

$$u_1 = D_1 \Rightarrow \varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}}(D_1 - x) \quad (27.136a)$$

$$u_2 = D_2 \Rightarrow \varphi_2 = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}}(D_2 - x) \quad (27.136b)$$

Usando as equações 27.132, 27.134 e 27.136, a expressão 27.130 pode ser reescrita como

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = A \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{i\frac{\pi}{2}\varphi^2} \sqrt{\frac{\pi Z}{k}} d\varphi$$

ou

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = A \sqrt{\frac{\pi Z}{k}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{i\frac{\pi}{2}\varphi^2} d\varphi \quad (27.137)$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\mathfrak{N}(\vec{r}) = A \sqrt{\frac{\pi Z}{k}} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi + i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \right\} \quad (27.138)$$

As integrais que aparecem na equação acima estão relacionadas às integrais conhecidas como integrais de Fresnel. Temos a integral de Fresnel do cosseno, dada por

$$\mathcal{C}(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \quad (27.139)$$

e a integral de Fresnel do seno,

$$\mathcal{S}(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \quad (27.140)$$

Ambas são integrais que não possuem formas fechadas, mas podem ser obtidos valores numéricos caso necessário. Note que elas são funções ímpares de seus argumentos, como pode ser visto se substituirmos φ_0 por $-\varphi_0$, ou seja,

$$\mathcal{C}(-\varphi_0) = \int_0^{-\varphi_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi$$

Agora, definimos uma variável $\varphi' = -\varphi$, de modo que

$$\mathcal{C}(-\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi'^2\right) d(-\varphi')$$

ou

$$\mathcal{C}(-\varphi_0) = - \int_0^{\varphi_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi'^2\right) d\varphi' = -\mathcal{C}(\varphi) \quad (27.141)$$

e a mesma demonstração vale para a função dada por 27.140, de modo que

$$\mathcal{S}(-\varphi_0) = -\mathcal{S}(\varphi) \quad (27.142)$$

Além disso, temos os limites

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \mathcal{C}(\varphi) = \frac{1}{2} \quad (27.143a)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \mathcal{S}(\varphi) = \frac{1}{2} \quad (27.143b)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \mathcal{C}(\varphi) = -\frac{1}{2} \quad (27.143c)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \mathcal{S}(\varphi) = -\frac{1}{2} \quad (27.143d)$$

É interessante mostrar o gráfico de $S(\varphi)$ em função de $C(\varphi)$, o que é feito na figura 27.22.

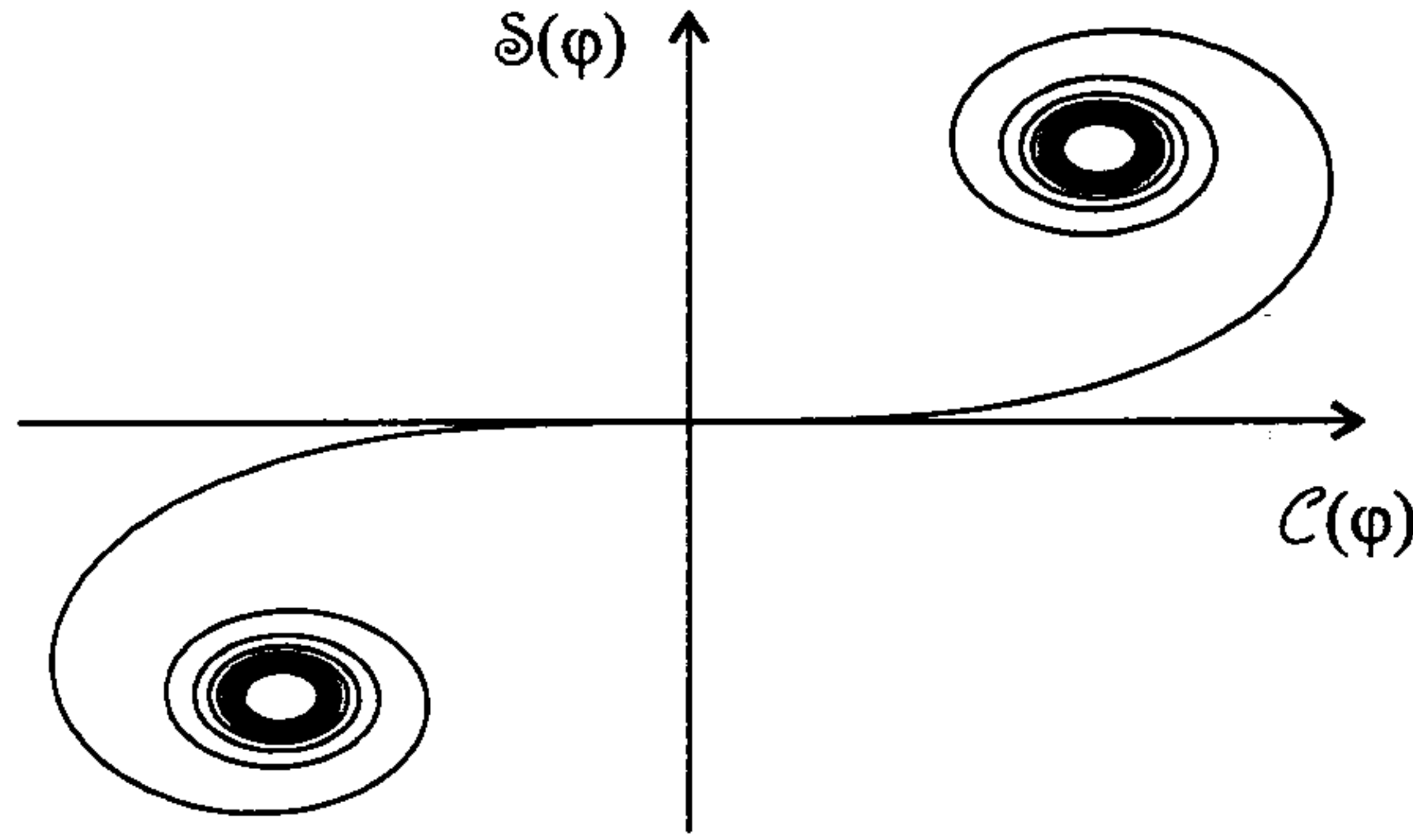


Figura 27.22: Gráfico de $S(\varphi)$ em função de $C(\varphi)$, conhecido como espiral de Cornu.

Essa curva, conhecida como *espiral de Cornu*, foi introduzida por M. A. Cornu, em 1874, como auxiliar no tratamento da difração de Fresnel. Uma propriedade importante é que, se considerarmos um elemento de arco nessa curva, teremos

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{dC}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dS}{d\varphi}\right)^2}$$

ou, usando as equações 27.139 e 27.140,

$$d\ell = d\varphi \sqrt{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right)\right]^2 + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right)\right]^2}$$

que fica

$$d\ell = d\varphi \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right)} = d\varphi$$

ou seja, o comprimento de arco entre dois pontos pertencentes à espiral de Cornu corresponde à diferença entre os valores de φ correspondentes aos pontos. Vamos agora considerar o módulo quadrado da equação 27.138, ou seja,

$$|N(\vec{r})|^2 = |A|^2 \frac{\pi Z}{k} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \right\}^2 + \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \right\}^2$$

ou

$$|\mathcal{N}(\vec{r})|^2 = |A|^2 \frac{\pi Z}{k} \left\{ \int_0^{\varphi_2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi + \int_{\varphi_1}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \right\}^2 \\ + \left\{ \int_0^{\varphi_2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi + \int_{\varphi_1}^0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \right\}^2$$

que pode ser escrito como

$$|\mathcal{N}(\vec{r})|^2 = |A|^2 \frac{\pi Z}{k} \left\{ \mathcal{C}(\varphi_2) - \int_0^{\varphi_1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \right\}^2 \\ + \left\{ \mathcal{S}(\varphi_2) - \int_0^{\varphi_1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi^2\right) d\varphi \right\}^2$$

ou

$$|\mathcal{N}(\vec{r})|^2 = |A|^2 \frac{\pi Z}{k} [\mathcal{C}(\varphi_2) - \mathcal{C}(\varphi_1)]^2 + [\mathcal{S}(\varphi_2) - \mathcal{S}(\varphi_1)]^2$$

A intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude, de modo que escrevemos

$$I = B \left\{ [\mathcal{C}(\varphi_2) - \mathcal{C}(\varphi_1)]^2 + [\mathcal{S}(\varphi_2) - \mathcal{S}(\varphi_1)]^2 \right\} \quad (27.144)$$

Vamos normalizar a intensidade considerando que temos uma fenda extremamente grande, o que corresponde a termos $D_1 \rightarrow -\infty$ e $D_2 \rightarrow \infty$. Pelas equações 27.136, isso equivale a $\varphi_1 \rightarrow -\infty$ e $\varphi_2 \rightarrow \infty$. Pelas equações 27.143, a expressão 27.144 fica, nesse limite,

$$I = B \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]^2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]^2 \right\} = 2B$$

Então, normalizamos a intensidade da seguinte forma:

$$I = \frac{I_0}{2} \left\{ [\mathcal{C}(\varphi_2) - \mathcal{C}(\varphi_1)]^2 + [\mathcal{S}(\varphi_2) - \mathcal{S}(\varphi_1)]^2 \right\} \quad (27.145)$$

Agora calculamos

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}}(D_2 - x) - \sqrt{\frac{k}{\pi Z}}(D_1 - x)$$

ou

$$\Delta\varphi = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}}(D_2 - D_1) = \sqrt{\frac{k}{\pi Z}}D \quad (27.146)$$

onde D é a largura da fenda. Considerando que $|D_1| = |D_2|$, temos que o eixo z na figura 27.21 está exatamente no meio da fenda, em $x = 0$. Vamos determinar agora o valor médio do intervalo $[\varphi_1, \varphi_2]$, ou seja,

$$\varphi_m = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}(D_2 - x) + \sqrt{\frac{k}{\pi Z}}(D_1 - x) \right]$$

ou

$$\varphi_m = -\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}x$$

ou ainda, usando 27.146,

$$\varphi_m = -\frac{\Delta\varphi}{D}x \quad (27.147)$$

Então, podemos escrever

$$\varphi_1 = \varphi_m - \frac{\Delta\varphi}{2} = -\frac{\Delta\varphi}{D}x - \frac{\Delta\varphi}{2} = -\Delta\varphi \left(\frac{x}{D} + \frac{1}{2} \right) \quad (27.148a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_m + \frac{\Delta\varphi}{2} = -\frac{\Delta\varphi}{D}x + \frac{\Delta\varphi}{2} = -\Delta\varphi \left(\frac{x}{D} - \frac{1}{2} \right) \quad (27.148b)$$

Com isso, podemos determinar a intensidade em alguns pontos relevantes. No eixo, em $x = 0$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\Delta\varphi}{2} \\ \varphi_2 &= +\frac{\Delta\varphi}{2} \end{aligned}$$

e assim, a intensidade fica

$$I(x=0) = \frac{I_0}{2} \left\{ \left[\mathfrak{C}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) - \mathfrak{C}\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right]^2 + \left[\mathfrak{S}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) - \mathfrak{S}\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right]^2 \right\}$$

ou, usando as propriedades 27.141 e 27.142, temos

$$I(x=0) = \frac{I_0}{2} \left\{ \left[\mathcal{C}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \mathcal{C}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right]^2 + \left[\mathcal{S}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \mathcal{S}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right]^2 \right\}$$

ou ainda,

$$I(x=0) = 2I_0 \left\{ \mathcal{C}^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \mathcal{S}^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right\} \quad (27.149)$$

Outros pontos interessantes correspondem aos pontos a partir dos quais, se a óptica geométrica fosse estritamente válida, ela seria a região de sombra, ou seja, de intensidade nula. Nesse caso, se $x < D_1$ ou $x > D_2$, teríamos a região de sombra. Quando $x = D_1$ (e $|D_1| = \frac{D}{2}$), as equações 27.148 fornecem

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\Delta\varphi \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0 \\ \varphi_2 &= -\Delta\varphi \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \Delta\varphi \end{aligned}$$

Assim, a equação 27.145 torna-se

$$I(x = D_1) = \frac{I_0}{2} \left\{ [\mathcal{C}(\Delta\varphi) - \mathcal{C}(0)]^2 + [\mathcal{S}(\Delta\varphi) - \mathcal{S}(0)]^2 \right\}$$

ou

$$I(x = D_1) = \frac{I_0}{2} \left\{ \mathcal{C}^2(\Delta\varphi) + \mathcal{S}^2(\Delta\varphi) \right\} \quad (27.150)$$

É imediato mostrar que, em $x = D_2$, o resultado é idêntico ao anterior, ou seja,

$$I(x = D_2) = \frac{I_0}{2} \left\{ \mathcal{C}^2(\Delta\varphi) + \mathcal{S}^2(\Delta\varphi) \right\} \quad (27.151)$$

Note que, mesmo quando a fenda é muito grande, ou seja, formalmente $D \rightarrow \infty$ ou $\Delta\varphi \rightarrow \infty$, ainda assim a intensidade das regiões que seriam os limites da sombra geométrica não é nula, e ela vale $I = \frac{I_0}{4}$. De fato, diferentemente do que ocorre na difração de Fraunhofer, a intensidade nunca se anula realmente, mas existem regiões onde ela é bem menor do que em outras, havendo regiões claras e escuras.

Considere agora que tenhamos o caso particular descrito por uma fenda semi-infinita, com extremidades em $u_1 = 0$ e $u_2 \rightarrow \infty$. Nesse caso, temos, usando 27.136,

$$u_1 = D_1 \Rightarrow \varphi_1 = -\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}x \quad (27.152a)$$

$$u_2 = D_2 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow \infty \quad (27.152b)$$

Com o uso dos valores dados em 27.152, a intensidade, dada pela equação 27.145, pode ser escrita como

$$I = \frac{I_0}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \mathcal{C}\left(-\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}x\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - \mathcal{S}\left(-\sqrt{\frac{k}{\pi Z}}x\right) \right]^2 \right\} \quad (27.153)$$

Esta equação indica resultados interessantes. Considere que $x = 0$. Então, estamos no limite do que seria a sombra geométrica da fenda. Nesse caso, a intensidade vale $I = \frac{I_0}{4}$, conforme já obtivemos anteriormente. À medida que entramos na região da sombra, ou seja, à proporção que x se torna negativo, a intensidade diminui, anulando-se quando $x \rightarrow -\infty$. Por outro lado, quando x se torna positivo, a situação torna-se interessante, pois o aspecto do gráfico da intensidade fica parecido com o de uma faca ou serrote, como mostra a figura 27.23. Note que, quando $x \rightarrow \infty$, $I \rightarrow I_0$. A intensidade oscila em torno desse valor, e a amplitude de oscilação diminui com o aumento de x , como se vê na figura.

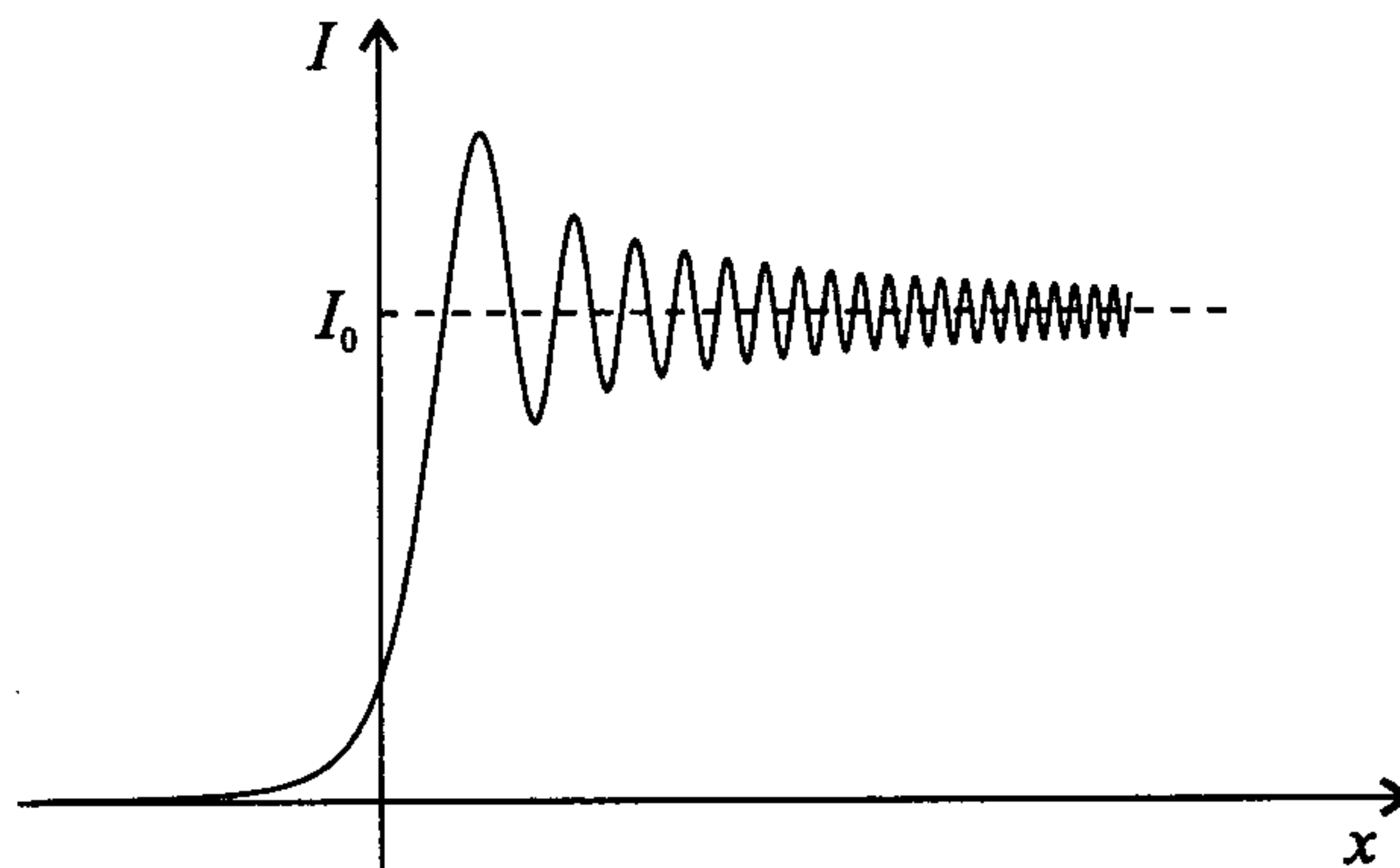


Figura 27.23: Padrão de intensidade para a difração de Fresnel por uma fenda semi-infinita, mostrando as oscilações de intensidade em torno de I_0 para x crescente.

É interessante notar que a difração de Fresnel situa-se numa região intermediária entre o domínio da óptica geométrica, onde $D \gg \lambda$ e $D \simeq r$, e o

domínio da difração de Fraunhofer, onde $\frac{D^2}{8\lambda} \ll r$. Nesse sentido, o fenômeno da difração de Fresnel no nosso dia-a-dia não é muito comum, sua visualização sendo prejudicada pelo fato de as fontes de luz serem policromáticas e terem extensões angulares pequenas.

Tendo estudado o fenômeno de difração, vamos voltar nossa atenção para um problema importante envolvendo espalhamento. Antes, porém, precisamos desenvolver uma expansão importante que se mostrará muito útil.

27.5 Expansão de Ondas Eletromagnéticas Planas em Ondas Esféricas

Uma expansão importante é a de uma onda eletromagnética plana em termos de ondas esféricas, envolvendo as funções de Bessel esféricas e os harmônicos esféricos. Vamos obter essa expansão considerando uma onda plana circularmente polarizada propagando-se no eixo z , descrita pela equação 22.11,

$$\vec{\mathcal{F}}(z, t) = A(\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}})e^{i(kz - \omega t + \delta_x)}$$

Considerando apenas a parte espacial dessa expressão, vamos expandir a função

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = Z_0(\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}})e^{ikz} \quad (27.154)$$

onde Z_0 é a impedância do vácuo, dada por 22.43. O campo magnético está relacionado ao elétrico pela expressão 22.25,

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{\mathcal{E}}$$

e, como $\hat{k} \parallel \hat{\mathbf{k}}$, temos

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (27.155)$$

Com isso, o campo $\vec{\mathcal{H}}$ fica

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0 c}\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\mu_0}\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{Z_0}\hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (27.156)$$

onde usamos a impedância do vácuo. Usando a equação 27.154, achamos

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times Z_0 (\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}}) e^{ikz}$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}} = (\hat{\mathbf{j}} \mp i\hat{\mathbf{i}}) e^{ikz} \quad (27.157)$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{H}} = \mp \frac{i}{Z_0} \vec{\mathcal{E}} \quad (27.158)$$

Agora, relembremos as equações 25.130 e 25.131,

$$\vec{\mathcal{E}} = Z_0 \sum_{\ell, m} \left\{ \frac{i}{k} C_{\ell, m}^e \nabla \times [f_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}] + C_{\ell, m}^M g_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \right\}$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell, m} \left\{ C_{\ell, m}^e f_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} - \frac{i}{k} C_{\ell, m}^M \nabla \times [g_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}] \right\}$$

que fornecem a expansão dos campos em termos das funções de Bessel esféricas e das funções $\vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}$. Nosso objetivo agora é determinar os coeficientes $C_{\ell, m}^e$ e $C_{\ell, m}^M$ apropriados para uma onda plana circularmente polarizada, como a descrita pelas equações 27.154 e 27.157, ou seja, queremos que

$$Z_0 (\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}}) e^{ikz} = Z_0 \sum_{\ell, m} \left\{ \frac{i}{k} C_{\ell, m}^e \nabla \times [f_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}] + C_{\ell, m}^M g_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} \right\} \quad (27.159)$$

e também

$$(\hat{\mathbf{j}} \mp i\hat{\mathbf{i}}) e^{ikz} = \sum_{\ell, m} \left\{ C_{\ell, m}^e f_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m} - \frac{i}{k} C_{\ell, m}^M \nabla \times [g_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell, m}] \right\} \quad (27.160)$$

O primeiro passo consiste em considerar, para as funções radiais, apenas as que são fisicamente aceitáveis. Como a onda plana não é limitada espacialmente, ela deve ser finita em todo lugar, incluindo a origem, o que faz com que apenas as funções $j_{\ell}(kr)$ sejam aceitáveis. Portanto, temos

$$(\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}})e^{ikz} = \sum_{\ell, m} \left\{ \frac{i}{k} C_{\ell, m}^e \nabla \times [j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m}] + C_{\ell, m}^M j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} \right\} \quad (27.161)$$

e

$$(\hat{\mathbf{j}} \mp i\hat{\mathbf{i}})e^{ikz} = \sum_{\ell, m} \left\{ C_{\ell, m}^e j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} - \frac{i}{k} C_{\ell, m}^M \nabla \times [j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m}] \right\} \quad (27.162)$$

Vamos efetuar o produto escalar da função $\vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^*$ com a equação 27.161 e integrar no ângulo sólido $d\Omega$, ou seja,

$$\int \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot (\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}})e^{ikz} d\Omega = \int \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \sum_{\ell, m} \left\{ \frac{i}{k} C_{\ell, m}^e \nabla \times [j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m}] + C_{\ell, m}^M j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} \right\} d\Omega$$

ou

$$\begin{aligned} \int \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot (\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}})e^{ikz} d\Omega = & \frac{i}{k} \sum_{\ell, m} C_{\ell, m}^e \int \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \nabla \times [j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m}] d\Omega \\ & + \sum_{\ell, m} C_{\ell, m}^M j_\ell(kr) \int \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} d\Omega \end{aligned} \quad (27.163)$$

Enquanto isso, calculando o produto escalar da função $\vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^*$ com a equação 27.162 e integrando no ângulo sólido $d\Omega$, temos

$$\int \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot (\hat{\mathbf{j}} \mp i\hat{\mathbf{i}})e^{ikz} d\Omega = \int \vec{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \sum_{\ell, m} \left\{ C_{\ell, m}^e j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m} - \frac{i}{k} C_{\ell, m}^M \nabla \times [j_\ell(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell, m}] \right\} d\Omega$$

ou

$$\begin{aligned}
\int \tilde{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot (\hat{\mathbf{j}} \mp i\hat{\mathbf{i}}) e^{ikz} d\Omega = \\
\sum_{\ell, m} C_{\ell, m}^e j_\ell(kr) \int \tilde{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \tilde{\mathbf{J}}_{\ell, m} d\Omega \\
- \frac{i}{k} \sum_{\ell, m} C_{\ell, m}^M \int \tilde{\mathbf{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \nabla \times [j_\ell(kr) \tilde{\mathbf{J}}_{\ell, m}] d\Omega \quad (27.164)
\end{aligned}$$

Para reescrever as expressões 27.163 e 27.164, vamos precisar calcular algumas equações auxiliares. Vamos relembrar a definição dos vetores $\tilde{\mathbf{J}}_{\ell, m}$, dados pela equação 25.128,

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\ell, m}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \tilde{\mathcal{L}} Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

O operador $\tilde{\mathcal{L}}$, definido por H.10, pode ser escrito, usando H.11, como

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{L}_y \hat{\mathbf{j}} + \mathcal{L}_z \hat{\mathbf{k}}$$

Assim, temos

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \tilde{\mathcal{L}} Y_{\ell, m} \cdot \hat{\mathbf{i}}$$

ou

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \mathcal{L}_x Y_{\ell, m}$$

Mas, por H.13a,

$$\mathcal{L}_x = \frac{\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-}{2}$$

de modo que

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\ell, m} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{2\sqrt{\ell(\ell+1)}} (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) Y_{\ell, m} \quad (27.165)$$

De forma similar, temos

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \vec{\mathcal{L}} Y_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{j}}$$

ou

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \mathcal{L}_y Y_{\ell,m}$$

Usando H.13b,

$$\mathcal{L}_y = \frac{\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-}{2i}$$

obtemos

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{j}} = -\frac{i}{2\sqrt{\ell(\ell+1)}} (\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) Y_{\ell,m} \quad (27.166)$$

Vamos calcular agora, usando 27.165 e 27.166, a expressão

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{i}} \mp i \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \\ \frac{1}{2\sqrt{\ell(\ell+1)}} (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-) Y_{\ell,m} \mp i \left[-\frac{i}{2\sqrt{\ell(\ell+1)}} (\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-) Y_{\ell,m} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot (\hat{\mathbf{i}} \mp i \hat{\mathbf{j}}) = \frac{1}{2\sqrt{\ell(\ell+1)}} [\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_- \mp (\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-)] Y_{\ell,m}$$

e então,

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot (\hat{\mathbf{i}} \mp i \hat{\mathbf{j}}) = \frac{\mathcal{L}_{\mp} Y_{\ell,m}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \quad (27.167)$$

Tomando seu complexo conjugado, achamos

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}^* \cdot (\hat{\mathbf{i}} \pm i \hat{\mathbf{j}}) = \frac{(\mathcal{L}_{\mp} Y_{\ell,m})^*}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \quad (27.168)$$

O próximo passo consiste em calcular, mediante 27.165 e 27.166,

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{j}} \pm i \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot \hat{\mathbf{i}} = -\frac{i}{2\sqrt{\ell(\ell+1)}}(\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-)Y_{\ell,m} \pm i\frac{1}{2\sqrt{\ell(\ell+1)}}(\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)Y_{\ell,m}$$

ou

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot (\hat{\mathbf{j}} \pm i\hat{\mathbf{i}}) = -\frac{i}{2\sqrt{\ell(\ell+1)}}[\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_- \mp (\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-)]Y_{\ell,m}$$

e então,

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \cdot (\hat{\mathbf{j}} \pm i\hat{\mathbf{i}}) = \pm \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\mathcal{L}_{\mp}Y_{\ell,m} \quad (27.169)$$

Seu complexo conjugado é

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}^* \cdot (\hat{\mathbf{j}} \mp i\hat{\mathbf{i}}) = \mp i \frac{(\mathcal{L}_{\mp}Y_{\ell,m})^*}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \quad (27.170)$$

As expressões 27.168 e 27.170 podem ser usadas para reescrever o lado esquerdo das equações 27.163 e 27.164. Um dos termos do lado direito usa a equação 25.129,

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} d\Omega = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

que é a relação de ortogonalidade entre os $\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}$. O outro termo é um pouco mais trabalhoso. Vamos iniciar calculando a grandeza importante

$$\nabla \times [\Upsilon_{\ell}(r)\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] = \nabla \times \left[-\Upsilon_{\ell}(r) \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right) \right]$$

onde usamos a equação 25.271 para $\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}$,

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right]$$

e onde $\Upsilon_{\ell}(r)$ é qualquer uma das funções de Bessel esféricas. Note que não há termos na direção radial nessa expressão. Lembrando o rotacional em coordenadas esféricas dado por B.19,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} = & \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ & + \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

temos, para o nosso caso,

$$\begin{aligned}\nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}] = & - \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \Upsilon_\ell \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\Upsilon_\ell}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \Upsilon_\ell \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\Upsilon_\ell}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}] = & - \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \frac{\Upsilon_\ell \hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell,m}}{\partial \phi^2} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) - \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \right\}\end{aligned}$$

Considere agora a equação H.5,

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell,m}}{\partial \phi^2} = \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}\nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,m}] = & \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left\{ \frac{\ell(\ell+1) Y_{\ell,m} \Upsilon_\ell}{r} \hat{\mathbf{r}} \right. \\ & \left. + \left[\frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right] \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \right\} \quad (27.171)\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular

$$\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} = \hat{\mathbf{r}} \times \left[-\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right) \right]$$

ou

$$\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m} = \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\hat{\theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right) \quad (27.172)$$

Usando a equação 27.172, podemos reescrever a expressão 27.171 como

$$\nabla \times [\Upsilon_{\ell}(r) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}] = \frac{i\sqrt{\ell(\ell+1)}Y_{\ell,m}\Upsilon_{\ell}}{r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}}{r} \frac{d}{dr}(r\Upsilon_{\ell}) \quad (27.173)$$

Agora, efetuamos o produto escalar de $\vec{\mathbf{J}}_{\ell',m'}^*$ com a expressão acima, ou seja,

$$\vec{\mathbf{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_{\ell}(r) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}] = \vec{\mathbf{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \left[\frac{i\sqrt{\ell(\ell+1)}Y_{\ell,m}\Upsilon_{\ell}}{r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}}{r} \frac{d}{dr}(r\Upsilon_{\ell}) \right]$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_{\ell}(r) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}] = \\ \frac{i\sqrt{\ell(\ell+1)}Y_{\ell,m}\Upsilon_{\ell}}{r} \vec{\mathbf{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\Upsilon_{\ell}) \vec{\mathbf{J}}_{\ell',m'}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}) \end{aligned}$$

Da expressão 25.271 para $\vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}$, vemos que esses vetores não têm partes radiais, de modo que o primeiro termo do lado direito é nulo. O outro fica, usando também a equação 27.172,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_{\ell}(r) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\Upsilon_{\ell}) \\ \times \frac{i}{\sqrt{\ell'(\ell'+1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \phi} \right] \\ \cdot \left[\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\hat{\theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_{\ell}(r) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}] = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\Upsilon_{\ell}) \\ \times \frac{1}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} - \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} \right] \quad (27.174) \end{aligned}$$

Agora precisamos da expressão 6.78 para os harmônicos esféricos,

$$Y_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Então,

$$\frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{im\phi} \frac{dP_{\ell,m}}{d\theta} \quad (27.175)$$

e

$$\frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} = im \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m} e^{im\phi} \quad (27.176)$$

além de

$$\frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} e^{-im'\phi} \frac{dP_{\ell',m'}}{d\theta} \quad (27.177)$$

e de

$$\frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \phi} = -im' \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} P_{\ell',m'} e^{-im'\phi} \quad (27.178)$$

Usando as equações 27.176 e 27.177, achamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} = \\ im \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m} e^{im\phi} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} e^{-im'\phi} \frac{dP_{\ell',m'}}{d\theta} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} = \\ im \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} P_{\ell,m} \frac{dP_{\ell',m'}}{d\theta} e^{im\phi} e^{-im'\phi} \quad (27.179) \end{aligned}$$

De forma semelhante, usando as equações 27.175 e 27.178, achamos

$$\frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} = -im' \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} P_{\ell',m'} e^{-im'\phi} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{im\phi} \frac{dP_{\ell,m}}{d\theta}$$

ou

$$\frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} = -im' \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m}}{d\theta} e^{im\phi} e^{-im'\phi} \quad (27.180)$$

Subtraindo a equação 27.180 da 27.179, achamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} - \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} = & im \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} P_{\ell,m} \frac{dP_{\ell',m'}}{d\theta} e^{im\phi} e^{-im'\phi} \\ & - \left[-im' \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m}}{d\theta} e^{im\phi} e^{-im'\phi} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} - \frac{\partial Y_{\ell',m'}^*}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} = & i \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\ & \times \left[m P_{\ell,m} \frac{dP_{\ell',m'}}{d\theta} + m' P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m}}{d\theta} \right] e^{im\phi} e^{-im'\phi} \quad (27.181) \end{aligned}$$

Com o uso da equação 27.181, a expressão 27.174 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_{\ell}(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] = & -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_{\ell}) \\ & \times \frac{i}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\ & \times \frac{1}{\sin \theta} \left[m P_{\ell,m} \frac{dP_{\ell',m'}}{d\theta} + m' P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m}}{d\theta} \right] e^{im\phi} e^{-im'\phi} \quad (27.182) \end{aligned}$$

Agora, vamos integrar a equação 27.182 no ângulo sólido $d\Omega$, ou seja,

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] d\Omega = - \int \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \right. \\ \times \frac{i}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\ \left. \times \frac{1}{\sin \theta} \left[m P_{\ell,m} \frac{dP_{\ell',m'}}{d\theta} + m' P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m}}{d\theta} \right] e^{im\phi} e^{-im'\phi} \right\} d\Omega$$

ou

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] d\Omega = - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \\ \times \frac{i}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\ \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \theta} \left[m P_{\ell,m} \frac{dP_{\ell',m'}}{d\theta} + m' P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m}}{d\theta} \right] e^{im\phi} e^{-im'\phi} \sin \theta d\theta d\phi \\ (27.183)$$

Note que, definindo $s = \cos \theta$, temos

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d}{ds}$$

ou

$$\frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{ds}$$

de modo que

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{ds}$$

Com isso, podemos reescrever 27.184 como

$$\begin{aligned}
\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] d\Omega &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \\
&\times \frac{i}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\
&\times \int_{-1}^1 \left[m P_{\ell,m} \frac{dP_{\ell',m'}}{ds} + m' P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m}}{ds} \right] \left\{ \int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{-im'\phi} d\phi \right\} ds \quad (27.184)
\end{aligned}$$

Agora, lembramos a condição de ortogonalidade dada pela equação C.29,

$$\int e^{im\phi} e^{-im'\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m,m'}$$

Assim, a integral em ϕ na expressão 27.184 torna-se

$$\begin{aligned}
\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] d\Omega &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \\
&\times \frac{i}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\
&\times \int_{-1}^1 \left[m P_{\ell,m} \frac{dP_{\ell',m'}}{ds} + m' P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m}}{ds} \right] 2\pi \delta_{m,m'} ds
\end{aligned}$$

ou então, lembrando que $\delta_{m,m'} = 0$ se $m \neq m'$,

$$\begin{aligned}
\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] d\Omega &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \\
&\times \frac{2\pi m'}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m')!}{(\ell+m')!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\
&\times \int_{-1}^1 \left[P_{\ell,m'} \frac{dP_{\ell',m'}}{ds} + P_{\ell',m'} \frac{dP_{\ell,m'}}{ds} \right] ds \quad (27.185)
\end{aligned}$$

Note que podemos escrever

$$\frac{d}{ds} [P_{\ell,m'} P_{\ell',m'}] = P_{\ell,m'} \frac{dP_{\ell',m'}}{ds} + \frac{dP_{\ell,m'}}{ds} P_{\ell',m'}$$

Então, a equação 27.185 pode ser reescrita como

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] d\Omega = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \\ \times \frac{2\pi m'}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m')!}{(\ell+m')!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\ \times \int_{-1}^1 \frac{d}{ds} [P_{\ell,m'} P_{\ell',m'}] ds$$

ou

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] d\Omega = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \\ \times \frac{2\pi m'}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m')!}{(\ell+m')!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\ \times [P_{\ell,m'} P_{\ell',m'}]_{-1}^1$$

ou ainda,

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] d\Omega = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \\ \times \frac{2\pi m'}{\sqrt{\ell\ell'(\ell+1)(\ell'+1)}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m')!}{(\ell+m')!}} \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi} \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}} \\ \times [P_{\ell,m'}(1)P_{\ell',m'}(1) - P_{\ell,m'}(-1)P_{\ell',m'}(-1)] \quad (27.186)$$

Agora, lembrando a expressão C.21, que relaciona os polinômios de Legendre aos polinômios generalizados de Legendre,

$$P_{\ell,m'}(x) = (-1)^{m'} (1-x^2)^{\frac{m'}{2}} \frac{d^{m'}}{dx^{m'}} P_\ell(x)$$

vemos que, em $x = \pm 1$, eles se anulam para $m' \neq 0$, ou seja,

$$P_{\ell,m'}(1) = P_{\ell,m'}(-1) = 0, \quad m' \neq 0$$

o que faz com que o termo entre colchetes em 27.186 se anule. Quando $m' = 0$, o termo entre colchetes não é nulo sempre, mas, como existe um fator multiplicativo $2\pi m'$ nas constantes que multiplicam o termo, vemos que a integral se anula sempre, ou seja, obtemos, finalmente, que

$$\int \vec{\mathfrak{I}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{I}}_{\ell,m}] d\Omega = 0 \quad (27.187)$$

Agora estamos em condições de obter os coeficientes nas equações 27.163 e 27.164. Considerando inicialmente 27.163, vamos usar as expressões 27.168, 25.129 e 27.187 para obter

$$\int \frac{(\mathcal{L}_\mp Y_{\ell',m'})^*}{\sqrt{\ell'(\ell'+1)}} e^{ikz} d\Omega = \sum_{\ell,m} C_{\ell,m}^M j_\ell(kr) \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

ou, efetuando a soma em ℓ e m ,

$$\frac{1}{\sqrt{\ell'(\ell'+1)}} \int (\mathcal{L}_\mp Y_{\ell',m'})^* e^{ikz} d\Omega = C_{\ell',m'}^M j_{\ell'}(kr)$$

ou ainda, omitindo as linhas, por serem desnecessárias,

$$C_{\ell,m}^M j_\ell(kr) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int (\mathcal{L}_\mp Y_{\ell,m})^* e^{ikz} d\Omega \quad (27.188)$$

Os outros coeficientes são obtidos de 27.164, considerando as equações 27.170, 25.129 e 27.187, isto é,

$$\int \mp i \frac{(\mathcal{L}_\mp Y_{\ell',m'})^*}{\sqrt{\ell'(\ell'+1)}} e^{ikz} d\Omega = \sum_{\ell,m} C_{\ell,m}^e j_\ell(kr) \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

ou, efetuando a soma em ℓ e m ,

$$\mp \frac{i}{\sqrt{\ell'(\ell'+1)}} \int (\mathcal{L}_\mp Y_{\ell',m'})^* e^{ikz} d\Omega = C_{\ell',m'}^e j_{\ell'}(kr)$$

ou ainda,

$$C_{\ell,m}^e j_\ell(kr) = \mp \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int (\mathcal{L}_\mp Y_{\ell,m})^* e^{ikz} d\Omega \quad (27.189)$$

Em seguida, vamos precisar da equação H.14a,

$$\mathcal{L}_+ Y_{\ell,m} = \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)} Y_{\ell,m+1}$$

e também de H.14b,

$$\mathcal{L}_- Y_{\ell,m} = \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)} Y_{\ell,m-1}$$

Reunindo as duas, temos

$$\mathcal{L}_{\mp} Y_{\ell,m} = \sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)} Y_{\ell,m \mp 1} \quad (27.190)$$

Utilizando 27.190 em 27.188, obtemos

$$C_{\ell,m}^M j_{\ell}(kr) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int \sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)} Y_{\ell,m \mp 1}^* e^{ikz} d\Omega$$

ou

$$C_{\ell,m}^M j_{\ell}(kr) = \frac{\sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y_{\ell,m \mp 1}^* e^{ikz} d\Omega \quad (27.191)$$

Seguindo o mesmo procedimento, a expressão 27.189 fica

$$C_{\ell,m}^e j_{\ell}(kr) = \mp \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int \sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)} Y_{\ell,m \mp 1}^* e^{ikz} d\Omega$$

ou

$$C_{\ell,m}^e j_{\ell}(kr) = \mp \frac{i \sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \int Y_{\ell,m \mp 1}^* e^{ikz} d\Omega \quad (27.192)$$

Note que, comparando 27.191 e 27.192, vemos que

$$C_{\ell,m}^e = \mp i C_{\ell,m}^M \quad (27.193)$$

O próximo passo consiste em usar a expansão H.62,

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_{\ell}(kr) Y_{\ell,0}(\alpha)$$

onde α é o ângulo entre $\vec{k}$ e $\vec{r}$. Como

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \alpha$$

e sendo

$$z = r \cos \theta$$

fazendo $\alpha = \theta$, temos a expansão desejada, ou seja,

$$e^{ikz} = \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_{\ell}(kr) Y_{\ell,0}(\theta) \quad (27.194)$$

Vamos incluir a expansão 27.194 em 27.191, ou seja,

$$C_{\ell,m}^M j_{\ell}(kr) = \frac{\sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \times \int Y_{\ell,m \mp 1}^* \sum_{\ell'} i^{\ell'} \sqrt{4\pi(2\ell'+1)} j_{\ell'}(kr) Y_{\ell',0} d\Omega$$

ou

$$C_{\ell,m}^M j_{\ell}(kr) = \frac{\sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \times \sum_{\ell'} \left\{ i^{\ell'} \sqrt{4\pi(2\ell'+1)} j_{\ell'}(kr) \int Y_{\ell,m \mp 1}^* Y_{\ell',0} d\Omega \right\} \quad (27.195)$$

Agora, relembremos a condição de ortogonalidade C.31 para os harmônicos esféricos, ou seja,

$$\int Y_{\ell',m'}^* Y_{\ell,m} d\Omega = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}$$

Utilizando a relação de ortogonalidade em 27.195, temos

$$C_{\ell,m}^M j_{\ell}(kr) = \frac{\sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \times \sum_{\ell'} \left\{ i^{\ell'} \sqrt{4\pi(2\ell'+1)} j_{\ell'}(kr) \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m \mp 1,0} \right\}$$

Efetuando a soma em ℓ' e reescrevendo a delta de Kronecker, achamos

$$C_{\ell,m}^M j_{\ell}(kr) = \frac{\sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_{\ell}(kr) \delta_{m,\pm 1}$$

ou

$$C_{\ell,m}^M = \frac{\sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)}}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} \delta_{m,\pm 1}$$

Podemos simplificar ainda mais essa expressão, considerando $m = \pm 1$, ou seja,

$$C_{\ell,\pm 1}^M = \frac{\sqrt{(\ell + 1)(\ell - 1 + 1)}}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)}$$

ou, finalmente,

$$C_{\ell,\pm 1}^M = i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} \quad (27.196)$$

Considerando as expressões 27.193 e 27.196, achamos

$$C_{\ell,\pm 1}^e = \mp i^{\ell+1} \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} \quad (27.197)$$

Agora, podemos voltar às expressões 27.161 e 27.162 e escrever, iniciando com 27.161,

$$(\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}})e^{ikz} = \sum_{\ell} \left\{ \frac{i}{k} [\mp i^{\ell+1} \sqrt{4\pi(2\ell + 1)}] \nabla \times [j_{\ell}(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,\pm 1}] \right. \\ \left. + i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} j_{\ell}(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,\pm 1} \right\}$$

ou

$$(\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}})e^{ikz} = \sum_{\ell} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} \left[j_{\ell}(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times [j_{\ell}(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,\pm 1}] \right] \quad (27.198)$$

Assim, multiplicando por Z_0 , temos, usando 27.154,

$$\vec{\mathcal{E}} = Z_0 \sum_{\ell} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} \left[j_{\ell}(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times [j_{\ell}(kr) \vec{\mathbf{J}}_{\ell,\pm 1}] \right] \quad (27.199)$$

Reescrevendo agora a equação 27.162, achamos

$$(\hat{\mathbf{j}} \mp i\hat{\mathbf{i}})e^{ikz} = \sum_{\ell} \left\{ [\mp i^{\ell+1} \sqrt{4\pi(2\ell+1)}] j_{\ell}(kr) \bar{\mathbf{J}}_{\ell, \pm 1} - \frac{i}{k} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \nabla \times [j_{\ell}(kr) \bar{\mathbf{J}}_{\ell, \pm 1}] \right\}$$

ou

$$(\hat{\mathbf{j}} \mp i\hat{\mathbf{i}})e^{ikz} = \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[-\frac{i}{k} \nabla \times [j_{\ell}(kr) \bar{\mathbf{J}}_{\ell, \pm 1}] \mp i j_{\ell}(kr) \bar{\mathbf{J}}_{\ell, \pm 1} \right] \quad (27.200)$$

de modo que, usando 27.157, temos

$$\vec{\mathcal{H}} = \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[-\frac{i}{k} \nabla \times [j_{\ell}(kr) \bar{\mathbf{J}}_{\ell, \pm 1}] \mp i j_{\ell}(kr) \bar{\mathbf{J}}_{\ell, \pm 1} \right] \quad (27.201)$$

Note que pode ser mais interessante escrever as equações 27.199 e 27.201 de outra forma. Vamos lembrar que $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{H}}$ estão relacionados por meio da expressão 27.156,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}$$

Assim, se fizermos

$$\vec{\mathcal{E}} = Z_0 \vec{\mathcal{E}}'$$

a expressão 27.199 torna-se

$$\vec{\mathcal{E}}' = \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[j_{\ell}(kr) \bar{\mathbf{J}}_{\ell, \pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times [j_{\ell}(kr) \bar{\mathbf{J}}_{\ell, \pm 1}] \right] \quad (27.202)$$

Note que, com essa definição para o campo elétrico, temos, lembrando a equação 27.154,

$$\vec{\mathcal{E}}'(\vec{r}) = (\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}})e^{ikz} \quad (27.203)$$

o que faz com que seu módulo seja

$$|\mathcal{E}'| = |\mathcal{E}'_0| = \sqrt{2}$$

Portanto, nesse caso a potência média incidente, dada por 27.59, fica

$$\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{k}_i = \frac{|\mathcal{E}_{0,i}|^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\mu_0} = \frac{1}{Z_0} \quad (27.204)$$

Além disso, $\vec{\mathcal{H}}$ também pode ser reescrito se considerarmos que, por 27.156,

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}$$

ou

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times (Z_0 \vec{\mathcal{E}}')$$

ou ainda,

$$\frac{1}{Z_0} \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}'$$

Então, chamando

$$\vec{\mathcal{H}}' = \frac{1}{Z_0} \vec{\mathcal{H}}$$

achamos

$$\vec{\mathcal{H}}' = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}}'$$

e a equação 27.201 fica, agora,

$$\vec{\mathcal{H}}' = \frac{1}{Z_0} \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[-\frac{i}{k} \nabla \times [j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}] \mp i j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \right] \quad (27.205)$$

As expressões 27.202 e 27.205 estabelecem a expansão, em ondas esféricas, de uma onda plana circularmente polarizada propagando-se na direção do eixo z . Essa expansão será utilizada em seguida, no estudo do espalhamento produzido por uma esfera perfeitamente condutora.

27.6 Espalhamento por uma Esfera Perfeitamente Condutora

Vamos estudar agora o espalhamento produzido por uma esfera perfeitamente condutora quando uma onda eletromagnética plana incide nela. A esfera tem raio D e está centrada na origem do sistema de coordenadas. A onda plana incidente pode ser escrita mediante 27.202 e 27.205,

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times (j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}) \right] \quad (27.206)$$

e

$$\vec{\mathcal{H}}_i = \frac{1}{Z_0} \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[-\frac{i}{k} \nabla \times (j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}) \mp i j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \right] \quad (27.207)$$

A onda espalhada deve ser uma onda esférica, de modo que ela pode ser escrita na forma de uma expansão, semelhante ao que ocorre nas equações 25.130 e 25.131, ou seja, já efetuando algumas adaptações,

$$\vec{\mathcal{E}}_f = \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[C_{\ell,\pm 1}^e h_{\ell}^1(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{C_{\ell,\pm 1}^M}{k} \nabla \times (h_{\ell}^1(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}) \right] \quad (27.208)$$

e

$$\vec{\mathcal{H}}_f = \frac{1}{Z_0} \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[-\frac{i C_{\ell,\pm 1}^e}{k} \nabla \times (h_{\ell}^1(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}) \mp i C_{\ell,\pm 1}^M h_{\ell}^1(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \right] \quad (27.209)$$

onde consideramos que as funções radiais apropriadas são as funções de Hankel esféricas. Antes de partir para a determinação explícita dos coeficientes, vamos determinar a seção de choque de espalhamento por unidade de ângulo sólido, também conhecida como seção de choque diferencial de espalhamento. Para isso, vamos precisar da potência média por unidade de ângulo sólido, obtida a partir do vetor de Poynting médio 22.52,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*] = \frac{1}{2} \Re[\vec{\mathcal{E}}^* \times \vec{\mathcal{H}}]$$

A potência média de espalhamento emitida por unidade de ângulo sólido na direção descrita pelo versor $\hat{\mathbf{r}}$ é obtida fazendo-se o produto escalar do vetor de Poynting médio com $\hat{\mathbf{r}}$, ou seja,

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \langle \vec{\mathcal{S}} \rangle$$

ou

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{r^2}{2} \Re[\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{H}}_f^*] = \frac{r^2}{2} \Re[\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f^* \times \vec{\mathcal{H}}_f] \quad (27.210)$$

Assim, inicialmente vamos calcular $\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{H}}_f^*$. Pela identidade 1.17 para produtos mistos, podemos escrever

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{H}}_f^* = \vec{\mathcal{E}}_f \cdot \vec{\mathcal{H}}_f^* \times \hat{\mathbf{r}}$$

ou, usando 27.208 e 27.209,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{H}}_f^* = & \left\{ \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[C_{\ell,\pm 1}^e \mathfrak{h}_{\ell}^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \frac{C_{\ell,\pm 1}^M}{k} \nabla \times (\mathfrak{h}_{\ell}^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1}) \right] \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{Z_0} \sum_{\ell'} (-i)^{\ell'} \sqrt{4\pi(2\ell'+1)} \right. \\ & \left. \times \left[\frac{iC_{\ell',\pm 1}^{e*}}{k} \nabla \times (\mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^*) \pm iC_{\ell',\pm 1}^{M*} \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \right] \times \hat{\mathbf{r}} \right\} \end{aligned}$$

ou ainda, fazendo algumas manipulações iniciais,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{H}}_f^* = & -\frac{4\pi}{Z_0} \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \\ & \times \left[C_{\ell,\pm 1}^e \mathfrak{h}_{\ell}^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{C_{\ell,\pm 1}^M}{k} \nabla \times (\mathfrak{h}_{\ell}^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1}) \right] \\ & \left. \cdot \left[\frac{C_{\ell',\pm 1}^{e*}}{k} \hat{\mathbf{r}} \times [\nabla \times (\mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^*)] \pm C_{\ell',\pm 1}^{M*} \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \right] \right\} \quad (27.211) \end{aligned}$$

Vamos relembrar a equação 27.173,

$$\nabla \times [\Upsilon_{\ell}(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] = \frac{i\sqrt{\ell(\ell+1)} Y_{\ell,m} \Upsilon_{\ell}}{r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_{\ell})$$

e vamos calcular, inicialmente, o produto vetorial

$$\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] = \hat{\mathbf{r}} \times \left[\frac{i\sqrt{\ell(\ell+1)}Y_{\ell,m}\Upsilon_\ell}{r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}}{r} \frac{d}{dr}(r\Upsilon_\ell) \right]$$

ou

$$\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m})}{r} \frac{d}{dr}(r\Upsilon_\ell) \quad (27.212)$$

Usando a identidade 1.19a, temos

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}) \hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}$$

Lembrando que, pela expressão 25.271 para $\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}$,

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right]$$

essa função não tem parte radial, achamos

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}) = -\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m} \quad (27.213)$$

Assim, a equação 27.212 fica

$$\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] = -\frac{\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}}{r} \frac{d}{dr}(r\Upsilon_\ell) \quad (27.214)$$

Com o uso da equação 27.214, a expressão 27.211 torna-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{H}}_f^* &= -\frac{4\pi}{Z_0} \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \\ &\quad \times \left[C_{\ell, \pm 1}^e \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1} \pm \frac{C_{\ell, \pm 1}^M}{k} \nabla \times (\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1}) \right] \\ &\quad \cdot \left[-\frac{C_{\ell', \pm 1}^{e*}}{k} \frac{\vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*}{r} \frac{d}{dr}[r \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)] \pm C_{\ell', \pm 1}^{M*} \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^* \right] \Big\} \end{aligned}$$

ou, desenvolvendo os produtos,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{H}}_f^* = & -\frac{4\pi}{Z_0} \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \\
& \times \left\{ -C_{\ell, \pm 1}^e C_{\ell', \pm 1}^{e*} \frac{\mathfrak{h}_\ell^1(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^* \right. \\
& \pm C_{\ell', \pm 1}^{M*} C_{\ell, \pm 1}^e \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) \\
& \mp \frac{C_{\ell', \pm 1}^{e*} C_{\ell, \pm 1}^M}{k^2 r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)] [\nabla \times (\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1})] \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^* \\
& \left. \left. + \frac{C_{\ell, \pm 1}^M C_{\ell', \pm 1}^{M*}}{k} \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) [\nabla \times (\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1})] \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) \right\} \right\} \quad (27.215)
\end{aligned}$$

Vamos reescrever o produto

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1})] \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) = \\
\left\{ \frac{i \sqrt{\ell(\ell+1)} Y_{\ell, m} \mathfrak{h}_\ell^1(kr)}{r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, m}}{r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] \right\} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) \quad (27.216)
\end{aligned}$$

onde usamos a equação 27.173. Lembrando a equação 27.172,

$$\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, m} = \frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\hat{\theta} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell, m}}{\partial \phi} \right)$$

vemos que podemos simplificar a expressão 27.216 para

$$[\nabla \times (\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1})] \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) = (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] \quad (27.217)$$

Vamos usar agora a identidade 1.20, de modo que

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] = \\
\left[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1}) \right] \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)]
\end{aligned}$$

ou, como $\vec{\mathfrak{J}}_{\ell, m}$ não tem parte radial (pela expressão 25.271),

$$(\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1}) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] = \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^* \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] \quad (27.218)$$

Usando a equação 27.218, a equação 27.217 torna-se

$$[\nabla \times (\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1})] \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^*) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \quad (27.219)$$

Com isso, podemos reescrever a equação 27.215 como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathcal{E}}_f \times \vec{\mathcal{H}}_f^* = & \frac{4\pi}{Z_0} \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \\ & \times \left\{ C_{\ell,\pm 1}^e C_{\ell',\pm 1}^{e*} \frac{\mathfrak{h}_\ell^1(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \right. \\ & \mp C_{\ell',\pm 1}^{M*} C_{\ell,\pm 1}^e \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^*) \\ & \pm \frac{C_{\ell',\pm 1}^{e*} C_{\ell,\pm 1}^M}{k^2 r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)] [\nabla \times (\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1})] \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \\ & \left. \left. - C_{\ell,\pm 1}^M C_{\ell',\pm 1}^{M*} \frac{\mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \right\} \right\} \quad (27.220) \end{aligned}$$

Assim, a potência média por unidade de ângulo sólido dada em 27.210 fica

$$\begin{aligned} \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = & \frac{2\pi r^2}{Z_0} \Re \left\{ \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \right. \\ & \times \left\{ C_{\ell,\pm 1}^e C_{\ell',\pm 1}^{e*} \frac{\mathfrak{h}_\ell^1(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \right. \\ & \mp C_{\ell',\pm 1}^{M*} C_{\ell,\pm 1}^e \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^*) \\ & \pm \frac{C_{\ell',\pm 1}^{e*} C_{\ell,\pm 1}^M}{k^2 r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)] [\nabla \times (\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1})] \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \\ & \left. \left. - C_{\ell,\pm 1}^M C_{\ell',\pm 1}^{M*} \frac{\mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',\pm 1}^* \right\} \right\} \quad (27.221) \end{aligned}$$

Uma grandeza relevante no estudo de espalhamento é a seção de choque diferencial de espalhamento, definida por

$$\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega}}{\langle \vec{\mathcal{S}}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{k}}_i} \quad (27.222)$$

onde o denominador corresponde ao vetor de Poyting da onda incidente, já calculado em 27.204,

$$\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{k}_i = \frac{1}{Z_0}$$

Com o uso de 27.221, a seção de choque diferencial de espalhamento fica

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = 2\pi r^2 \Re \left\{ \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \right. \\ \times \left\{ C_{\ell, \pm 1}^e C_{\ell', \pm 1}^{e*} \frac{h_{\ell}^1(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r h_{\ell'}^{1*}(kr)] \vec{J}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{J}_{\ell', \pm 1}^* \right. \\ \mp C_{\ell', \pm 1}^{M*} C_{\ell, \pm 1}^e h_{\ell}^1(kr) h_{\ell'}^{1*}(kr) \vec{J}_{\ell, \pm 1} \cdot (\hat{r} \times \vec{J}_{\ell', \pm 1}^*) \\ \pm \frac{C_{\ell', \pm 1}^{e*} C_{\ell, \pm 1}^M}{k^2 r} \frac{d}{dr} [r h_{\ell'}^{1*}(kr)] [\nabla \times (h_{\ell}^1(kr) \vec{J}_{\ell, \pm 1})] \cdot \vec{J}_{\ell', \pm 1}^* \\ \left. \left. - C_{\ell, \pm 1}^M C_{\ell', \pm 1}^{M*} \frac{h_{\ell'}^{1*}(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r h_{\ell}^1(kr)] \vec{J}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{J}_{\ell', \pm 1}^* \right\} \right\} \right\} \quad (27.223) \end{aligned}$$

Interessa-nos agora a seção de choque total de espalhamento, que pode ser obtida integrando-se a seção de choque diferencial no ângulo sólido $d\Omega$, ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma_{esp} = 2\pi r^2 \Re \left\{ \int \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \right. \\ \times \left\{ C_{\ell, \pm 1}^e C_{\ell', \pm 1}^{e*} \frac{h_{\ell}^1(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r h_{\ell'}^{1*}(kr)] \vec{J}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{J}_{\ell', \pm 1}^* \right. \\ \mp C_{\ell', \pm 1}^{M*} C_{\ell, \pm 1}^e h_{\ell}^1(kr) h_{\ell'}^{1*}(kr) \vec{J}_{\ell, \pm 1} \cdot (\hat{r} \times \vec{J}_{\ell', \pm 1}^*) \\ \pm \frac{C_{\ell', \pm 1}^{e*} C_{\ell, \pm 1}^M}{k^2 r} \frac{d}{dr} [r h_{\ell'}^{1*}(kr)] [\nabla \times (h_{\ell}^1(kr) \vec{J}_{\ell, \pm 1})] \cdot \vec{J}_{\ell', \pm 1}^* \\ \left. \left. - C_{\ell, \pm 1}^M C_{\ell', \pm 1}^{M*} \frac{h_{\ell'}^{1*}(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r h_{\ell}^1(kr)] \vec{J}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{J}_{\ell', \pm 1}^* \right\} \right\} d\Omega \right\} \end{aligned}$$

ou, trocando a ordem da integral com a somatória,

$$\begin{aligned}
\sigma_{esp} = 2\pi r^2 \Re \left\{ \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \right. \\
\times \left\{ C_{\ell, \pm 1}^e C_{\ell', \pm 1}^{e*} \frac{h_\ell^1(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r h_{\ell'}^{1*}(kr)] \int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^* d\Omega \right. \\
\mp C_{\ell', \pm 1}^{M*} C_{\ell, \pm 1}^e h_\ell^1(kr) h_{\ell'}^{1*}(kr) \int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^*) d\Omega \\
\pm \frac{C_{\ell', \pm 1}^{e*} C_{\ell, \pm 1}^M}{k^2 r} \frac{d}{dr} [r h_{\ell'}^{1*}(kr)] \int [\nabla \times (h_\ell^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1})] \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^* d\Omega \\
\left. \left. - C_{\ell, \pm 1}^M C_{\ell', \pm 1}^{M*} \frac{h_{\ell'}^{1*}(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r h_\ell^1(kr)] \int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, \pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', \pm 1}^* d\Omega \right\} \right\} \quad (27.224)
\end{aligned}$$

Precisamos determinar uma relação para simplificar essa equação. Considere a equação 27.173, e vamos efetuar o produto escalar dela com $\vec{\mathfrak{J}}_{\ell', m'}^*$, e integrar em Ω , ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, m}] d\Omega = \int \frac{i\sqrt{\ell(\ell+1)} Y_{\ell, m} \Upsilon_\ell}{r} \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega \\
+ \int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, m}}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) d\Omega
\end{aligned}$$

Com o uso de 27.187,

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, m}] d\Omega = 0$$

vemos que o lado esquerdo da equação se anula. Além disso, como $\vec{\mathfrak{J}}_{\ell', m'}$ não tem parte radial, a primeira integral do lado direito também se anula. O resultado é que

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', m'}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, m}) d\Omega = 0 \quad (27.225)$$

Com o uso das equações 27.187 e 27.225 e também da relação de ortogonalidade 25.129,

$$\int \vec{\mathfrak{J}}_{\ell', m'}^* \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{\ell, m} d\Omega = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$$

a seção de choque total 27.224 simplifica-se para

$$\sigma_{esp} = 2\pi r^2 \Re \left\{ \sum_{\ell, \ell'} \left\{ (-1)^{\ell'} i^{\ell+\ell'+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \right. \right. \\ \times \left\{ C_{\ell, \pm 1}^e C_{\ell', \pm 1}^{e*} \frac{\mathfrak{h}_\ell^1(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)] \delta_{\ell, \ell'} \right. \\ \left. \left. - C_{\ell, \pm 1}^M C_{\ell', \pm 1}^{M*} \frac{\mathfrak{h}_{\ell'}^{1*}(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] \delta_{\ell, \ell'} \right\} \right\} \right\}$$

ou, efetuando a soma em ℓ' ,

$$\sigma_{esp} = \frac{2\pi r}{k} \Re \left\{ \sum_{\ell} \left\{ (-1)^{\ell} i^{2\ell+1} (2\ell+1) \right. \right. \\ \times \left\{ |C_{\ell, \pm 1}^e|^2 \mathfrak{h}_\ell^1(kr) \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr)] - |C_{\ell, \pm 1}^M|^2 \mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr) \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] \right\} \right\} \right\} \quad (27.226)$$

Agora, usamos a forma assintótica da função de Hankel esférica dada pela equação 25.231,

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) \approx (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ix}}{x}, \quad x \gg 1$$

para reescrever os dois termos que envolvem essas funções. Primeiro, calculamos

$$\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr)] = (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \frac{d}{dr} \left[r i^{\ell+1} \frac{e^{-ikr}}{kr} \right]$$

ou

$$\mathfrak{h}_\ell^1(kr) \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr)] = \frac{e^{ikr}}{k^2 r} (-ik) e^{-ikr} = -\frac{i}{kr} \quad (27.227)$$

Em seguida, achamos

$$\mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr) \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] = i^{\ell+1} \frac{e^{-ikr}}{kr} \frac{d}{dr} \left[r (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \right]$$

ou

$$\mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr) \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^1(kr)] = \frac{e^{-ikr}}{k^2 r} (ik) e^{ikr} = \frac{i}{kr} \quad (27.228)$$

Utilizando 27.227 e 27.228 em 27.226, obtemos

$$\sigma_{esp} = \frac{2\pi r}{k} \Re \left\{ \sum_{\ell} \left\{ (-1)^{\ell} i^{2\ell+1} (2\ell+1) \times \left\{ -\frac{i}{kr} |C_{\ell,\pm 1}^e|^2 - \frac{i}{kr} |C_{\ell,\pm 1}^M|^2 \right\} \right\} \right\}$$

ou, efetuando algumas simplificações,

$$\sigma_{esp} = \frac{2\pi}{k^2} \Re \left\{ \sum_{\ell} (2\ell+1) [|C_{\ell,\pm 1}^e|^2 + |C_{\ell,\pm 1}^M|^2] \right\}$$

ou, finalmente,

$$\sigma_{esp} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) [|C_{\ell,\pm 1}^e|^2 + |C_{\ell,\pm 1}^M|^2] \quad (27.229)$$

que fornece a seção de choque total de espalhamento quando uma onda plana incide numa esfera. Note que até aqui não fizemos nenhuma restrição sobre as propriedades específicas da esfera, sendo essa seção de choque completamente geral até aqui.

Retornando ao problema inicial, temos que os campos totais são obtidos somando-se os campos incidentes e os espalhados, ou seja,

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_i + \vec{\mathcal{E}}_f \quad (27.230)$$

e

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_i + \vec{\mathcal{H}}_f \quad (27.231)$$

Sendo a esfera perfeitamente condutora, o campo elétrico dentro dela é nulo, e a condição de contorno para o campo elétrico tangencial à superfície da esfera informa que

$$[\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}]_{r=D} = 0 \quad (27.232)$$

Note que o versor normal à esfera corresponde ao versor $\hat{\mathbf{r}}$. Calculemos agora, usando as equações 27.206 e 27.208, o campo elétrico total fora da esfera, dado por

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = & \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times (j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}) \right] \\ & + \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[C_{\ell,\pm 1}^e h_{\ell}^1(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{C_{\ell,\pm 1}^M}{k} \nabla \times (h_{\ell}^1(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}) \right] \end{aligned} \quad (27.233)$$

Precisamos aplicar a condição de contorno 27.232, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ \hat{\mathbf{r}} \times \left[\sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{1}{k} \nabla \times (j_{\ell}(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[C_{\ell,\pm 1}^e h_{\ell}^1(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{C_{\ell,\pm 1}^M}{k} \nabla \times (h_{\ell}^1(kr) \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1}) \right] \right] \right\}_{r=D} \end{aligned}$$

Note que os termos que envolvem o rotacional foram calculados em 27.173, e eles têm uma parte radial, que se anula ao efetuar o produto vetorial com $\hat{\mathbf{r}}$, e uma parte angular, que sobrevive. Assim, podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left[j_{\ell}(kr) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{1}{k} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1})}{r} \frac{d}{dr} [r j_{\ell}(kr)] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C_{\ell,\pm 1}^e h_{\ell}^1(kr) \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \frac{C_{\ell,\pm 1}^M}{k} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1})}{r} \frac{d}{dr} [r h_{\ell}^1(kr)] \right] \right\}_{r=D} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left\{ [j_{\ell}(kr) + C_{\ell,\pm 1}^e h_{\ell}^1(kr)] \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \pm \left[\frac{d}{dr} [r j_{\ell}(kr)] + C_{\ell,\pm 1}^M \frac{d}{dr} [r h_{\ell}^1(kr)] \right] \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathcal{J}}_{\ell,\pm 1})}{kr} \right\} \right\}_{r=D} = 0 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} \left\{ [j_{\ell}(kD) + C_{\ell,\pm 1}^e h_{\ell}^1(kD)] \hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,\pm 1} \pm \left[\frac{d}{dr} [r j_{\ell}(kr)] + C_{\ell,\pm 1}^M \frac{d}{dr} [r h_{\ell}^1(kr)] \right]_{r=D} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{\ell,\pm 1})}{kr} \right\} = 0 \quad (27.234)$$

Agora, temos que, para que a somatória se anule, lembrando que os $\vec{\mathbf{J}}_{\ell,m}$ são ortogonais e que os produtos vetoriais também são para cada valor de ℓ , deve ocorrer

$$j_{\ell}(kD) + C_{\ell,\pm 1}^e h_{\ell}^1(kD) = 0$$

e

$$\left[\frac{d}{dr} [r j_{\ell}(kr)] + C_{\ell,\pm 1}^M \frac{d}{dr} [r h_{\ell}^1(kr)] \right]_{r=D} = 0$$

de modo que achamos os coeficientes como sendo

$$C_{\ell,\pm 1}^e = - \frac{j_{\ell}(kD)}{h_{\ell}^1(kD)} \quad (27.235)$$

e também

$$C_{\ell,\pm 1}^M = - \left\{ \frac{\frac{d}{dr} [r j_{\ell}(kr)]}{\frac{d}{dr} [r h_{\ell}^1(kr)]} \right\}_{r=D} \quad (27.236)$$

Podemos reescrever essas expressões de uma outra forma, definindo ângulos chamados de *ângulos de fase de espalhamento*, por intermédio de

$$\text{tg } \delta_{\ell} = \frac{j_{\ell}(kD)}{n_{\ell}(kD)} \quad \text{tg } \delta'_{\ell} = \left\{ \frac{\frac{d}{dr} [r j_{\ell}(kr)]}{\frac{d}{dr} [r n_{\ell}(kr)]} \right\}_{r=D} \quad (27.237)$$

Note que, considerando δ_{ℓ} , temos que, como a tangente é dada pelo cateto oposto dividido pelo adjacente, o cateto oposto vale $j_{\ell}(kD)$ enquanto o cateto adjacente é $n_{\ell}(kD)$. Então,

$$\text{sen } \delta_{\ell} = \frac{j_{\ell}(kD)}{\sqrt{j_{\ell}^2(kD) + n_{\ell}^2(kD)}} \quad (27.238)$$

e

$$\cos \delta_l = \frac{n_\ell(kD)}{\sqrt{j_\ell^2(kD) + n_\ell^2(kD)}} \quad (27.239)$$

Com isso, podemos escrever

$$j_\ell(kD) = \sin \delta_l \sqrt{j_\ell^2(kD) + n_\ell^2(kD)} \quad (27.240)$$

e

$$n_\ell(kD) = \cos \delta_l \sqrt{j_\ell^2(kD) + n_\ell^2(kD)} \quad (27.241)$$

Agora, combinamos as equações 27.240 e 27.241 na forma

$$j_\ell(kD) + in_\ell(kD) = \sin \delta_l \sqrt{j_\ell^2(kD) + n_\ell^2(kD)} + i \cos \delta_l \sqrt{j_\ell^2(kD) + n_\ell^2(kD)}$$

ou, como $h_\ell^1(kr) = j_\ell(kr) + in_\ell(kr)$,

$$h_\ell^1(kD) = (\sin \delta_l + i \cos \delta_l) \sqrt{j_\ell^2(kD) + n_\ell^2(kD)} \quad (27.242)$$

Vamos dividir agora a equação 27.240 pela 27.242, ou seja,

$$\frac{j_\ell(kD)}{h_\ell^1(kD)} = \frac{\sin \delta_l \sqrt{j_\ell^2(kD) + n_\ell^2(kD)}}{(\sin \delta_l + i \cos \delta_l) \sqrt{j_\ell^2(kD) + n_\ell^2(kD)}}$$

ou

$$\frac{j_\ell(kD)}{h_\ell^1(kD)} = \frac{\sin \delta_l}{\sin \delta_l + i \cos \delta_l} \quad (27.243)$$

Agora, podemos escrever

$$\sin \delta_l + i \cos \delta_l = \frac{e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}}{2i} + i \frac{e^{i\delta_l} + e^{-i\delta_l}}{2}$$

ou

$$\sin \delta_l + i \cos \delta_l = \frac{e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l} - e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}}{2i}$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen} \delta_l + i \cos \delta_l = i e^{-i\delta_l} \quad (27.244)$$

Utilizando 27.244 em 27.243, obtemos

$$\frac{j_\ell(kD)}{h_\ell^1(kD)} = \frac{\operatorname{sen} \delta_l}{i e^{-i\delta_l}}$$

ou

$$\frac{j_\ell(kD)}{h_\ell^1(kD)} = -i e^{i\delta_l} \operatorname{sen} \delta_l \quad (27.245)$$

Procedendo de modo equivalente para δ'_l , o que fica como exercício para o leitor (veja o exercício 27.5), achamos

$$\left\{ \frac{\frac{d}{dr}[r j_\ell(kr)]}{\frac{d}{dr}[r h_\ell^1(kr)]} \right\}_{r=D} = -i e^{i\delta'_l} \operatorname{sen} \delta'_l \quad (27.246)$$

Portanto, as equações 27.235 e 27.236 podem ser escritas como

$$C_{\ell,\pm 1}^e = i e^{i\delta_l} \operatorname{sen} \delta_l \quad (27.247)$$

e

$$C_{\ell,\pm 1}^M = i e^{i\delta'_l} \operatorname{sen} \delta'_l \quad (27.248)$$

Podemos também estudar o comportamento dos coeficientes em alguns limites importantes. Quando o comprimento de onda é grande em comparação com o raio D da esfera, temos a condição $kD \ll 1$. Nesse caso, podemos usar as expansões

$$j_\ell(x) \approx \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \cdots \right), \quad x \ll 1 \quad (27.249)$$

e

$$n_\ell(x) \approx -\frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}} \left(1 - \frac{x^2}{2(1-2\ell)} + \cdots \right), \quad x \ll 1 \quad (27.250)$$

para obter aproximações para os coeficientes dados por 27.235 e 27.236. Precisamos inicialmente obter uma expansão para a função $h_\ell^1(x)$, isto é,

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) = \mathfrak{j}_\ell(x) + i\mathfrak{n}_\ell(x)$$

ou, usando 27.249 e 27.250,

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) \approx \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \cdots \right) - i \frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}} \left(1 - \frac{x^2}{2(1-2\ell)} + \cdots \right), \quad x \ll 1$$

Vamos escrever os primeiros termos dessa expansão, ou seja,

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) \approx \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} - \frac{x^{\ell+2}}{2(2\ell+3)!!} - i \frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}} - i \frac{(2\ell-3)!!x^2}{2x^{\ell+1}} + \cdots, \quad x \ll 1$$

Vamos reescrever esta expressão como

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) \approx \frac{1}{2(2\ell+3)!!x^{\ell+1}} [2(2\ell+3)x^{2\ell+1} - x^{2\ell+3} - 2i(2\ell-1)!!(2\ell+3)!! - 2i(2\ell+3)!!(2\ell-3)!!x^2] + \cdots, \quad x \ll 1$$

ou como

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) \approx -\frac{i(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}} \left[1 - \frac{x^2}{2\ell-1} + \frac{ix^{2\ell+1}}{(2\ell-1)!!(2\ell+1)!!} - \frac{ix^{2\ell+3}}{2(2\ell-1)!!(2\ell+3)!!} \right] + \cdots, \quad x \ll 1 \quad (27.251)$$

Agora, vamos calcular, usando as séries 27.249 e 27.251, a razão

$$\frac{\mathfrak{j}_\ell(x)}{\mathfrak{h}_\ell^1(x)} = \frac{\frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \cdots \right)}{-\frac{i(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}}} \left[1 - \frac{x^2}{2\ell-1} + \frac{ix^{2\ell+1}}{(2\ell-1)!!(2\ell+1)!!} - \frac{ix^{2\ell+3}}{2(2\ell-1)!!(2\ell+3)!!} \right]^{-1} + \cdots$$

ou então, utilizado uma série de Taylor para o termo entre colchetes,

$$\frac{j_\ell(x)}{h_\ell^1(x)} = \frac{ix^{2\ell+1}}{(2\ell+1)[(2\ell-1)!!]^2} \left(1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \cdots\right) \left[1 + \frac{x^2}{2\ell-1} - \frac{ix^{2\ell+1}}{(2\ell-1)!!(2\ell+1)!!} + \frac{ix^{2\ell+3}}{2(2\ell-1)!!(2\ell+3)!!}\right] + \cdots$$

ou, finalmente,

$$\frac{j_\ell(x)}{h_\ell^1(x)} = \frac{ix^{2\ell+1}}{(2\ell+1)[(2\ell-1)!!]^2} \left(1 + \frac{x^2}{2\ell-1} + \cdots\right), \quad x \ll 1 \quad (27.252)$$

Note que os termos acima caem rapidamente com x e com ℓ , de modo que o termo relevante ocorre para $\ell = 1$, ou seja,

$$\frac{j_1(x)}{h_1^1(x)} = \frac{ix^3}{3} \quad (27.253)$$

Com o uso de 27.252, podemos calcular o coeficiente dado por 27.235, ou seja,

$$C_{\ell,\pm 1}^e = -\frac{i(kD)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)[(2\ell-1)!!]^2} \left(1 + \frac{(kD)^2}{2\ell-1} + \cdots\right), \quad kD \ll 1 \quad (27.254)$$

sendo que o coeficiente mais importante é, usando 27.253,

$$C_{1,\pm 1}^e = -\frac{i(kD)^3}{3}, \quad kD \ll 1 \quad (27.255)$$

Para determinar os coeficientes $C_{\ell,\pm 1}^M$, dados por 27.236, vamos precisar de

$$xj_\ell(x) \approx \frac{x^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \cdots\right), \quad x \ll 1 \quad (27.256)$$

e de

$$xh_\ell^1(x) \approx -\frac{i(2\ell-1)!!}{x^\ell} \left[1 - \frac{x^2}{2\ell-1} + \frac{ix^{2\ell+1}}{(2\ell-1)!!(2\ell+1)!!} - \frac{ix^{2\ell+3}}{2(2\ell-1)!!(2\ell+3)!!}\right] + \cdots, \quad x \ll 1 \quad (27.257)$$

onde usamos as séries 27.249 e 27.251. Derivando 27.256, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[xj_\ell(x)] \approx \frac{(\ell+1)x^\ell}{(2\ell+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \cdots \right) \\ - \frac{x^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!} \left(\frac{x}{2\ell+3} + \cdots \right), \quad x \ll 1 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d}{dx}[xj_\ell(x)] \approx \frac{(\ell+1)x^\ell}{(2\ell+1)!!} \left[1 - \frac{(\ell+3)x^2}{2(2\ell+3)(\ell+1)} + \cdots \right], \quad x \ll 1 \quad (27.258)$$

Derivando agora 27.257, achamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[xh_\ell^1(x)] \approx \frac{i\ell(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}} \left[1 - \frac{x^2}{2\ell-1} + \frac{ix^{2\ell+1}}{(2\ell-1)!!(2\ell+1)!!} \right. \\ \left. - \frac{ix^{2\ell+3}}{2(2\ell-1)!!(2\ell+3)!!} \right] - \frac{i(2\ell-1)!!}{x^\ell} \left[-\frac{2x}{2\ell-1} + \frac{i(2\ell+1)x^{2\ell}}{(2\ell-1)!!(2\ell+1)!!} \right. \\ \left. - \frac{i(2\ell+3)x^{2\ell+2}}{2(2\ell-1)!!(2\ell+3)!!} \right] + \cdots, \quad x \ll 1 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d}{dx}[xh_\ell^1(x)] \approx \frac{i\ell(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}} \left[1 - \frac{(\ell+2)x^2}{\ell(2\ell-1)} + \cdots \right], \quad x \ll 1 \quad (27.259)$$

Agora, usando 27.258 e 27.259, calculamos a razão

$$\frac{\frac{d}{dx}[xj_\ell(x)]}{\frac{d}{dx}[xh_\ell^1(x)]} \approx \frac{\frac{(\ell+1)x^\ell}{(2\ell+1)!!} \left[1 - \frac{(\ell+3)x^2}{2(2\ell+3)(\ell+1)} + \cdots \right]}{\frac{i\ell(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}} \left[1 - \frac{(\ell+2)x^2}{\ell(2\ell-1)} + \cdots \right]}, \quad x \ll 1$$

ou, já usando uma série de Taylor para o termo entre colchetes no denominador,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dx}[xj_\ell(x)]}{\frac{d}{dx}[xh_\ell^1(x)]} \approx -\frac{i(\ell+1)x^{2\ell+1}}{\ell[(2\ell-1)!!]^2(2\ell+1)} \left[1 \right. \\ \left. - \frac{(\ell+3)x^2}{2(2\ell+3)(\ell+1)} + \cdots \right] \left[1 + \frac{(\ell+2)x^2}{\ell(2\ell-1)} + \cdots \right], \quad x \ll 1 \end{aligned}$$

ou ainda, efetuando algumas simplificações,

$$\frac{\frac{d}{dx}[xj_\ell(x)]}{\frac{d}{dx}[xh_\ell^1(x)]} \approx -\frac{i(\ell+1)x^{2\ell+1}}{\ell[(2\ell-1)!!]^2(2\ell+1)} \times \left[1 + \frac{6x^2}{2\ell(2\ell+3)(\ell+1)(2\ell-1)} + \cdots\right], \quad x \ll 1 \quad (27.260)$$

Novamente o termo relevante é o primeiro, para $\ell = 1$, ou seja,

$$\frac{\frac{d}{dx}[xj_1(x)]}{\frac{d}{dx}[xh_1^1(x)]} \approx -\frac{2ix^3}{3} \quad (27.261)$$

Agora, note que, fazendo $x = kr$, temos

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{1}{k} \frac{d}{dr}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dr} = k \frac{d}{dx}$$

Com o uso de 27.260 e da relação acima, os coeficientes dados por 27.236 tornam-se

$$C_{\ell,\pm 1}^M = \left\{ \frac{i(\ell+1)x^{2\ell+1}}{\ell[(2\ell-1)!!]^2(2\ell+1)} \times \left[1 + \frac{6x^2}{2\ell(2\ell+3)(\ell+1)(2\ell-1)} + \cdots\right] \right\}_{r=D}, \quad x \ll 1$$

ou

$$C_{\ell,\pm 1}^M = \frac{i(\ell+1)(kD)^{2\ell+1}}{\ell[(2\ell-1)!!]^2(2\ell+1)} \times \left[1 + \frac{6(kD)^2}{2\ell(2\ell+3)(\ell+1)(2\ell-1)} + \cdots\right], \quad x \ll 1 \quad (27.262)$$

sendo que o termo mais relevante ($\ell = 1$) é dado por

$$C_{\ell,\pm 1}^M = \frac{2i(kD)^3}{3}, \quad kD \ll 1 \quad (27.263)$$

Utilizando as expressões 27.255 e 27.263, a seção de choque total de espalhamento, dada por 27.229, torna-se, considerando apenas o termo principal, com $\ell = 1$,

$$\sigma_{esp} = \frac{2\pi}{k^2} 3 \left[\frac{(kD)^6}{9} + \frac{4(kD)^6}{9} \right]$$

ou

$$\sigma_{esp} = \frac{10\pi k^4 D^6}{3} \quad (27.264)$$

ou, em termos da frequência da onda, dada por $\omega = ck$,

$$\sigma_{esp} = \frac{10\pi\omega^4 D^6}{3c^4} \quad (27.265)$$

Note que a seção de choque cresce muito rápido com o aumento da frequência, ou com a diminuição do comprimento de onda. A seção de choque diferencial, dada por 27.223, pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = 2\pi r^2 \Re \left\{ 3i \left\{ \frac{(kD)^6}{9} \frac{\mathfrak{h}_1^1(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_1^{1*}(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \right. \right. \\ \mp \frac{-2i(kD)^3}{3} \frac{-i(kD)^3}{3} \mathfrak{h}_1^1(kr) \mathfrak{h}_1^{1*}(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^*) \\ \pm \frac{i(kD)^3}{3} \frac{2i(kD)^3}{3} \frac{1}{k^2 r} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_1^{1*}(kr)] [\nabla \times (\mathfrak{h}_1^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1})] \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \\ \left. \left. - \frac{4(kD)^6}{9} \frac{\mathfrak{h}_1^{1*}(kr)}{kr} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_1^1(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \right\} \right\} \quad (27.266) \end{aligned}$$

Agora, usando 27.227, temos

$$\mathfrak{h}_1^1(kr) \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_1^{1*}(kr)] = -\frac{i}{kr} \quad (27.267)$$

Considerando a equação 27.228, achamos

$$\mathfrak{h}_1^{1*}(kr) \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_1^1(kr)] = \frac{i}{kr} \quad (27.268)$$

Levando em conta a expansão 25.231, obtemos

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) \mathfrak{h}_\ell^{1*}(x) = (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ix}}{x} i^{\ell+1} \frac{e^{-ix}}{x} = \frac{1}{x^2} \quad (27.269)$$

Portanto,

$$\mathfrak{h}_1^1(kr) \mathfrak{h}_1^{1*}(kr) = \frac{1}{k^2 r^2} \quad (27.270)$$

Vamos relembrar a equação 27.173,

$$\nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] = \frac{i\sqrt{\ell(\ell+1)} Y_{\ell,m} \Upsilon_\ell}{r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell)$$

Como $\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}$ não tem parte radial, ao fazer o produto escalar com essa função, resta apenas o segundo termo do lado direito, ou seja,

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot \nabla \times [\Upsilon_\ell(r) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Upsilon_\ell) \vec{\mathfrak{J}}_{\ell',m'}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m})$$

Se $\ell = \ell' = 1$, $m = m' = \pm 1$ e $\Upsilon_\ell(r) = \mathfrak{h}_\ell^1(kr)$, achamos

$$\vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \cdot \nabla \times [\mathfrak{h}_1^1(kr) \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \mathfrak{h}_1^1) \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}) \quad (27.271)$$

Utilizando as equações 27.267, 27.268, 27.270 e 27.271, a expressão 27.266 torna-se

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = 2\pi r^2 \Re \left\{ i \left\{ \frac{(kD)^6}{3} \frac{1}{kr} \left(-\frac{i}{kr} \right) \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \right. \right. \\ \left. \pm \frac{2(kD)^6}{3} \frac{1}{k^2 r^2} \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^*) \right. \\ \left. \mp \frac{2(kD)^6}{3} \frac{1}{k^2 r^2} \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_1^{1*}(kr)] \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_1^1(kr)] \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}) \right. \\ \left. \left. - \frac{4(kD)^6}{3} \frac{1}{kr} \frac{i}{kr} \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \right\} \right\} \quad (27.272) \end{aligned}$$

Precisamos agora de

$$\frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr)] \frac{d}{dr} [r \mathfrak{h}_{\ell'}^1(kr)] = \frac{d}{dr} \left[r (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr} \right] \frac{d}{dr} \left[r i^{\ell'+1} \frac{e^{-ikr}}{kr} \right]$$

ou

$$\frac{d}{dr}[r\mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr)]\frac{d}{dr}[r\mathfrak{h}_{\ell'}^1(kr)] = \frac{(-i)^{\ell+1}}{k}(ik)e^{ikr}\frac{i^{\ell'+1}}{k}(-ik)e^{-ikr}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dr}[r\mathfrak{h}_\ell^{1*}(kr)]\frac{d}{dr}[r\mathfrak{h}_{\ell'}^1(kr)] = (-1)^\ell i^{\ell+\ell'} \quad (27.273)$$

Então,

$$\frac{d}{dr}[r\mathfrak{h}_1^{1*}(kr)]\frac{d}{dr}[r\mathfrak{h}_1^1(kr)] = 1 \quad (27.274)$$

Com isso, a equação 27.272 fica

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{2\pi k^4 D^6}{3} \Re \left\{ \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \pm 2i \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^*) \right. \\ \left. \mp 2i \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}) + 4 \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{2\pi k^4 D^6}{3} \Re \left\{ 5 \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \pm 2i \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^*) \right. \\ \left. \mp 2i \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathfrak{J}}_{1,\pm 1}) \right\} \quad (27.275) \end{aligned}$$

Agora, vamos precisar da equação 25.271 para $\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}$,

$$\vec{\mathfrak{J}}_{\ell,m}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \phi} \right]$$

Quando $\ell = 1$ e $m = 1$, temos

$$\vec{\mathfrak{J}}_{1,1}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{1,1}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{1,1}}{\partial \phi} \right]$$

Da tabela 6.4, temos que

$$Y_{1,1}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

Portanto,

$$\vec{\mathfrak{I}}_{1,1}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[\hat{\phi} \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos \theta e^{i\phi} \right) - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \left(-i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \right) \right]$$

ou

$$\vec{\mathfrak{I}}_{1,1}(\theta, \phi) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} - i \hat{\theta}] e^{i\phi} \quad (27.276)$$

Tomando o complexo conjugado, temos

$$\vec{\mathfrak{I}}_{1,1}^*(\theta, \phi) = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} + i \hat{\theta}] e^{-i\phi} \quad (27.277)$$

Precisamos também de

$$\vec{\mathfrak{I}}_{1,-1}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[\hat{\phi} \frac{\partial Y_{1,-1}}{\partial \theta} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{1,-1}}{\partial \phi} \right]$$

Olhando novamente a tabela 6.4, vemos que

$$Y_{1,-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$$

de modo que

$$\vec{\mathfrak{I}}_{1,-1}(\theta, \phi) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[\hat{\phi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos \theta e^{-i\phi} - \frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} (-i) \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \right]$$

ou

$$\vec{\mathfrak{I}}_{1,-1}(\theta, \phi) = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} + i \hat{\theta}] e^{-i\phi} \quad (27.278)$$

Considerando o complexo conjugado, temos

$$\vec{\mathfrak{I}}_{1,-1}^*(\theta, \phi) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} - i \hat{\theta}] e^{i\phi} \quad (27.279)$$

Portanto, sumarizando,

$$\vec{\mathfrak{I}}_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \pm \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} \mp i \hat{\theta}] e^{\pm i\phi} \quad (27.280)$$

e

$$\vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}^*(\theta, \phi) = \mp \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} \pm i \hat{\theta}] e^{\mp i\phi} \quad (27.281)$$

Precisamos calcular agora, usando 27.280 e 27.281,

$$\vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}^* = \left\{ \pm \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} \mp i \hat{\theta}] e^{\pm i\phi} \right\} \cdot \left\{ \mp \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} \pm i \hat{\theta}] e^{\mp i\phi} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}^* = \frac{1}{16} \frac{3}{\pi} [\cos \theta \hat{\phi} \mp i \hat{\theta}] \cdot [\cos \theta \hat{\phi} \pm i \hat{\theta}]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}^* = \frac{3}{16\pi} (\cos^2 \theta + 1) \quad (27.282)$$

Precisamos também de, empregando 27.280,

$$\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1} = \hat{\mathbf{r}} \times \left\{ \pm \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} \mp i \hat{\theta}] e^{\pm i\phi} \right\}$$

ou

$$\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1} = \mp \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\theta} \pm i \hat{\phi}] e^{\pm i\phi} \quad (27.283)$$

Fazendo o produto escalar entre 27.281 e 27.283, temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}) &= \\ &\left\{ \mp \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\phi} \pm i \hat{\theta}] e^{\mp i\phi} \right\} \cdot \left\{ \mp \frac{i}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} [\cos \theta \hat{\theta} \pm i \hat{\phi}] e^{\pm i\phi} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}) = -\frac{3}{16\pi} [\cos \theta \hat{\phi} \pm i \hat{\theta}] \cdot [\cos \theta \hat{\theta} \pm i \hat{\phi}]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}^* \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{J}}_{1,\pm 1}) = \mp \frac{3i}{8\pi} \cos \theta \quad (27.284)$$

Tomando o complexo conjugado, temos

$$\vec{J}_{1,\pm 1} \cdot (\hat{r} \times \vec{J}_{1,\pm 1}^*) = \pm \frac{3i}{8\pi} \cos \theta \quad (27.285)$$

Agora, usando 27.282, 27.284 e 27.285 em 27.275, achamos

$$\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{2\pi k^4 D^6}{3} \Re \left\{ 5 \frac{3}{16\pi} (\cos^2 \theta + 1) \pm 2i \left[\pm \frac{3i}{8\pi} \cos \theta \right] \mp 2i \left[\mp \frac{3i}{8\pi} \cos \theta \right] \right\}$$

ou

$$\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{k^4 D^6}{12} \Re \left\{ \frac{15}{2} (\cos^2 \theta + 1) - 12 \cos \theta \right\}$$

ou ainda,

$$\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = k^4 D^6 \left\{ \frac{5}{8} (\cos^2 \theta + 1) - \cos \theta \right\} \quad (27.286)$$

que é a seção de choque diferencial de espalhamento para o caso em que $kD \ll 1$. Essa seção de choque pode ser vista na figura 27.24.

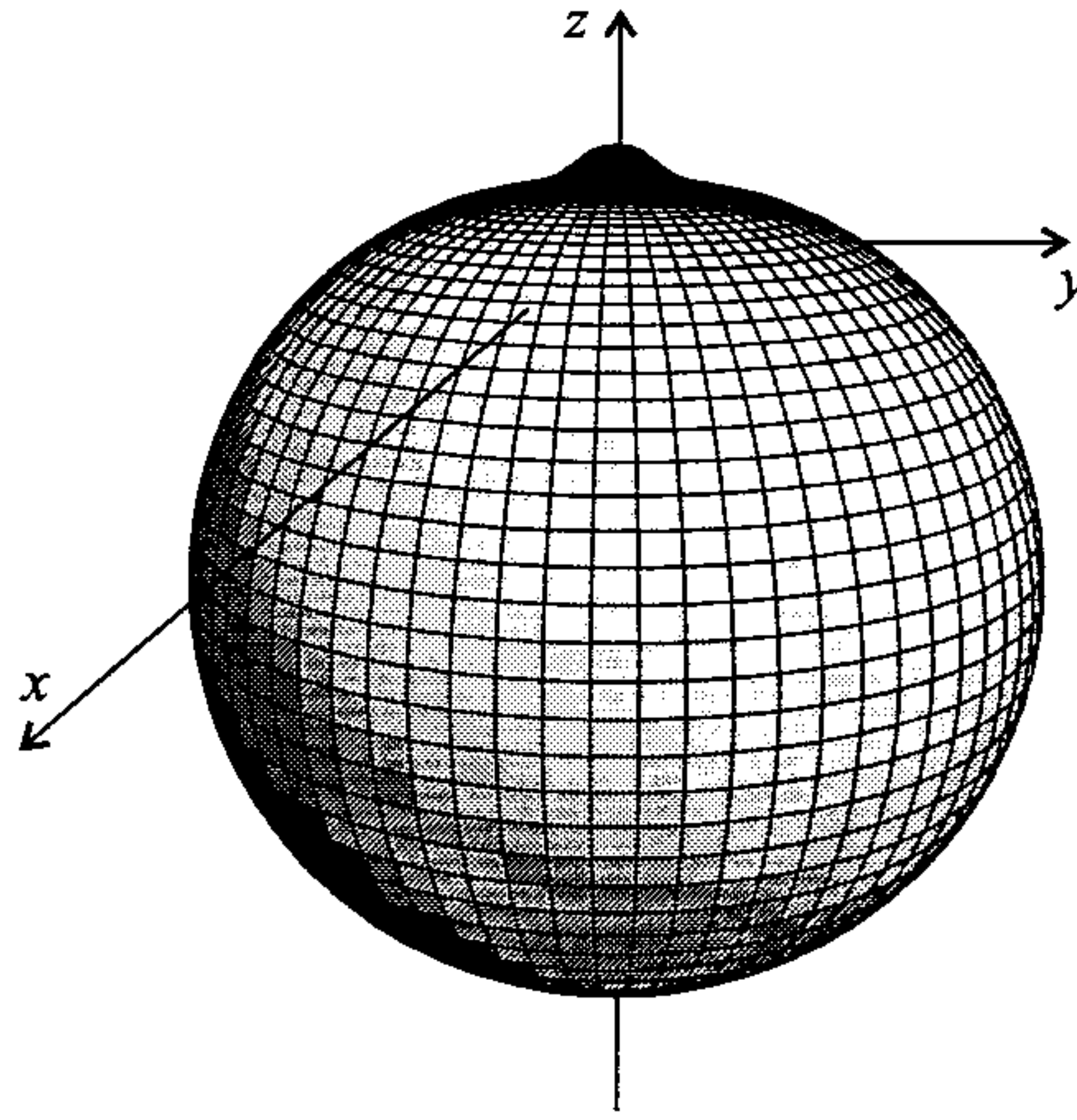


Figura 27.24: Seção de choque diferencial para espalhamento por uma esfera perfeitamente condutora no limite de comprimentos de onda grandes em comparação com o raio da esfera.

Note que a origem dos eixos não está no centro da esfera, mas sim na região próxima à protuberância na parte superior. A seção de choque diferencial

aumenta bastante para ângulos θ próximos de π , ou seja, na região de retroespalhamento, lembrando que a esfera perfeitamente condutora (o objeto espalhador) está centrada na origem e a radiação está incidindo na direção z (de baixo para cima).

Outro limite importante ocorre quando o comprimento de onda é pequeno em comparação com o tamanho da esfera, ou seja, $kD \gg 1$. Nesse caso, as formas assintóticas importantes são

$$j_\ell(x) \approx \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right), \quad x \gg \ell \quad (27.287)$$

e

$$n_\ell(x) \approx -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\ell\pi}{2}\right), \quad x \gg \ell \quad (27.288)$$

juntamente com a equação 25.231,

$$h_\ell^1(x) \approx (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ix}}{x}, \quad x \gg 1$$

Primeiro, vamos reescrever 27.287 como

$$j_\ell(x) \approx \frac{1}{x} \left[\frac{e^{i(x-\frac{\ell\pi}{2})} - e^{-i(x-\frac{\ell\pi}{2})}}{2i} \right], \quad x \gg \ell$$

ou

$$j_\ell(x) \approx \frac{e^{ix} e^{-i\frac{\ell\pi}{2}} - e^{-ix} e^{i\frac{\ell\pi}{2}}}{2ix}, \quad x \gg \ell$$

Lembrando que ℓ é inteiro, temos

$$j_\ell(x) \approx \frac{(-i)^\ell e^{ix} - i^\ell e^{-ix}}{2ix}, \quad x \gg \ell$$

ou

$$j_\ell(x) \approx i^{\ell+1} \frac{e^{-ix} - (-1)^\ell e^{ix}}{2x}, \quad x \gg \ell \quad (27.289)$$

Reunindo agora 27.289 e 25.231, obtemos

$$\frac{j_\ell(x)}{h_\ell^1(x)} \approx \frac{i^{\ell+1} \frac{e^{-ix} - (-1)^\ell e^{ix}}{2x}}{(-i)^{\ell+1} \frac{e^{ix}}{x}}, \quad x \gg \ell$$

ou

$$\frac{j_\ell(x)}{h_\ell^1(x)} \approx (-1)^{\ell+1} e^{-ix} \frac{e^{-ix} - (-1)^\ell e^{ix}}{2}, \quad x \gg \ell$$

ou ainda,

$$\frac{j_\ell(x)}{h_\ell^1(x)} \approx \frac{1 - (-1)^\ell e^{-2ix}}{2}, \quad x \gg \ell \quad (27.290)$$

Portanto, a equação 27.235 fica

$$C_{\ell, \pm 1}^e \approx \frac{(-1)^\ell e^{-2ikD} - 1}{2}, \quad x \gg \ell \quad (27.291)$$

Para obter os outros coeficientes, precisamos inicialmente de

$$x j_\ell(x) \approx i^{\ell+1} \frac{e^{-ix} - (-1)^\ell e^{ix}}{2}, \quad x \gg \ell$$

onde usamos a equação 27.289, de modo que

$$\frac{d}{dx} [x j_\ell(x)] \approx i^\ell \frac{e^{-ix} + (-1)^\ell e^{ix}}{2}, \quad x \gg \ell \quad (27.292)$$

Além disso, usando a equação 25.231, temos

$$x h_\ell^1(x) \approx (-i)^{\ell+1} e^{ix}, \quad x \gg 1$$

e assim,

$$\frac{d}{dx} [x h_\ell^1(x)] \approx (-i)^\ell e^{ix}, \quad x \gg 1 \quad (27.293)$$

Calculando a razão entre 27.292 e 27.293, achamos

$$\frac{\frac{d}{dx} [x j_\ell(x)]}{\frac{d}{dx} [x h_\ell^1(x)]} \approx \frac{i^\ell \frac{e^{-ix} + (-1)^\ell e^{ix}}{2}}{(-i)^\ell e^{ix}}, \quad x \gg \ell$$

ou

$$\frac{\frac{d}{dx}[xj_\ell(x)]}{\frac{d}{dx}[xh_\ell^1(x)]} \approx (-1)^\ell e^{-ix} \frac{e^{-ix} + (-1)^\ell e^{ix}}{2}, \quad x \gg \ell$$

ou ainda,

$$\frac{\frac{d}{dx}[xj_\ell(x)]}{\frac{d}{dx}[xh_\ell^1(x)]} \approx \frac{1 + (-1)^\ell e^{-2ix}}{2}, \quad x \gg \ell$$

Portanto, os coeficientes $C_{\ell,\pm 1}^M$ ficam

$$C_{\ell,\pm 1}^M = - \left\{ \frac{1 + (-1)^\ell e^{-2ix}}{2} \right\}_{x=kD}, \quad x \gg \ell$$

ou

$$C_{\ell,\pm 1}^M = - \frac{(-1)^\ell e^{-2ikD} + 1}{2}, \quad kD \gg \ell \quad (27.294)$$

Note que as expressões 27.291 e 27.294 são válidas quando $kD \gg \ell$ e que os coeficientes não decrescem rapidamente, como ocorre no limite anterior ($kD \ll 1$). Assim, para um dado kD que, em princípio, satisfaz a condição $kD \gg \ell$ para algum ℓ , alguns coeficientes serão dados pelas expressões 27.291 e 27.294, até que um $\ell_{max} \sim kD$ seja atingido, quando então os coeficientes precisam ser calculados diretamente de 27.235 e 27.236. A partir daí, kD torna-se menor que os ℓ subsequentes, de modo que as equações 27.254 e 27.262 passam a ser válidas, o que mostra que, nesse caso, vários termos da expansão em multipolos precisam ser considerados, e o uso de computadores para efetuar os cálculos numéricos ou algébricos passa a ser necessário. Alguns problemas nesse sentido são deixados como exercício para o leitor (veja os exercícios 27.6 e 27.7). Vejamos agora outro processo importante.

27.7 Espalhamento Thomson

Outro processo que pode ser considerado espalhamento ocorre quando uma onda eletromagnética incide numa partícula livre que tem uma carga Q , de modo que ela possa se movimentar sujeita aos campos da onda incidente. Como a carga será acelerada, ela emitirá radiação em todas as direções, e

também em várias frequências. Podemos simplificar o estudo desse problema se considerarmos uma onda eletromagnética incidente plana polarizada, propagando-se na direção z , com uma polarização descrita pelo vetor $\hat{n}$, que é paralelo ao plano xy , fazendo um ângulo γ com o eixo x , além de considerar que as velocidades adquiridas pela carga são não relativísticas, de modo que ela emite radiação com a mesma frequência da radiação incidente. Nesse caso, teremos o fenômeno do espalhamento Thomson, que vamos estudar a seguir. Considere o campo elétrico da onda plana como sendo

$$\vec{\mathcal{E}}_i(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0,i} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \hat{n} \quad (27.295)$$

Sendo a força elétrica que age na carga dada por $\vec{F} = Q\vec{\mathcal{E}}$, podemos obter a aceleração instantânea por meio de

$$\vec{a} = \frac{Q\vec{\mathcal{E}}_i}{m} = \frac{Q}{m} \vec{\mathcal{E}}_{0,i} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \hat{n} \quad (27.296)$$

Queremos determinar o valor médio temporal do quadrado dessa grandeza. Supondo que o movimento da carga seja efetivamente cíclico, podemos adaptar a expressão 22.50, que fica então

$$\langle \vec{a} \cdot \vec{a} \rangle = \frac{1}{2} \Re[\vec{a} \cdot \vec{a}^*] \quad (27.297)$$

ou seja,

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\frac{Q}{m} \vec{\mathcal{E}}_{0,i} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \hat{n} \cdot \frac{Q}{m} \vec{\mathcal{E}}_{0,i}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t} \hat{n} \right]$$

que fica

$$\langle a^2 \rangle = \frac{Q^2}{2m^2} |\mathcal{E}_{0,i}|^2 \quad (27.298)$$

Agora lembramos a fórmula de Larmor 24.10 para a potência média emitida, por unidade de ângulo sólido, por uma carga acelerada,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{16\pi^2 c} \sin^2 \beta$$

onde β é o ângulo entre a aceleração da carga, que no nosso caso está na direção definida pelo versor $\hat{n}$, e a posição do ponto de observação da ra-

dição. Assim, para o espalhamento Thomson, a potência média espalhada por unidade de ângulo sólido é

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2}{16\pi^2 c} \frac{Q^2}{2m^2} |\mathcal{E}_{0,i}|^2 \sin^2 \beta$$

ou

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{Q^4}{m^2} |\mathcal{E}_{0,i}|^2 \sin^2 \beta \quad (27.299)$$

Vamos calcular agora a seção de choque de espalhamento, dada pela razão entre a potência média espalhada por unidade de ângulo sólido e a potência média incidente, por unidade de área, dada pelo vetor de Poynting médio na direção da onda incidente, isto é, usando a equação 27.222,

$$\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{\frac{dP}{d\Omega}}{\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{k}_i}$$

Já calculamos a potência média incidente em 27.59,

$$\langle \vec{S}_i \rangle \cdot \hat{k}_i = \frac{|\mathcal{E}_{0,i}|^2}{2\mu_0 c}$$

de modo que achamos, usando 27.299 e 27.59 em 27.222,

$$\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{\frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{Q^4}{m^2} |\mathcal{E}_{0,i}|^2 \sin^2 \beta}{\frac{|\mathcal{E}_{0,i}|^2}{2\mu_0 c}}$$

ou

$$\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{Q^4}{m^2} \sin^2 \beta \quad (27.300)$$

Agora precisamos escrever β em termos de ângulos mais apropriados. Sabemos que $\vec{k} \parallel \hat{k}$ e que $\hat{n}$ faz um ângulo γ com o eixo x . Além disso, vamos chamar de θ (o mesmo de coordenadas esféricas) o ângulo entre $\hat{k}$ e o vetor $\hat{R}$ do ponto de observação. Portanto, podemos escrever $\hat{n}$ como

$$\hat{n} = \cos \gamma \hat{i} + \sin \gamma \hat{j} \quad (27.301)$$

O versor $\hat{R}$, por sua vez, corresponde ao versor $\hat{r}$ de coordenadas esféricas, e ele pode ser escrito como

$$\hat{R} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (27.302)$$

Sendo β ângulo entre a aceleração e $\hat{R}$, temos, lembrando que $\vec{a} \parallel \hat{n}$ e que $|\hat{n}| = |\hat{R}| = 1$,

$$\hat{R} \cdot \hat{n} = \cos \beta$$

ou, usando 27.301 e 27.302,

$$\cos \beta = (\sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) \cdot (\cos \gamma \hat{i} + \sin \gamma \hat{j})$$

ou ainda,

$$\cos \beta = \sin \theta \cos \phi \cos \gamma + \sin \theta \sin \phi \sin \gamma$$

que pode ser escrito como

$$\cos \beta = \sin \theta \cos(\phi - \gamma)$$

Portanto,

$$\sin^2 \beta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma) \quad (27.303)$$

Com isso, a seção de choque de espalhamento 27.300 fica

$$\frac{d\sigma_{esp}}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{Q^4}{m^2} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] \quad (27.304)$$

Nesse caso, a seção de choque se comporta como um toróide, como mostra a figura 27.25, obtida quando $\gamma = 0$, ou seja, uma onda polarizada na direção x .

Quando temos um feixe de radiação não polarizado, a seção de choque deve considerar uma média feita sobre o ângulo γ na expressão 27.304, o que é feito integrando a expressão em γ no intervalo $[0, 2\pi]$ e dividindo por 2π , ou seja,

$$\frac{d\langle\sigma_{esp}\rangle_\gamma}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{Q^4}{m^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] d\gamma \quad (27.305)$$

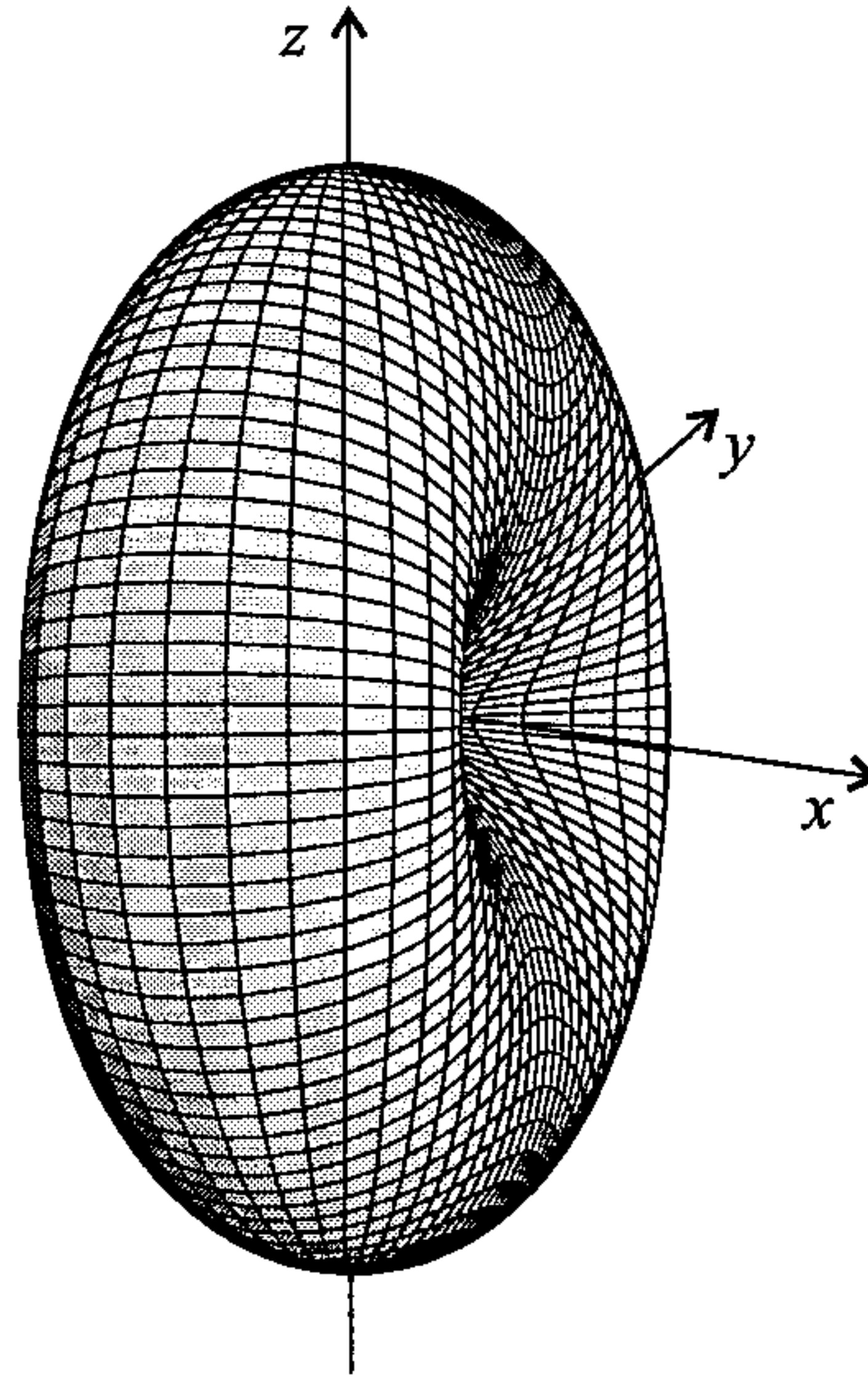


Figura 27.25: Seção de choque de espalhamento para uma carga livre excitada por uma onda plana polarizada na direção x incidente na direção z .

Podemos reescrever a integral na forma

$$\int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] d\gamma = \int_0^{2\pi} \left[1 - \sin^2 \theta \frac{1 + \cos 2(\phi - \gamma)}{2} \right] d\gamma$$

ou

$$\int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] d\gamma = \left\{ \gamma - \sin^2 \theta \left[\frac{\gamma}{2} - \frac{\sin 2(\phi - \gamma)}{4} \right] \right\}_0^{2\pi}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] d\gamma = \\ 2\pi - \sin^2 \theta \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 2(\phi - 2\pi) - \sin 2\phi}{4} \right] \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] d\gamma =$$

$$2\pi - \sin^2 \theta \left[\pi - \frac{\sin 2\phi \cos 2\pi - \cos 2\phi \sin 2\pi - \sin 2\phi}{4} \right]$$

ou

$$\int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] d\gamma = 2\pi - \pi \sin^2 \theta$$

ou ainda,

$$\int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] d\gamma = 2\pi - \pi(1 - \cos^2 \theta)$$

ou, finalmente,

$$\int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \gamma)] d\gamma = \pi(1 + \cos^2 \theta) \quad (27.306)$$

Utilizando a equação 27.306 em 27.305, temos

$$\frac{d\langle \sigma_{esp} \rangle_\gamma}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{Q^4}{m^2} \frac{1}{2\pi} \pi(1 + \cos^2 \theta)$$

ou

$$\frac{d\langle \sigma_{esp} \rangle_\gamma}{d\Omega} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{Q^4}{m^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (27.307)$$

O gráfico dessa seção de choque pode ser visto na figura 27.26. Note que ela favorece espalhamentos na região próxima ao eixo z , ou seja, espalhamento frontal e retro-espalhamento. Chamada de seção de choque de Thomson para espalhamento, ela pode ser usada para estudar o espalhamento de raios-x por elétrons, por exemplo.

Podemos determinar a seção de choque total de espalhamento para uma onda incidente não-polarizada integrando a equação 27.307 no ângulo sólido $d\Omega$, ou seja,

$$\langle \sigma_{esp} \rangle_\gamma = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{Q^4}{m^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \sin \theta d\theta d\phi$$

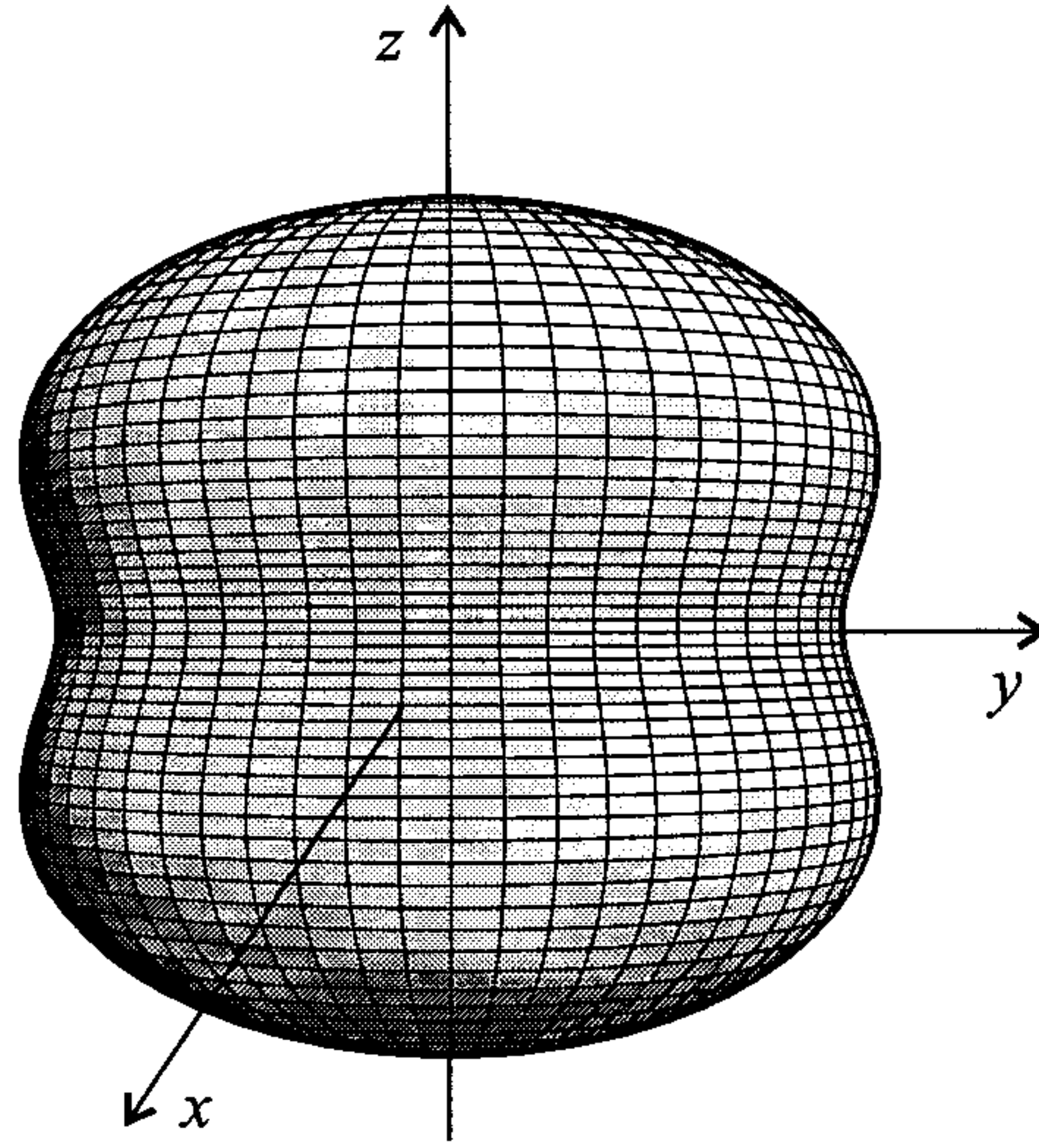


Figura 27.26: Seção de choque de espalhamento para uma carga livre excitada por uma onda plana não-polarizada na direção x incidente na direção z .

Usando a variável

$$s = \cos \theta \quad ds = -\sin \theta d\theta$$

essa integral pode ser simplificada para

$$\langle \sigma_{esp} \rangle_{\gamma} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{Q^4}{m^2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1+s^2}{2} ds d\phi$$

e então,

$$\langle \sigma_{esp} \rangle_{\gamma} = \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} \frac{Q^4}{m^2} \int_{-1}^1 (2\pi) \frac{1+s^2}{2} ds$$

ou

$$\langle \sigma_{esp} \rangle_{\gamma} = \frac{\mu_0^2}{8\pi} \frac{Q^4}{m^2} \left[\frac{s}{2} + \frac{s^3}{6} \right]_{-1}^1$$

ou ainda,

$$\langle \sigma_{esp} \rangle_{\gamma} = \frac{\mu_0^2 Q^4}{8\pi m^2} \left[1 + \frac{1}{3} \right]$$

ou, finalmente,

$$\langle \sigma_{esp} \rangle_T = \frac{\mu_0^2 Q^4}{6\pi m^2} \quad (27.308)$$

Esta é a seção de choque Thomson. Note que ela é válida para baixas energias de radiação incidente quando comparadas, por exemplo, com a energia relativística de um elétron ($E = m_0 c^2$), o que corresponde a baixas frequências. Devemos lembrar também que esse é um cálculo clássico, sujeito a correções quânticas, como efeito Compton. Nesse caso, temos a seção de choque de Klein-Nishina, cujas expansões assintóticas são

$$\langle \sigma_{esp} \rangle_{KN} = \frac{\mu_0^2 Q^4}{16\pi^2 m^2} \times \begin{cases} \frac{8\pi}{3} \left(1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2} + \dots \right), & \hbar\omega \ll mc^2 \\ \pi \frac{mc^2}{\hbar\omega} \left(\ln \frac{2\hbar\omega}{mc^2} + \frac{1}{2} \right), & \hbar\omega \gg mc^2 \end{cases} \quad (27.309)$$

onde ω é a frequência angular da radiação incidente, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ e h é a constante de Planck. Isso encerra nosso estudo sobre difração e espalhamento. No próximo capítulo estudamos o interessante tópico da reação de radiação.

27.8 Exercícios

27.1 Demonstre a equação 27.49,

$$\frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_{1,o}} \Re[\vec{E}_i \times \vec{B}_i^*] \cdot \hat{n}' dA = 0$$

27.2 Mostre que numa difração por fenda única o máximo central responde por 90% da intensidade total difratada, enquanto o segundo máximo dá conta de 5% da intensidade.

- 27.3** Obtenha as grandezas acima para uma difração por um conjunto de três fendas. Esboce o gráfico da intensidade difratada.
- 27.4** Resolva o problema de uma difração por uma fenda circular considerando a teoria vetorial de difração, e compare os resultados com os obtidos na seção 27.3.4.
- 27.5** Demostre a expressão 27.246,

$$\left\{ \frac{\frac{d}{dr}[rj_\ell(kr)]}{\frac{d}{dr}[r\mathfrak{h}_\ell^1(kr)]} \right\}_{r=D} = -ie^{i\delta'_\ell} \sin \delta'_\ell$$

considerando que o ângulo de fase de espalhamento δ'_ℓ é aquele definido em 27.237.

- 27.6** Utilizando os resultados da seção 27.6, obtenha, para uma esfera perfeitamente condutora, os três primeiros coeficientes $C_{\ell,\pm 1}^e$ e $C_{\ell,\pm 1}^M$ para a situação em que $kD \sim \ell_{max} \sim 2$. Obtenha também os campos espalhados em termos das funções $\tilde{\mathfrak{J}}_{\ell,m}$.
- 27.7** Estude o problema de uma esfera condutora (mas não perfeitamente condutora), considerando agora campos no interior da esfera e condições de contorno apropriadas. Considere, nos resultados, o limite em que a condutividade $\mathfrak{s} \rightarrow \infty$, e verifique se os resultados da seção 27.6 são obtidos.

Capítulo 28

Radiação, V: Reação de Radiação

Neste capítulo veremos o fenômeno de reação de radiação. Quando uma partícula de massa m carregada com uma carga Q sofre a ação de uma força resultante não-nula, ela adquire uma aceleração, sofre uma variação em sua velocidade e, conseqüentemente, em sua energia cinética. A força externa, durante o deslocamento da partícula, realiza um trabalho, e assim o trabalho realizado deveria ser igual à variação de energia cinética, como ocorre quando uma massa m descarregada é submetida a uma força externa. Entretanto, sabemos que cargas aceleradas emitem radiação, de modo que nem todo o trabalho realizado é convertido em energia cinética. Uma parte da energia torna-se radiação, e tudo se passa como se a força resultante na partícula fosse menor do que de fato ela é. Há, portanto, uma força exercida pela radiação sobre a carga que a gerou e que é o que chamamos de reação de radiação. Nosso objetivo agora é estudar um pouco mais a fundo esse fenômeno, que tem implicações bastante interessantes no Eletromagnetismo Clássico.

28.1 Cálculo Preliminar da Reação de Radiação Baseado na Conservação de Energia

Vamos determinar uma expressão para a reação de radiação baseada na aplicação da lei de conservação de energia a uma carga acelerada. Considerando uma partícula não-relativística, temos, pela fórmula de Larmor 24.11,

$$P = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{6\pi c}$$

Essa é a potência média emitida, na forma de radiação, pela carga que tem uma aceleração $\vec{a}$. Portanto, poderíamos pensar que essa potência corresponde à taxa temporal com que a carga perde energia por causa da força exercida pela radiação, ou seja, considerando que a carga tenha uma velocidade $\vec{v}$,

$$\vec{\mathcal{F}}_{rad} \cdot \vec{v} = -\frac{\mu_0 Q^2 a^2}{6\pi c} \quad (28.1)$$

Note que essa equação, na verdade, não está correta, pois a carga não gera apenas campos de radiação. Devemos lembrar que ela gera também campos de velocidade, os quais também têm uma energia associada, só que essa energia não se “desprende” da carga como ocorre com a energia dos campos de radiação. Portanto, a determinação da energia perdida pela carga deve levar em conta tanto a parte da energia de radiação quanto a parte da energia que fica nos campos de velocidade. Agora, se considerarmos que a carga execute algum tipo de movimento cíclico, de modo que nos instantes t_1 e t_2 as configurações dos campos de velocidade e de radiação sejam as mesmas, então a energia associada aos campos de velocidade (que fica “ligada” à carga) será a mesma nos dois casos, e a diferença entre as energias totais será dada pela parte que foi irradiada. Conseqüentemente, apesar de a equação 28.1 não ser exata num dado instante de tempo, em termos médios, considerando estados inicial e final similares, ela é válida, de modo que podemos escrever, em média,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{F}}_{rad} \cdot \vec{v} dt = -\frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt \quad (28.2)$$

Agora, como

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{F}}_{rad} \cdot \vec{v} dt = -\frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt \quad (28.3)$$

Chamando

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{d\vec{v}}{dt} & d\vec{u} &= \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} dt \\ d\vec{s} &= \frac{d\vec{v}}{dt} dt & \vec{s} &= \vec{v}\end{aligned}$$

achamos, integrando o lado direito por partes,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{F}}_{rad} \cdot \vec{v} dt = -\frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \left\{ \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \cdot \vec{v} dt \right\}$$

ou, como $\vec{v}$ e $\frac{d\vec{v}}{dt}$ são iguais em t_1 e t_2 por causa do movimento cíclico executado pela carga, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{F}}_{rad} \cdot \vec{v} dt = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \cdot \vec{v} dt$$

que pode ser escrita como

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\vec{\mathcal{F}}_{rad} - \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \right] \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (28.4)$$

Um modo de satisfazer a equação 28.4 é considerar que

$$\vec{\mathcal{F}}_{rad} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \quad (28.5)$$

Esta expressão é conhecida como *fórmula de Abraham-Lorentz* para a reação de radiação. Note que ela foi estabelecida, por enquanto, considerando a situação mais simples envolvendo a equação 28.4, que está de acordo com a lei de conservação de energia. Nada foi dito, por exemplo, sobre a componente perpendicular de $\vec{\mathcal{F}}_{rad}$ em relação à velocidade da carga, por exemplo. Além disso, ela vale apenas em média, e isso se nos restringirmos a um movimento cíclico em que $\vec{v}$ e $\frac{d\vec{v}}{dt}$ forem iguais no começo e no fim do ciclo. Vamos ampliar a validade dessa equação nas próximas seções, mas antes devemos discutir alguns aspectos interessantes relacionados com essa equação. Primeiro, considere que não haja outras forças externas agindo na carga, além da exercida pela radiação. Nesse caso, temos, usando a segunda lei de Newton, e lembrando que $\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{d\vec{a}}{dt}$,

$$\vec{\mathcal{F}}_{rad} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \frac{d\vec{a}}{dt} = m\vec{a}$$

ou

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{6\pi mc}{\mu_0 Q^2} \vec{a} \quad (28.6)$$

Esta equação pode ser resolvida facilmente, mediante a separação das três componentes cartesianas da aceleração, e a solução é

$$\vec{a} = \vec{a}_0 e^{\frac{6\pi mc}{\mu_0 Q^2} t} \quad (28.7)$$

ou, se definirmos uma constante de tempo τ_{rad} por meio de

$$\tau_{rad} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi mc} \quad (28.8)$$

podemos reescrever 28.6 como

$$\vec{a} = \vec{a}_0 e^{\frac{t}{\tau_{rad}}} \quad (28.9)$$

É interessante notar que o tempo característico τ_{rad} é muito pequeno em geral. Para um elétron, por exemplo, ele vale $\tau_{rad}^e \approx 6,24 \times 10^{-24}$ s. A equação 28.9 indica que a aceleração da carga aumenta espontaneamente com o tempo, na ausência de forças externas aplicadas. Esse resultado ilógico, chamado de solução divergente, pode ser corrigido se fizermos $\vec{a}_0 = 0$. Isso resolve o problema quando $\vec{F}_{ext} = 0$, mas outros ocorrem quando existem forças externas aplicadas além da reação de radiação, conforme veremos mais tarde. Antes, vamos estudar dois modelos para uma carga pontual.

28.2 Cálculo da Reação de Radiação para um Modelo Dipolar para uma Carga Pontual

Nosso objetivo aqui é verificar a correção da fórmula de Abraham-Lorentz 28.5 para uma carga pontual Q , ou seja, determinar a reação de radiação associada à carga. Apesar de chamarmos a carga de pontual, ela não é de fato um ponto no sentido matemático. Assim, ela ocupa um certo volume no espaço, e nesse volume a carga Q está distribuída de alguma forma em princípio desconhecida, lembrando que estamos interessados em partículas como elétrons e prótons, por exemplo. Assim, um elemento de volume dV_A dentro da carga possui uma certa carga elementar $dQ_A = \rho(\vec{r}_A, t)dV_A$, e um

outro elemento de volume dV_B tem uma carga $dQ_B = \rho(\vec{r}_B, t)dV_B$. Cada um desses elementos de volume exerce força eletromagnética sobre o outro. Se a luz, ou mais precisamente, “informação”, se propagasse com velocidade infinita, a reação gerada por B sobre A quando A age sobre B ocorreria de tal modo que haveria um cancelamento interno à carga, e a força total interna seria nula. Porém, como ocorre atraso no transporte de informação, a reação de uma dada ação não ocorre ao mesmo tempo, indicando que nem sempre ocorrerá um anulamento total da força produzida pela carga nela mesma. Essa “auto-força” é o que chamamos de reação de radiação, e ela surge porque a carga não é de fato um ponto matemático.

Para mostrar que de fato existe reação de radiação para uma carga pontual, vamos modelá-la inicialmente de uma forma bem simples. Vamos dividir a carga Q da partícula pontual em duas metades, separadas por uma distância d , e esse “dipolo” se move perpendicularmente à linha que une as duas metades da carga. Note que a partícula que tem a carga Q é um objeto único, e em geral a sua estrutura interna não nos é acessível. A figura 28.1 mostra as grandezas importantes para esse caso.

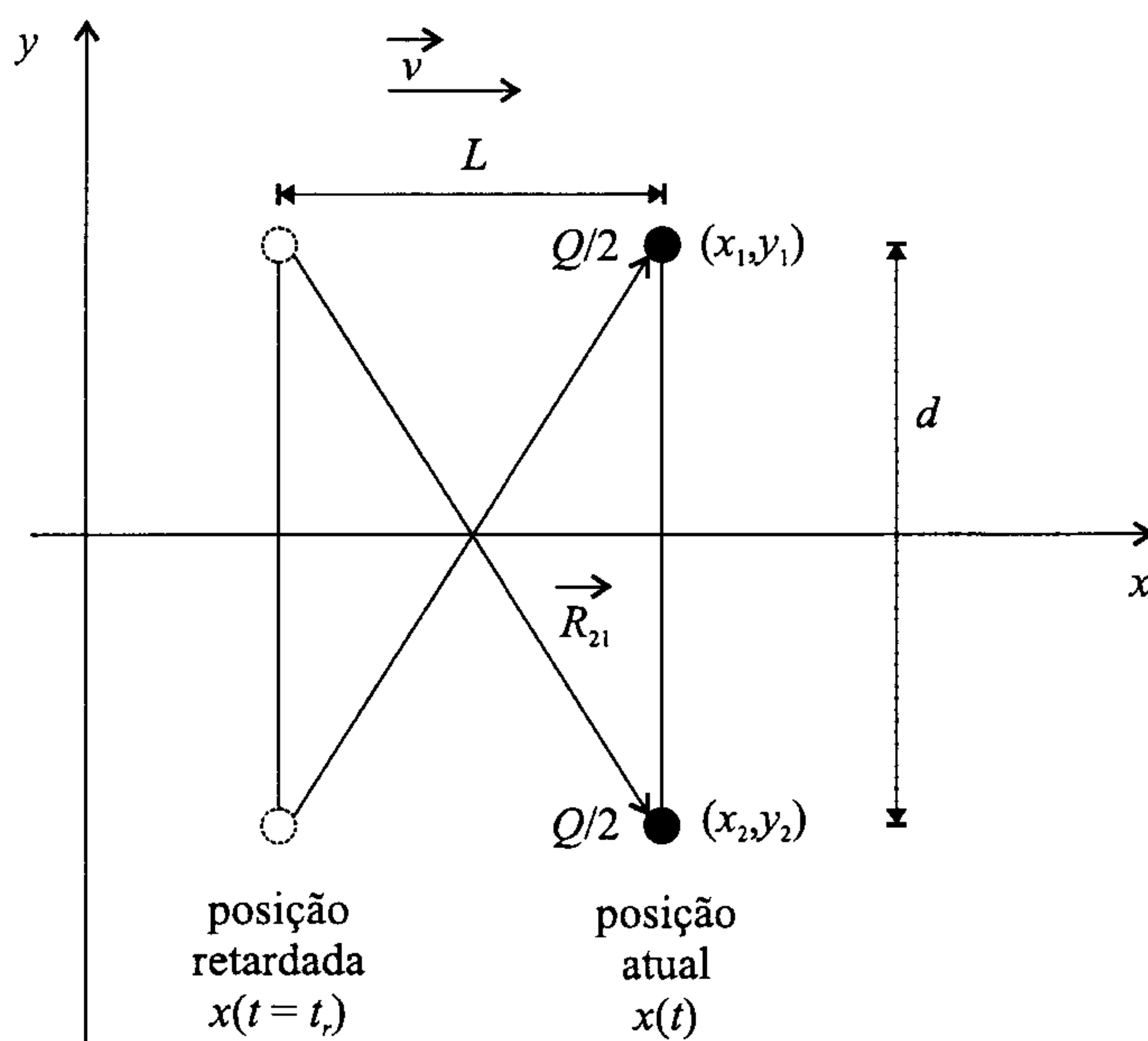


Figura 28.1: Modelo “dipolar” para uma carga pontual Q .

O campo elétrico relevante é o campo elétrico retardado de Liénard-Wiechert, dado pela expressão 20.132,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} \quad (28.10)$$

com o correspondente campo magnético 20.134,

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{R}(t_r) \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)}{c} \quad (28.11)$$

onde

$$\vec{R}(t_r) = \vec{r} - \vec{r}_Q(t_r) \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad \vec{a} = \frac{\vec{a}}{c}$$

e $\vec{r}_Q(t_r)$ descreve a posição da carga Q no tempo retardado, $\vec{v}$ é sua velocidade e $\vec{a}$, a aceleração, todos no tempo t_r . Vamos considerar que em t_r a carga está em repouso, de modo que

$$\vec{\beta}(t_r) = 0 \quad (28.12)$$

Além disso, se queremos calcular o campo elétrico produzido no ponto (x_1, y_1) pela carga que estava em $(x_{2,r}, y_{2,r})$, precisamos de

$$\vec{R}_{12} = L\hat{i} + d\hat{j} \quad (28.13)$$

de modo que

$$R_{12} = \sqrt{L^2 + d^2} \quad (28.14)$$

A aceleração está na direção x , no sentido positivo, de modo que

$$\vec{a} = a\hat{i} \quad (28.15)$$

O campo elétrico produzido pela metade da carga inferior na metade superior fica, então, reunindo 28.12, 28.13 e 28.15 em 28.10,

$$\vec{\mathcal{E}}_{12}(\vec{r}_1, t) = \frac{\frac{Q}{2}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3} + \frac{\vec{R}_{12} \times (\vec{R}_{12} \times \vec{a})}{c^2 R_{12}^3} \right\} \quad (28.16)$$

Vamos calcular

$$\vec{R}_{12} \times \vec{a} = (L\hat{\mathbf{i}} + d\hat{\mathbf{j}}) \times a\hat{\mathbf{i}}$$

ou

$$\vec{R}_{12} \times \vec{a} = -ad\hat{\mathbf{k}}$$

Assim,

$$\vec{R}_{12} \times (\vec{R}_{12} \times \vec{a}) = (L\hat{\mathbf{i}} + d\hat{\mathbf{j}}) \times (-ad\hat{\mathbf{k}})$$

ou

$$\vec{R}_{12} \times (\vec{R}_{12} \times \vec{a}) = -ad(d\hat{\mathbf{i}} - L\hat{\mathbf{j}}) \quad (28.17)$$

Usando 28.14 e 28.17 em 28.16, achamos

$$\vec{\mathcal{E}}_{12}(\vec{r}_1, t) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{L\hat{\mathbf{i}} + d\hat{\mathbf{j}}}{(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ad(d\hat{\mathbf{i}} - L\hat{\mathbf{j}})}{c^2(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{12}(\vec{r}_1, t) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [(c^2L - ad^2)\hat{\mathbf{i}} + (c^2d + Lad)\hat{\mathbf{j}}] \quad (28.18)$$

Com isso, o campo magnético produzido na metade superior da carga pela metade inferior vale, por 28.11,

$$\vec{\mathcal{B}}_{12}(\vec{r}_1, t) = \frac{L\hat{\mathbf{i}} + d\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{L^2 + d^2}} \times \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [(c^2L - ad^2)\hat{\mathbf{i}} + (c^2d + Lad)\hat{\mathbf{j}}]$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_{12}(\vec{r}_1, t) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3(L^2 + d^2)^2} [L(c^2d + Lad) - d(c^2L - ad^2)] \hat{\mathbf{k}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{B}}_{12}(\vec{r}_1, t) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{ad}{c^3(L^2 + d^2)} \hat{\mathbf{k}} \quad (28.19)$$

Uma grandeza relevante é

$$\vec{v}_1(t) \times \vec{B}_{12} = v \hat{\mathbf{i}} \times \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{ad}{c^3(L^2 + d^2)} \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{v}_1(t) \times \vec{B}_{12} = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{vad}{c^3(L^2 + d^2)} \hat{\mathbf{j}} \quad (28.20)$$

Vamos calcular agora as grandezas envolvendo os campos produzidos pela metade superior da carga no tempo retardado que atuam sobre a metade inferior no tempo atual. Precisamos de

$$\vec{R}_{21} = L \hat{\mathbf{i}} - d \hat{\mathbf{j}} \quad (28.21)$$

de modo que

$$R_{21} = \sqrt{L^2 + d^2} \quad (28.22)$$

Nesse caso, o campo elétrico dado por 28.10 torna-se, usando 28.12,

$$\vec{\mathcal{E}}_{21}(\vec{r}_2, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R}_{21}}{R_{21}^3} + \frac{\vec{R}_{21} \times (\vec{R}_{21} \times \vec{a})}{c^2 R_{21}^3} \right\} \quad (28.23)$$

Calculamos, inicialmente,

$$\vec{R}_{21} \times \vec{a} = (L \hat{\mathbf{i}} - d \hat{\mathbf{j}}) \times a \hat{\mathbf{i}}$$

ou

$$\vec{R}_{21} \times \vec{a} = ad \hat{\mathbf{k}}$$

Assim,

$$\vec{R}_{21} \times (\vec{R}_{21} \times \vec{a}) = (L \hat{\mathbf{i}} - d \hat{\mathbf{j}}) \times ad \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{R}_{21} \times (\vec{R}_{21} \times \vec{a}) = -ad(d \hat{\mathbf{i}} + L \hat{\mathbf{j}}) \quad (28.24)$$

Assim, fazendo uso de 28.21, 28.22 e 28.24, a expressão 28.23 fica

$$\vec{\mathcal{E}}_{21}(\vec{r}_2, t) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{L\hat{\mathbf{i}} - d\hat{\mathbf{j}}}{(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ad(d\hat{\mathbf{i}} + L\hat{\mathbf{j}})}{c^2(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}_{21}(\vec{r}_2, t) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [Lc^2\hat{\mathbf{i}} - c^2d\hat{\mathbf{j}} - ad^2\hat{\mathbf{i}} - adL\hat{\mathbf{j}}]$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}_{21}(\vec{r}_2, t) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [(c^2L - ad^2)\hat{\mathbf{i}} - (c^2d + adL)\hat{\mathbf{j}}] \quad (28.25)$$

Podemos calcular agora o campo magnético, ou seja,

$$\vec{\mathcal{B}}_{21}(\vec{r}_2, t) = \frac{L\hat{\mathbf{i}} - d\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{L^2 + d^2}} \times \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [(c^2L - ad^2)\hat{\mathbf{i}} - (c^2d + adL)\hat{\mathbf{j}}]$$

ou

$$\vec{\mathcal{B}}_{21}(\vec{r}_2, t) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3(L^2 + d^2)^2} [-L(c^2d + adL) + d(c^2L - ad^2)] \hat{\mathbf{k}}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{B}}_{21}(\vec{r}_2, t) = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{ad}{c^3(L^2 + d^2)} \hat{\mathbf{k}} \quad (28.26)$$

Com isso, podemos calcular novamente

$$\vec{v}_2(t) \times \vec{\mathcal{B}}_{21} = v\hat{\mathbf{i}} \times -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{ad}{c^3(L^2 + d^2)} \hat{\mathbf{k}}$$

ou

$$\vec{v}_2(t) \times \vec{\mathcal{B}}_{21} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{vad}{c^3(L^2 + d^2)} \hat{\mathbf{j}} \quad (28.27)$$

De posse de 28.18 e 28.27, podemos calcular a força elétrica resultante produzida por uma metade da carga na outra metade, ou seja,

$$\vec{F} = \frac{Q}{2}\vec{\mathcal{E}}_{12} + \frac{Q}{2}\vec{\mathcal{E}}_{21}$$

ou

$$\vec{F} = \frac{Q}{2} \left\{ \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [(c^2L - ad^2)\hat{\mathbf{i}} + (c^2d + Lad)\hat{\mathbf{j}}] + \right. \\ \left. \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [(c^2L - ad^2)\hat{\mathbf{i}} - (dc^2 + adL)\hat{\mathbf{j}}] \right\}$$

e então,

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{c^2L - ad^2}{c^2(L^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{i}} \quad (28.28)$$

Essa é a expressão exata para a força elétrica entre uma metade da carga e a outra. Note que, pelas expressões 28.20 e 28.27, a força magnética da metade superior na metade inferior anula a da metade inferior na metade superior, de modo que a força total é dada apenas pela força elétrica. Agora, vamos expandir, em série de Taylor, a coordenada x atual da carga em termos da coordenada x no tempo retardado, ou seja,

$$x(t) = x(t_r) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_r} (t - t_r) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_r} (t - t_r)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_r} (t - t_r)^3 + \dots \quad (28.29)$$

Então, temos

$$L = x(t) - x(t_r) = v(t_r)(t - t_r) + \frac{1}{2}a(t_r)(t - t_r)^2 + \frac{1}{6}\dot{a}(t_r)(t - t_r)^3 + \dots$$

onde $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. Definindo um tempo T tal que

$$T = t - t_r \quad (28.30)$$

e lembrando a equação 28.12, temos

$$L = \frac{1}{2}a(t_r)T^2 + \frac{1}{6}\dot{a}(t_r)T^3 + \dots \quad (28.31)$$

Note que

$$c(t - t_r) = \sqrt{L^2 + d^2}$$

ou

$$c^2 T^2 = L^2 + d^2 \quad (28.32)$$

de modo que

$$d = \sqrt{c^2 T^2 - L^2}$$

ou, usando 28.31,

$$d = \sqrt{c^2 T^2 - \left[\frac{1}{2} a(t_r) T^2 + \frac{1}{6} \dot{a}(t_r) T^3 + \dots \right]^2}$$

ou ainda,

$$d = cT \left\{ 1 - \left[\frac{a(t_r)T}{2c} + \frac{\dot{a}(t_r)T^2}{6c} + \dots \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

O termo entre colchetes é pequeno, e podemos chamá-lo de s . Assim, temos uma expressão do tipo $(1 - s^2)^{\frac{1}{2}}$, e podemos usar uma série de Taylor para expandi-la, obtendo

$$d = cT \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{a(t_r)T}{2c} + \frac{\dot{a}(t_r)T^2}{6c} + \dots \right]^2 + \dots \right\}$$

ou

$$d = cT \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{a^2(t_r)T^2}{4c^2} + \frac{a(t_r)\dot{a}(t_r)T^3}{12c^2} + \frac{\dot{a}^2(t_r)T^4}{36c^2} + \dots \right] \right\}$$

ou ainda,

$$d = cT - \frac{a^2(t_r)T^3}{8c} - \frac{a(t_r)\dot{a}(t_r)T^4}{24c} + \dots \quad (28.33)$$

Assim, temos uma expansão do parâmetro d em termos de T . Queremos inverter essa expansão, obtendo uma série para T em termos de d . Em primeira aproximação, podemos fazer

$$d \approx cT$$

de modo que

$$T \approx \frac{d}{c}$$

Agora, usamos esse valor para T no termo cúbico em 28.33, ou seja,

$$d \approx cT - \frac{a^2(t_r)}{8c} \frac{d^3}{c^3}$$

o que faz com que achemos

$$T \approx \frac{d}{c} + \frac{a^2(t_r)d^3}{8c^5}$$

e assim sucessivamente, resultando em

$$T = \frac{d}{c} + \frac{a^2(t_r)d^3}{8c^5} + \dots \quad (28.34)$$

Em seguida, usamos esse valor para T na expressão 28.31, que fica

$$L = \frac{1}{2}a(t_r) \left[\frac{d}{c} + \frac{a^2(t_r)d^3}{8c^5} + \dots \right]^2 + \frac{1}{6}\dot{a}(t_r) \left[\frac{d}{c} + \frac{a^2(t_r)d^3}{8c^5} + \dots \right]^3 + \dots$$

ou

$$L = \frac{a(t_r)}{2} \frac{d^2}{c^2} + \frac{\dot{a}(t_r)}{6} \frac{d^3}{c^3} + \dots \quad (28.35)$$

O próximo passo consiste em usar a expansão 28.35 na força dada por 28.28, isto é,

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ c^2 \left[\frac{a(t_r)}{2} \frac{d^2}{c^2} + \frac{\dot{a}(t_r)}{6} \frac{d^3}{c^3} + \dots \right] - d^2 a(t_r) \right\} (L^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} \hat{\mathbf{i}}$$

O termo entre chaves é dado pela equação 28.32, e temos

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{a(t_r)}{2} d^2 + \frac{\dot{a}(t_r)}{6} \frac{d^3}{c} + \dots \right] (cT)^{-3} \hat{\mathbf{i}}$$

Pela equação 28.34, temos,

$$cT = d + \frac{a^2(t_r)d^3}{8c^4} + \dots$$

de modo que, em primeira ordem,

$$cT \approx d$$

e então,

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{a(t_r)}{2} d^2 + \frac{\dot{a}(t_r)}{6} \frac{d^3}{c} + \dots \right] \frac{1}{d^3} \hat{\mathbf{i}}$$

ou

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t_r)}{4c^2 d} + \frac{\dot{a}(t_r)}{12c^3} + \dots \right] \hat{\mathbf{i}} \quad (28.36)$$

Podemos escrever essa expressão em termos da aceleração no tempo atual, por meio de

$$a(t_r) = a(t) + \left. \frac{da}{dt} \right|_t (t_r - t) + \dots$$

ou, usando 28.30,

$$a(t_r) = a(t) - \dot{a}(t)T + \dots$$

ou ainda, empregando agora 28.34,

$$a(t_r) = a(t) - \dot{a}(t) \frac{d}{c} + \dots \quad (28.37)$$

Da mesma forma, para $\dot{a}(t_r)$, temos

$$\dot{a}(t_r) = \dot{a}(t) + \ddot{a}(t)(t_r - t) + \dots$$

ou, fazendo as mesmas substituições do caso anterior,

$$\dot{a}(t_r) = \dot{a}(t) + \ddot{a}(t) \frac{d}{c} + \dots \quad (28.38)$$

Então, mantendo apenas as potências mais baixas em d e usando as equações 28.37 e 28.38, a equação 28.36 fica

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{4c^2d} \left(a(t) - \dot{a}(t) \frac{d}{c} \right) + \frac{1}{12c^3} \left(\dot{a}(t) + \ddot{a}(t) \frac{d}{c} \right) + \dots \right] \hat{\mathbf{i}}$$

ou

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t)}{4c^2d} + \frac{\dot{a}(t)}{4c^3} + \frac{\dot{a}(t)}{12c^3} + \frac{\ddot{a}(t)}{12c^3} \frac{d}{c} + \dots \right] \hat{\mathbf{i}}$$

ou ainda,

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a(t)}{4c^2d} + \frac{\dot{a}(t)}{3c^3} + \frac{\ddot{a}(t)}{12c^3} \frac{d}{c} + \dots \right] \hat{\mathbf{i}}$$

que pode ser escrito como

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4c^2d} \ddot{a}(t) + \frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \dot{\ddot{a}}(t) + \frac{\ddot{\ddot{a}}(t) Q^2}{48\pi\epsilon_0 c^4} d + \dots \quad (28.39)$$

onde nos valem os fatos de que $c^2 = (\mu_0\epsilon_0)^{-1}$. O fator

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4c^2d} \quad (28.40)$$

que multiplica a aceleração no primeiro termo do lado direito tem dimensões de massa. Além disso, se considerarmos as duas meias cargas, veremos que elas têm uma energia potencial eletrostática dada por

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{Q}{2} \frac{Q}{2}}{d} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4d}$$

A essa energia corresponde uma certa quantidade de massa pela relação relativística $E = \mathcal{M}c^2$, ou seja,

$$\mathcal{M} = \frac{U}{c^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4dc^2}$$

em acordo com a equação 28.40. Assim, a massa total observável da carga “pontual” vale

$$m = 2m_0 + \mathcal{M} = 2m_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4dc^2} \quad (28.41)$$

onde m_0 é a massa de cada metade da carga pontual. Se escrevermos a segunda lei de Newton para a carga pontual, com massa não-relativística $2m_0$,

$$\vec{F} = 2m_0\vec{a}$$

e usarmos a equação 28.39, veremos que

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4c^2d} \vec{a}(t) + \frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \dot{\vec{a}}(t) + \frac{\ddot{\vec{a}}(t) Q^2}{48\pi\epsilon_0 c^4} d + \dots = 2m_0\vec{a}$$

ou

$$\frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \dot{\vec{a}} + \frac{\ddot{\vec{a}} Q^2}{48\pi\epsilon_0 c^4} d + \dots = \left[2m_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4c^2d} \right] \vec{a}$$

ou ainda,

$$\frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \dot{\vec{a}} + \frac{\ddot{\vec{a}} Q^2}{48\pi\epsilon_0 c^4} d + \dots = m\vec{a}$$

Agora, se tomarmos o limite $d \rightarrow 0$, de modo a colapsar as cargas e obter uma carga efetivamente pontual, restará apenas

$$\frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \dot{\vec{a}} = m\vec{a}$$

O lado esquerdo corresponde à metade do valor dado pela fórmula de Abraham-Lorentz 28.5,

$$\vec{\mathcal{F}}_{rad} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2}$$

mas devemos lembrar que calculamos a força de uma das metades da carga na outra, e vice-versa, mas não calculamos ainda a força de uma das metades em si mesma. Além disso, no limite $d \rightarrow 0$ pode-se argumentar que a massa dada pela equação 28.41 divergiria, pois o termo $\mathcal{M}$ divergiria. De fato, um tratamento quântico baseado no processo conhecido como renormalização da massa faz com que essas divergências sejam “absorvidas”, e assim, as grandezas observáveis, no caso a massa m , permanecem finitas. Vamos calcular agora a força de uma parte de uma das metades da carga sobre outra parte da mesma metade. Podemos usar, para isso, o termo

$$\vec{F}_i = \frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \ddot{a} \quad (28.42)$$

que fornece o valor da força de interação entre as duas meias cargas de valor $\frac{Q}{2}$. Assim, poderíamos escrever

$$\vec{F}_i = \frac{\mu_0}{3\pi c} \ddot{a} \frac{Q}{2} \frac{Q}{2}$$

Portanto, entre duas cargas q e q' teríamos

$$\vec{F}_i = \frac{\mu_0}{3\pi c} \ddot{a} q q' \quad (28.43)$$

Considere agora que vamos calcular a força entre partes diferentes de uma meia carga de valor $\frac{Q}{2}$. Vamos supor que essa meia carga possa ser considerada como estando distribuída sobre um comprimento Y paralelo ao eixo y , definindo uma densidade linear de carga λ , de modo que a carga elementar num comprimento dy vale $dq = \lambda dy$. Considerando que queremos a força de interação entre duas cargas elementares situadas em elementos de comprimento dy e dy' , temos, usando a equação 28.43,

$$d\vec{F}_j = \frac{\mu_0}{3\pi c} \ddot{a} (\lambda dy) (\lambda dy') \quad (28.44)$$

onde $d\vec{F}_j$ é a força elementar de interação entre as cargas nos elementos de comprimento considerados. Para determinar a força total produzida pelo segmento Y nele mesmo, integramos essa expressão, tomando cuidado para não contar duas vezes a mesma interação, ou seja,

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0}{3\pi c} \ddot{a} \int_{-\frac{Y}{2}}^{\frac{Y}{2}} \int_y^{\frac{Y}{2}} \lambda^2 dy dy'$$

ou

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0 \lambda^2}{3\pi c} \ddot{a} \int_{-\frac{Y}{2}}^{\frac{Y}{2}} dy [y']_y^{\frac{Y}{2}}$$

ou ainda,

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0 \lambda^2}{3\pi c} \ddot{a} \int_{-\frac{Y}{2}}^{\frac{Y}{2}} \left(\frac{Y}{2} - y \right) dy$$

ou então,

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0 \lambda^2}{3\pi c} \dot{a} \left[\frac{Y}{2} y - \frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{Y}{2}}^{\frac{Y}{2}}$$

que fica

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0 \lambda^2}{6\pi c} \dot{a} \left[Y \frac{Y}{2} - \frac{Y^2}{4} + Y \frac{Y}{2} + \frac{Y^2}{4} \right]$$

e então,

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0 \lambda^2}{6\pi c} \dot{a} Y^2$$

ou

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0}{6\pi c} \dot{a} (\lambda Y)^2$$

Agora, temos que

$$\frac{Q}{2} = \lambda Y$$

Então,

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0}{6\pi c} \dot{a} \frac{Q^2}{4}$$

ou

$$\vec{F}_j = \frac{\mu_0 Q^2}{24\pi c} \dot{a} \quad (28.45)$$

Essa é a força de uma das metades da carga nela mesma. Como existem duas metades, a força das duas metades da carga nelas mesmas é

$$\vec{F}_{j,t} = \frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \dot{a} \quad (28.46)$$

Portanto, considerando agora a força total da carga “pontual” Q nela mesma, temos que somar as equações 28.42 e 28.45, o que resulta em

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \dot{a} + \frac{\mu_0 Q^2}{12\pi c} \dot{a}$$

ou

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \dot{\vec{a}} \quad (28.47)$$

que agora concorda com a fórmula de Abraham-Lorentz 28.5, e que leva em conta toda a interação entre as diversas partes da carga pontual. Cada parte gera campos eletromagnéticos, que interagem com as outras partes, resultando numa força total líquida não-nula, porque existe o atraso relativístico na propagação dos campos. Essa força é o que chamamos de reação de radiação, que é calculada, conforme mostramos agora, mediante a fórmula de Abraham-Lorentz. Note que nosso modelo para uma carga pontual é um tanto artificial; em seguida vamos torná-lo um pouco mais realista, considerando um modelo proposto por Lorentz.

28.3 Cálculo da Reação de Radiação para um Elétron

Nosso objetivo é refazer o cálculo da reação de radiação considerando agora um modelo para um elétron, proposto por Lorentz, fazendo algumas considerações:

1. A partícula (o elétron) está instantaneamente em repouso no tempo atual, ou seja,

$$\vec{v}(t) = 0 \quad (28.48)$$

o que sempre pode ser conseguido fazendo-se uma mudança apropriada de referenciais. Note que isso não significa que $\vec{a}$ ou as outras derivadas de $\vec{v}$ são nulas.

2. O movimento dos elementos infinitesimais de carga nos quais dividiremos a carga do elétron é não-relativístico.
3. Os campos eletromagnéticos produzidos por um elemento de carga de noutro de' são os campos de Liénard-Wiechert 20.132 e 20.134.
4. A carga segue uma distribuição com simetria esférica.

5. Nossos resultados não devem depender do “tamanho” do elétron.

Com as considerações acima, vamos iniciar os cálculos. A figura 28.2 mostra algumas grandezas relevantes para o caso do elétron.

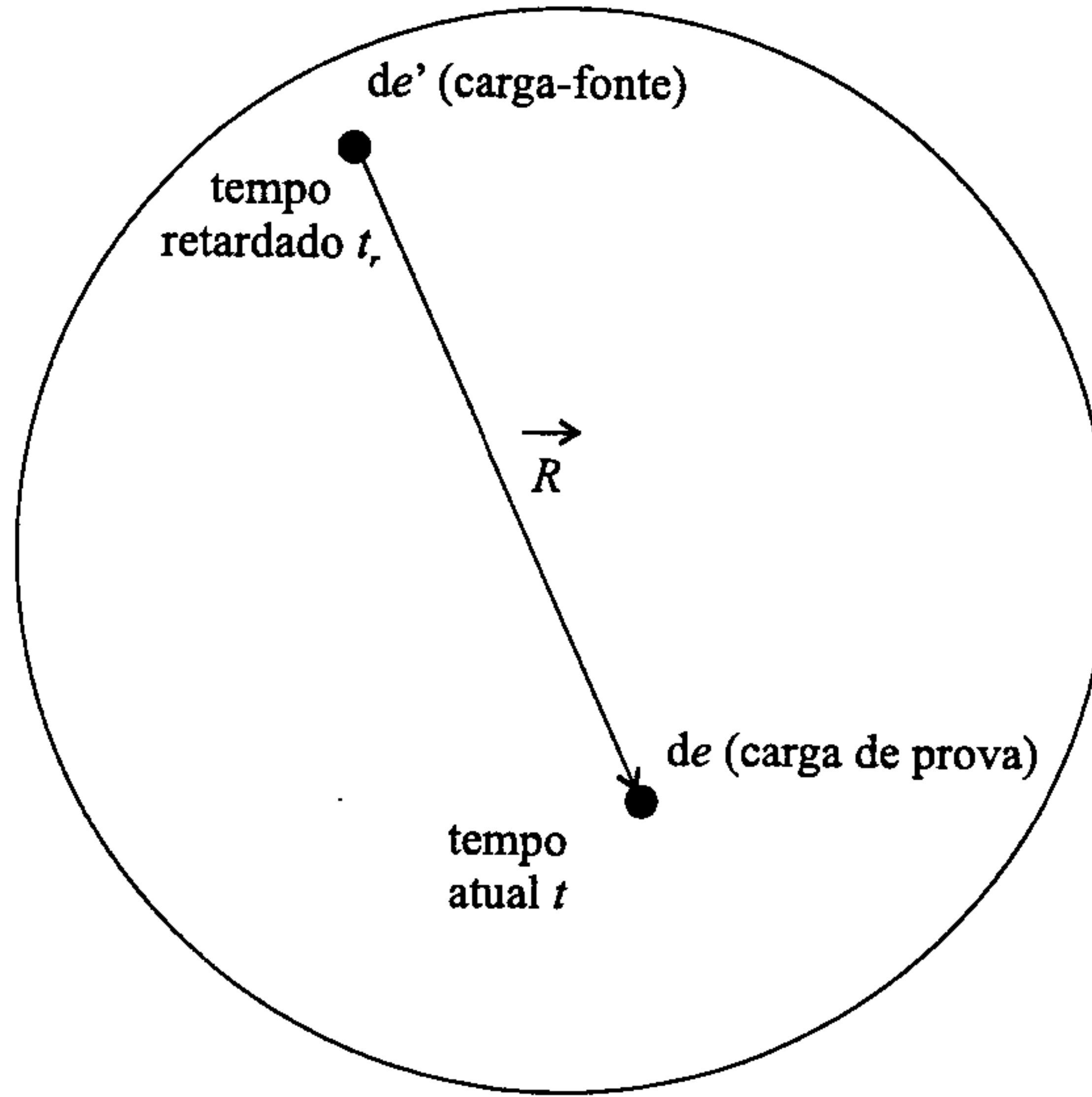


Figura 28.2: Grandezas importantes para o cálculo da reação de radiação para um elétron.

O campo elétrico produzido pela carga de' sobre a carga de é dado pela equação 20.132 ou 28.10,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(\vec{R} - R\vec{\beta})(1 - \beta^2)}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} + \frac{\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}]}{[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3} \right\} \quad (28.49)$$

É importante lembrar que o campo que a carga de sente no tempo atual t foi produzido pelas cargas de' em tempos retardados t_r dados por

$$t_r = t - \frac{R}{c} \quad (28.50)$$

Além disso, pelo item 2 das considerações, podemos expandir em série de Taylor grandezas no tempo retardado em termos do tempo atual. Iniciamos com

$$\vec{v}(t_r) = \vec{v}(t) + \frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_t (t_r - t) + \frac{1}{2} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}\Big|_t (t_r - t)^2 + \dots$$

ou, usando 28.50, lembrando a condição 28.48,

$$\vec{v}(t_r) = -\frac{\vec{a}R}{c} + \frac{\dot{\vec{a}}}{2} \frac{R^2}{c^2} + \dots \quad (28.51)$$

Para a aceleração, temos

$$\vec{a}(t_r) = \vec{a}(t) + \frac{d\vec{a}}{dt}\Big|_t (t_r - t) + \dots$$

ou

$$\vec{a}(t_r) = \vec{a}(t) - \dot{\vec{a}}(t) \frac{R}{c} + \dots \quad (28.52)$$

Outro fator importante é

$$[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3 = R^3 \left[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}(t_r)}{Rc} \right]^3$$

ou, usando 28.51,

$$[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3 = R^3 \left[1 - \frac{1}{Rc} \vec{R} \cdot \left(-\frac{\vec{a}R}{c} + \frac{\dot{\vec{a}}}{2} \frac{R^2}{c^2} + \dots \right) \right]^3$$

ou

$$[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^3 = R^3 \left[1 + \frac{\vec{R} \cdot \vec{a}}{c^2} - \frac{R\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}}{2c^3} + \dots \right]^3$$

de modo que

$$[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 + \frac{\vec{R} \cdot \vec{a}}{c^2} - \frac{R\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}}{2c^3} + \dots \right]^{-3}$$

ou, em série de Taylor,

$$[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^{-3} = R^{-3} \left[1 - \frac{3}{c^2} \vec{R} \cdot \vec{a} + \frac{3R}{2c^3} \vec{R} \cdot \dot{\vec{a}} + \dots \right] \quad (28.53)$$

Agora, na equação 28.49, podemos, por causa da consideração do item 2, desprezar o termo β^2 em comparação com o número 1, de modo que temos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \vec{R} - R\vec{\beta} + \vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \frac{\vec{a}}{c}] \right\} [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^{-3}$$

ou

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \vec{R} - \frac{R}{c} \vec{v}(t_r) + \frac{1}{c^2} \vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \vec{a}(t_r)] \right\} [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^{-3}$$

Usando a identidade 1.19a, podemos escrever

$$\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \vec{a}] = (\vec{R} \cdot \vec{a})(\vec{R} - R\vec{\beta}) - [\vec{R} \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta})] \vec{a}$$

ou

$$\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \vec{a}] = (\vec{R} \cdot \vec{a})(\vec{R} - R\vec{\beta}) - [R^2 - R\vec{R} \cdot \vec{\beta}] \vec{a}$$

ou ainda,

$$\vec{R} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \vec{a}] = [\vec{R} \cdot \vec{a}(t_r)] \left[\vec{R} - \frac{R}{c} \vec{v}(t_r) \right] - R \left[R - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \vec{v}(t_r) \right] \vec{a}(t_r)$$

Portanto, o campo elétrico fica

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \vec{R} - \frac{R}{c} \vec{v}(t_r) + \frac{1}{c^2} [\vec{R} \cdot \vec{a}(t_r)] \left[\vec{R} - \frac{R}{c} \vec{v}(t_r) \right] \right. \\ \left. - \frac{R}{c^2} \left[R - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \vec{v}(t_r) \right] \vec{a}(t_r) \right\} [R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}]^{-3} \end{aligned}$$

Agora substituimos as expansões 28.51–28.53, de modo que temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \vec{R} - \frac{R}{c} \left(-\frac{\vec{a}R}{c} + \frac{\dot{\vec{a}} R^2}{2c^2} + \dots \right) \right. \\ + \frac{1}{c^2} \left[\vec{R} \cdot \left(\vec{a} - \dot{\vec{a}} \frac{R}{c} + \dots \right) \right] \left[\vec{R} - \frac{R}{c} \left(-\frac{\vec{a}R}{c} + \frac{\dot{\vec{a}} R^2}{2c^2} + \dots \right) \right] \\ \left. - \frac{R}{c^2} \left[R - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \left(-\frac{\vec{a}R}{c} + \frac{\dot{\vec{a}} R^2}{2c^2} + \dots \right) \right] \left(\vec{a} - \dot{\vec{a}} \frac{R}{c} + \dots \right) \right\} \\ \times R^{-3} \left[1 - \frac{3}{c^2} \vec{R} \cdot \vec{a} + \frac{3R}{2c^3} \vec{R} \cdot \dot{\vec{a}} + \dots \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \left\{ \vec{R} + \frac{R^2}{c^2} \vec{a} - \frac{R^3}{c^3} \frac{\dot{\vec{a}}}{2} + \dots \right. \\ & + \frac{1}{c^2} \left[\vec{R} \cdot \vec{a} - \frac{R}{c} \vec{R} \cdot \dot{\vec{a}} + \dots \right] \left[\vec{R} + \frac{R^2}{c^2} \vec{a} - \frac{R^3}{c^3} \frac{\dot{\vec{a}}}{2} + \dots \right] \\ & - \frac{1}{c^2} \left[R^2 + \frac{R^2}{c^2} \vec{R} \cdot \vec{a} - \frac{R^3}{c^3} \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}}{2} + \dots \right] \left(\vec{a} - \dot{\vec{a}} \frac{R}{c} + \dots \right) \Big\} \\ & \times \left[1 - \frac{R}{c^2} \vec{R} \cdot \vec{a} + \frac{3R}{2c^3} \vec{R} \cdot \dot{\vec{a}} + \dots \right]\end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \left\{ \vec{R} + \frac{R^2}{c^2} \vec{a} - \frac{R^3}{c^3} \frac{\dot{\vec{a}}}{2} + \dots + \frac{1}{c^2} \left[\vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{a}) \right. \right. \\ & + \frac{R^2}{c^2} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{a} - \frac{R^3}{c^3} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \frac{\dot{\vec{a}}}{2} - \frac{R}{c} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}) \vec{R} - \frac{R^3}{c^3} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}) \vec{a} + \dots \Big] \\ & - \frac{1}{c^2} \left[R^2 \vec{a} - \frac{R^3}{c} \dot{\vec{a}} + \frac{R^2}{c^2} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{a} - \frac{R^3}{c^3} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \dot{\vec{a}} - \frac{R^3}{c^3} \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}}{2} \vec{a} + \dots \right] \Big\} \\ & \times \left[1 - \frac{3}{c^2} \vec{R} \cdot \vec{a} + \frac{3R}{2c^3} \vec{R} \cdot \dot{\vec{a}} + \dots \right]\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \left\{ \vec{R} + \frac{R^2}{c^2} \vec{a} - \frac{R^3}{c^3} \frac{\dot{\vec{a}}}{2} + \frac{\vec{R}}{c^2} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \right. \\ & + \frac{R^2}{c^4} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{a} - \frac{R^3}{c^5} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \frac{\dot{\vec{a}}}{2} - \frac{R}{c^3} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}) \vec{R} - \frac{R^3}{c^5} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}) \vec{a} \\ & - \frac{R^2}{c^2} \vec{a} + \frac{R^3}{c^3} \dot{\vec{a}} - \frac{R^2}{c^4} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{a} + \frac{R^3}{c^5} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \dot{\vec{a}} + \frac{R^3}{c^5} \frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}}{2} \vec{a} + \dots \Big\} \\ & \times \left[1 - \frac{3}{c^2} \vec{R} \cdot \vec{a} + \frac{3R}{2c^3} \vec{R} \cdot \dot{\vec{a}} + \dots \right]\end{aligned}$$

que se simplifica para

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \left\{ \vec{R} + \frac{R^3}{c^3} \frac{\dot{\vec{a}}}{2} + \frac{\vec{R}}{c^2} (\vec{R} \cdot \vec{a}) + \frac{R^3}{c^5} (\vec{R} \cdot \vec{a}) \frac{\dot{\vec{a}}}{2} \right. \\ & - \frac{R}{c^3} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}) \vec{R} - \frac{R^3}{2c^5} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}}) \vec{a} + \dots \Big\} \left[1 - \frac{3}{c^2} \vec{R} \cdot \vec{a} + \frac{3R}{2c^3} \vec{R} \cdot \dot{\vec{a}} + \dots \right]\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left\{ \vec{R} - \frac{3}{c^2}(\vec{R} \cdot \vec{a})\vec{R} + \frac{3R}{2c^3}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{R} + \frac{R^3}{c^3} \frac{\dot{\vec{a}}}{2} \right. \\ - \frac{3R^3}{2c^5}(\vec{R} \cdot \vec{a})\dot{\vec{a}} + \frac{3R^4}{4c^6}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})\dot{\vec{a}} + \frac{\vec{R}}{c^2}(\vec{R} \cdot \vec{a}) - \frac{3}{c^4}(\vec{R} \cdot \vec{a})^2 \vec{R} \\ + \frac{3R}{c^5}(\vec{R} \cdot \vec{a})(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{R} + \frac{R^3}{c^5}(\vec{R} \cdot \vec{a}) \frac{\dot{\vec{a}}}{2} - \frac{3R^3}{2c^7}(\vec{R} \cdot \vec{a})^2 \dot{\vec{a}} \\ + \frac{3R^4}{4c^8}(\vec{R} \cdot \vec{a})(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})\dot{\vec{a}} - \frac{R}{c^3}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{R} + \frac{3R}{c^5}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{R} \cdot \vec{a})\vec{R} \\ - \frac{3R^2}{2c^6}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})^2 \vec{R} - \frac{R^3}{2c^5}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{a} + \frac{3R^3}{2c^7}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})(\vec{R} \cdot \vec{a})\vec{a} \\ \left. - \frac{3R^4}{4c^8}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})^2 \vec{a} + \dots \right\}\end{aligned}$$

ou, mantendo apenas termos que sejam até a ordem de $\frac{R^3}{c^3}$,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left\{ \vec{R} - \frac{2}{c^2}(\vec{R} \cdot \vec{a})\vec{R} + \frac{R}{2c^3}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{R} + \frac{R^3}{c^3} \frac{\dot{\vec{a}}}{2} \right\}$$

ou ainda,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{2}{c^2 R^3}(\vec{R} \cdot \vec{a})\vec{R} + \frac{1}{2c^3 R^2}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{a}})\vec{R} + \frac{\dot{\vec{a}}}{2c^3} \right\} \quad (28.54)$$

Podemos escrever essa equação numa forma mais interessante se usarmos uma notação tensorial. Nesse caso, a componente i do campo elétrico fica

$$\mathcal{E}_i(\vec{r}, t) = \frac{de'}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{R_i}{R^3} - \frac{2}{c^2 R^3}(R_j a_j)R_i + \frac{1}{2c^3 R^2}(R_j \dot{a}_j)R_i + \frac{\dot{a}_i}{2c^3} \right\} \quad (28.55)$$

onde devemos lembrar que, quando um índice aparece repetido, como em $R_j a_j$, isso indica uma soma sobre os valores possíveis de j , ou seja, em três dimensões, $j = 1, \dots, 3$. Para continuar, vamos precisar de duas identidades. Para a primeira, precisamos calcular

$$\oint x d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \theta \cos \phi \sin \theta d\theta d\phi$$

ou

$$\oint x d\Omega = r \int_0^\pi r \sin^2 \theta [\sin \phi]_0^{2\pi}, d\theta$$

e então,

$$\oint x d\Omega = 0 \quad (28.56)$$

De forma idêntica, podemos mostrar que

$$\oint y d\Omega = 0 \quad (28.57)$$

e

$$\oint z d\Omega = 0 \quad (28.58)$$

ou seja, para qualquer componente i do vetor $\vec{r}$ vale

$$\oint r_i d\Omega = 0 \quad (28.59)$$

A outra propriedade envolve

$$\oint xy d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \theta \cos \phi r \sin \theta \sin \phi \sin \theta d\theta d\phi$$

ou

$$\oint xy d\Omega = r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \frac{\sin 2\phi}{2} d\theta d\phi$$

ou ainda,

$$\oint xy d\Omega = -r^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta \left[\frac{\cos 2\phi}{4} \right]_0^{2\pi} d\theta$$

e então,

$$\oint xy d\Omega = 0 \quad (28.60)$$

Por outro lado, calculando

$$\oint x^2 d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \sin \theta d\theta d\phi$$

temos

$$\oint x^2 d\Omega = r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\theta d\phi$$

ou

$$\oint x^2 d\Omega = \frac{r^2}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{2\pi} d\theta$$

ou ainda,

$$\oint x^2 d\Omega = \pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

e então,

$$\oint x^2 d\Omega = \pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

ou

$$\oint x^2 d\Omega = -\pi r^2 [\cos \theta]_0^\pi + \pi r^2 \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi$$

ou ainda,

$$\oint x^2 d\Omega = 2\pi r^2 - \frac{2\pi}{3} r^2$$

e, finalmente,

$$\oint x^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} r^2 \quad (28.61)$$

Seguindo o mesmo procedimento, é possível mostrar que, dadas duas componentes quaisquer de $\vec{r}$, temos

$$\oint r_i r_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} r^2 \delta_{ij} \quad (28.62)$$

As equações 28.59 e 28.62 são necessárias para darmos continuidade à obtenção da reação de radiação para um elétron. O campo elétrico 28.55 é o campo gerado pela carga de' na posição da carga de . Lembrando que a carga está distribuída respeitando uma simetria esférica (consideração 4), podemos escrever

$$de' = \rho(r')dV = \rho(r')4\pi r'^2 dr' = \rho(r')r'^2 dr' d\Omega$$

onde $\rho(r')$ representa a densidade de carga volumétrica no elétron. Assim, a componente i do campo elétrico total numa dada posição $\vec{r}$ é obtida integrando-se 28.55, ou seja,

$$\mathcal{E}_i^{tot}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'} \int_{\Omega} \rho(r') \left\{ \frac{R_i}{R^3} - \frac{2}{c^2 R^3} (R_j a_j) R_i + \frac{1}{2c^3 R^2} (R_j \dot{a}_j) R_i + \frac{\dot{a}_i}{2c^3} \right\} r'^2 dr' d\Omega$$

$$\mathcal{E}_i^{tot}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'} \rho(r') r'^2 dr' \times \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{R_i}{R^3} - \frac{2a_j}{c^2 R^3} R_j R_i + \frac{\dot{a}_j}{2c^3 R^2} R_j R_i + \frac{\dot{a}_i}{2c^3} \right] d\Omega \right\}$$

Usamos agora as equações 28.59 e 28.62, de modo que temos

$$\mathcal{E}_i^{tot}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'} \rho(r') r'^2 dr' \times \left\{ -\frac{2a_j}{c^2 R^3} \frac{4\pi R^2}{3} \delta_{ij} + \frac{\dot{a}_j}{2c^3 R^2} \frac{4\pi R^2}{3} \delta_{ij} + 4\pi \frac{\dot{a}_i}{2c^3} \right\}$$

ou

$$\mathcal{E}_i^{tot}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r'} \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \left[-\frac{2a_i}{3c^2 R} + \frac{2\dot{a}_i}{3c^3} \right]$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{E}_i^{tot}(\vec{r}, t) = -\frac{a_i}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int_{e'} \frac{de'}{R} + \frac{\dot{a}_i}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{e'} de'$$

ou

$$\mathcal{E}_i^{tot}(\vec{r}, t) = -\frac{a_i}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int_{e'} \frac{de'}{R} + \frac{e\mu_0}{6\pi c} \dot{a}_i \quad (28.63)$$

A componente i da força total que a carga de sente é dada por

$$\mathcal{F}_i(\vec{r}, t) = de \mathcal{E}_i^{tot}$$

ou, utilizando 28.63,

$$\mathcal{F}_i(\vec{r}, t) = de \left\{ -\frac{a_i}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int_{e'} \frac{de'}{R} + \frac{e\mu_0}{6\pi c} \dot{a}_i \right\} \quad (28.64)$$

Assim, a componente i da força total é obtida integrando-se a equação 28.64 sobre todo o elétron, ou seja,

$$\mathcal{F}_i^{tot}(\vec{r}, t) = \int_e de \left\{ -\frac{a_i}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int_{e'} \frac{de'}{R} + \frac{e\mu_0}{6\pi c} \dot{a}_i \right\}$$

ou

$$\mathcal{F}_i^{tot}(\vec{r}, t) = -\frac{a_i}{6\pi\epsilon_0 c^2} \int_e \int_{e'} \frac{dede'}{R} + \frac{e\mu_0}{6\pi c} \dot{a}_i \int_e de$$

que pode ser escrita como

$$\mathcal{F}_i^{tot}(\vec{r}, t) = -\left\{ \frac{4}{3c^2} \left[\frac{1}{2} \int_e \int_{e'} de \frac{de'}{4\pi\epsilon_0 R} \right] \right\} a_i + \frac{e^2\mu_0}{6\pi c} \dot{a}_i$$

Agora, note que a fração dentro da integral corresponde ao potencial elétrico gerado por de' sobre $de = \rho dV$. Então, comparando com a equação 5.16, vemos que o termo entre colchetes pode ser identificado como sendo a energia potencial elétrica do sistema, de modo que temos

$$\mathcal{F}_i^{tot}(\vec{r}, t) = -\frac{4U_0}{3c^2} a_i + \frac{e^2\mu_0}{6\pi c} \dot{a}_i$$

ou, considerando as três componentes,

$$\vec{\mathcal{F}}^{tot}(\vec{r}, t) = -\frac{4U_0}{3c^2} \vec{a} + \frac{e^2\mu_0}{6\pi c} \dot{\vec{a}} \quad (28.65)$$

Note que novamente aparece um termo com características de massa, dado por

$$\mathcal{M} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \quad (28.66)$$

só que, no presente modelo, há um “excesso” de $\frac{1}{3} \frac{U_0}{c^2}$ para que a relação relativística $E = mc^2$ seja satisfeita. A massa acima pode ser chamada de *massa eletromagnética*, pois resulta diretamente do efeito dos campos eletromagnéticos. A massa faltante está associada com a energia necessária para tornar o elétron estável, já que a tendência natural seria que as cargas constituintes, como têm todas o mesmo sinal, não se mantivessem unidas. Nesse caso, um tratamento baseado em Mecânica Quântica é necessário, para incluir o efeito do spin, por exemplo. No caso de um próton, que tem estrutura interna e é formado por três quarks que interagem através dos glúons, parte dessa energia vem dos glúons que mantêm os quarks que formam o próton unidos. É importante notar, também, que a reação de radiação corresponde ao segundo termo do lado direito em 28.65, e temos novamente a fórmula de Abraham-Lorentz 28.5, como pode ser visto se equacionarmos a segunda lei de Newton, na forma

$$\vec{\mathcal{F}}^{tot}(\vec{r}, t) = -\mathcal{M}\vec{a} + \frac{e^2\mu_0}{6\pi c}\dot{\vec{a}} = m_0\vec{a}$$

Então, temos

$$\frac{e^2\mu_0}{6\pi c}\dot{\vec{a}} = (m_0 + \mathcal{M})\vec{a}$$

e, considerando que a massa observável é a soma $m_0 + \mathcal{M}$, temos

$$\vec{\mathcal{F}}_{rad} = \frac{e^2\mu_0}{6\pi c}\dot{\vec{a}} = m\vec{a}$$

Vamos considerar agora que uma força externa atue sobre uma partícula de carga e . Nesse caso, a segunda lei de Newton seria escrita

$$\vec{F}_{ext} + \vec{\mathcal{F}}^{tot} = m_0\vec{a}$$

onde $\vec{\mathcal{F}}^{tot}$ é dada por 28.65. Portanto, temos

$$\vec{F}_{ext} - \frac{4U_0}{3c^2}\vec{a} + \frac{e^2\mu_0}{6\pi c}\dot{\vec{a}} = m_0\vec{a}$$

ou, usando 28.66,

$$\vec{F}_{ext} + \frac{e^2\mu_0}{6\pi c}\dot{\vec{a}} = (m_0 + \mathcal{M})\vec{a}$$

que fica, ainda,

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a} - \frac{e^2\mu_0}{6\pi c}\dot{\vec{a}} \quad (28.67)$$

onde m é a massa observável. Vamos recordar a definição da constante de tempo τ_{rad} , dada pela equação 28.8, que fica, no nosso caso,

$$\tau_{rad} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi m c} \quad (28.68)$$

Assim, podemos reescrever a equação 28.67 como

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a} - m\tau_{rad}\dot{\vec{a}}$$

ou

$$\vec{F}_{ext} = m(\vec{a} - \tau_{rad}\dot{\vec{a}})$$

ou ainda,

$$\frac{\vec{F}_{ext}}{m} = \vec{a} - \tau_{rad}\dot{\vec{a}}$$

Vamos multiplicar agora essa equação por $e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}}$, ou seja,

$$\frac{\vec{F}_{ext}}{m} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}} = (\vec{a} - \tau_{rad}\dot{\vec{a}}) e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}} \quad (28.69)$$

Agora, note que

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}}] = \frac{d\vec{a}}{dt} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}} - \frac{1}{\tau_{rad}} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}} \vec{a}$$

ou

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}}] = \left(\dot{\vec{a}} - \frac{\vec{a}}{\tau_{rad}} \right) e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}}] = \frac{1}{\tau_{rad}} (\tau_{rad} \dot{\vec{a}} - \vec{a}) e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}} \quad (28.70)$$

Comparando as equações 28.69 e 28.50, vemos que podemos escrever

$$\frac{\vec{F}_{ext}}{m} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}} = -\tau_{rad} \frac{d}{dt} [\vec{a} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}}]$$

ou

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}}] = -\frac{\vec{F}_{ext}}{m\tau_{rad}} e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}}$$

Integrando agora de um tempo t_0 até t , temos

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} [\vec{a} e^{-\frac{t'}{\tau_{rad}}}] dt' = - \int_{t_0}^t \frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m\tau_{rad}} e^{-\frac{t'}{\tau_{rad}}} dt'$$

ou

$$[\vec{a} e^{-\frac{t'}{\tau_{rad}}}]_{t_0}^t = -\frac{1}{\tau_{rad}} \int_{t_0}^t \frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m} e^{-\frac{t'}{\tau_{rad}}} dt'$$

ou ainda,

$$\vec{a}(t) e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}} - \vec{a}(t_0) e^{-\frac{t_0}{\tau_{rad}}} = -\frac{1}{\tau_{rad}} \int_{t_0}^t \frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m} e^{-\frac{t'}{\tau_{rad}}} dt'$$

que pode ser escrito como

$$\vec{a}(t) e^{-\frac{t}{\tau_{rad}}} = \vec{a}(t_0) e^{-\frac{t_0}{\tau_{rad}}} - \frac{1}{\tau_{rad}} \int_{t_0}^t \frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m} e^{-\frac{t'}{\tau_{rad}}} dt'$$

ou

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(t_0) e^{\frac{t-t_0}{\tau_{rad}}} - e^{\frac{t}{\tau_{rad}}} \frac{1}{\tau_{rad}} \int_{t_0}^t \frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m} e^{-\frac{t'}{\tau_{rad}}} dt'$$

e, finalmente,

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(t_0)e^{\frac{t-t_0}{\tau_{rad}}} - \frac{1}{\tau_{rad}} \int_{t_0}^t \frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m} e^{-\frac{t'-t}{\tau_{rad}}} dt' \quad (28.71)$$

Note que, para qualquer valor finito de t_0 , se $\vec{a}(t_0) \neq 0$, o primeiro termo do lado direito cresce exponencialmente com t , dando origem à solução divergente já discutida anteriormente. Tendo em vista que escolher $\vec{a}(t_0) = 0$ é muito restritivo, uma opção mais satisfatória consiste em considerar $t_0 \rightarrow \infty$, de modo que, nesse caso, o primeiro termo do lado direito vai a zero para qualquer $\vec{a}(t_0)$. Temos então, nesse caso,

$$\vec{a}(t) = -\frac{1}{\tau_{rad}} \int_{\infty}^t \frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m} e^{-\frac{t'-t}{\tau_{rad}}} dt'$$

ou, invertendo os limites de integração,

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{\tau_{rad}} \int_t^{\infty} \frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m} e^{-\frac{t'-t}{\tau_{rad}}} dt' \quad (28.72)$$

Essa equação nos fornece um resultado interessante. A função exponencial $e^{-\frac{x}{x_0}}$ decai rapidamente com x , e a rapidez do decaimento é dada pelo valor característico x_0 . Após algumas vezes esse valor x_0 , ela é praticamente nula. Assim, a equação 28.25 pode ser entendida como sendo, basicamente, o valor médio de $\frac{\vec{F}_{ext}(t')}{m}$ num período de tempo característico dado por τ_{rad} . O interessante é que no integrando aparece o termo $t' - t$, indicando que o valor da aceleração no tempo t , ou seja, $\vec{a}(t)$, é calculado considerando-se tempos t' maiores que t . Dizendo de outro modo, a força nos instantes de tempo t' posteriores a t dentro de um intervalo característico de $[t, t + \tau_{rad}]$ é a responsável pela aceleração da partícula no tempo t , fazendo com que a relação de causalidade seja violada por um intervalo de tempo da ordem de τ_{rad} , que para um elétron vale, conforme já dissemos, $\tau_{rad}^e \approx 6,24 \times 10^{-24}$ s. Note que considerações clássicas como as que fizemos já não são aplicáveis nessa ordem de intervalo de tempo, de modo que um tratamento quântico é requerido e, nesse caso, relações de causalidade podem ser violadas desde que não sejam mensuráveis, por causa do princípio de incerteza. Outro fato a comentar é que mesmo correções relativísticas à equação 28.25 não alteram a questão da “quebra” de causalidade, indicando que o problema é de fato quântico.

Com o estudo da reação de radiação, encerramos nosso estudo do Eletromagnetismo Clássico. É importante notar que o tema Eletromagnetismo, longe de ter sido esgotado neste livro, é um campo dinâmico e apresenta muitos outros tópicos interessantes, que podem ser consultados nas referências bibliográficas sugeridas.

28.4 Exercícios

- 28.1** Determine a reação de radiação para uma carga pontual em movimento circular horizontal com raio a . A partícula tem carga Q e massa m .
- 28.2** Determine a reação de radiação para um oscilador harmônico amortecido com massa m e carga Q pontual, sendo a constante da mola do oscilador dada por k_0 e o amortecimento descrito pela constante γ ($\vec{F}_{amort} = -\gamma\vec{v}$).
- 28.3** Ache a reação de radiação para uma partícula com carga Q em queda livre vertical nas proximidades da superfície da Terra.

APÊNDICES

Apêndice G

Correntes Elétricas Variáveis

Até estudarmos o fenômeno da indução eletromagnética, estávamos considerando sistemas e circuitos nos quais as correntes elétricas eram estacionárias, ou seja, seus valores eram constantes no tempo. Vários fenômenos importantes podem ser estudados com essa restrição, mas não todos, em particular aqueles que envolvem a produção e uso de campos magnéticos variáveis no tempo. Nosso objetivo agora é estudar circuitos elétricos em que as correntes sejam variáveis. Em particular, estaremos interessados num tipo específico de dependência temporal para as correntes elétricas, a saber, uma variação periódica no tempo através de uma função do tipo $\sin \omega t$ ou $\cos \omega t$, onde ω é uma frequência angular. O motivo de tal interesse se justifica pela enorme aplicação prática das correntes alternadas, visto que praticamente todos os aparelhos elétricos que utilizamos fazem uso desse tipo de corrente, com destaque para os aparelhos que fazem uso de motores elétricos, como ventiladores, liquidificadores, etc. Assim, antes de iniciar o estudo propriamente dito de circuitos de corrente alternada, é útil apresentar de forma simplificada o funcionamento de um motor elétrico.

É interessante notar que o uso corriqueiro da denominação corrente alternada pode induzir ao leitor a idéia de que, quando se fala de correntes alternadas, necessariamente elas são funções do tempo com uma dependência do tipo $i = i_0 \cos \omega t$ ou $i = i_0 \sin \omega t$. Essa idéia é incorreta. Por corrente alternada entende-se qualquer tipo de corrente elétrica que *alterne* o seu sentido, ou seja, uma parte do tempo ela percorre o circuito num certo sentido e noutra ela o faz no sentido oposto, e esse vai-e-vem pode ser periódico ou não. O tipo de corrente que usamos em casa é alternado e periódico, por isso surge a identificação — enganosa — de corrente alternada com corrente periódica.

G.1 Geradores e Motores Elétricos

Considerando que você esteja acompanhando nosso estudo desde o princípio, após ler a introdução a este capítulo, provavelmente deve ter feito a si mesmo a pergunta: por que utilizamos correntes alternadas periódicas e não correntes contínuas, cuja aplicação em circuitos é bem mais simples, tornando a análise destes bem mais fácil? A resposta é simples: por questões práticas, a produção de corrente contínua (ou de tensão contínua, dependendo do ponto de vista) em larga escala, para ser consumida por um grande número de pessoas, como os moradores de uma cidade, por exemplo, é muito mais complicada e cara do que a de corrente alternada (ou tensão alternada, como queiram). Além disso, o fato de a corrente ser alternada simplifica muito o funcionamento dos motores elétricos, assunto que vamos tratar em seguida. Portanto, nossas casas são alimentadas com tensões alternadas, que produzem correntes alternadas, e por causa disso precisamos entender como se faz a análise deste tipo de circuitos.

Correntes ou tensões alternadas são produzidas por geradores elétricos de corrente alternada. Um gerador elétrico elementar foi discutido na seção 18.1 (veja a figura 18.9). Este gerador é muito rudimentar e não é muito eficiente, servindo apenas para introduzir a idéia de corrente induzida. Para produzir um gerador bem mais prático, podemos considerar uma montagem como a da figura G.1 abaixo.

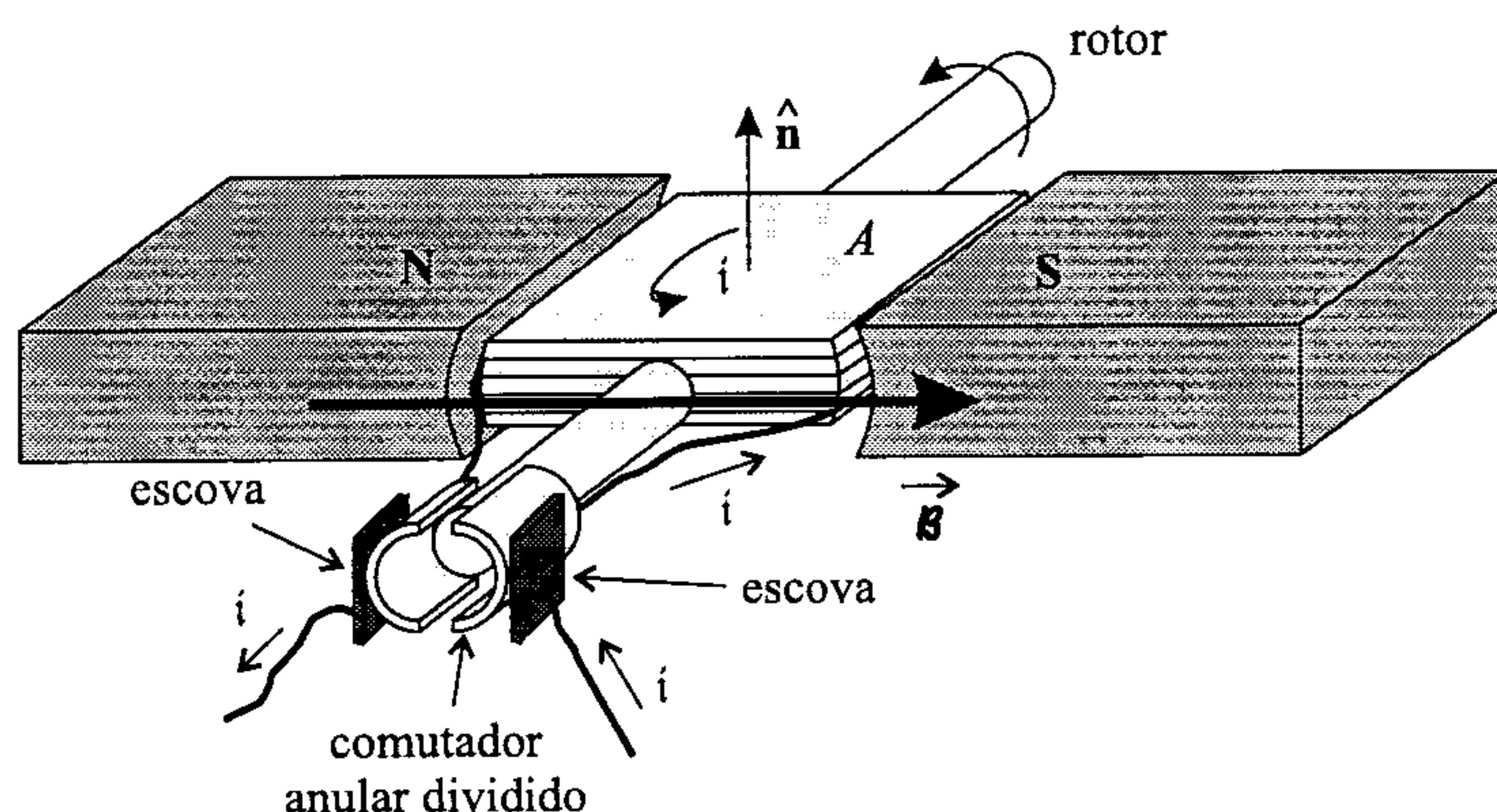


Figura G.1: Esquema de um gerador elétrico de corrente alternada.

Na figura, vemos uma bobina formada por N espiras de área A enroladas

em torno de um apoio retangular móvel, montado num rotor, que pode girar livremente em torno de seu eixo. As espiras estão situadas dentro de um campo magnético constante e aproximadamente homogêneo, produzido por ímãs permanentes, nos geradores de pequenas dimensões, ou por eletroímãs, nos geradores maiores. Os ímãs são fixos e eles formam o *stator*.

Quando o rotor está parado, o fluxo magnético através da área da bobina é constante. Portanto, nessa situação não há nenhuma *fem* induzida e, conseqüentemente, nenhuma corrente induzida. O fluxo magnético através de uma espira é calculado mediante

$$\Phi_1 = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

Sendo θ o ângulo entre $\vec{B}$ e $\hat{n}$ (90° na posição mostrada na figura), temos

$$\Phi_1 = \int_S B \cos \theta dA$$

Como o rotor está parado e o campo é homogêneo,

$$\Phi_1 = B \cos \theta \int_S dA = BA \cos \theta$$

O fluxo através de N espiras fica

$$\Phi_N = NBA \cos \theta$$

e ele é um fluxo constante, pois o rotor está inicialmente parado. Se, entretanto, o rotor for submetido a um torque externo, como, por exemplo, se ele for conectado a uma turbina numa usina hidrelétrica, de forma que a água caia sobre a turbina e produza nela um movimento de rotação, ele vai girar e o fluxo através das espiras vai deixar de ser constante. Conseqüentemente, haverá uma *fem* $\mathcal{E}$ induzida, dada por 18.5,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

ou seja,

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(NBA \cos \theta)$$

que fica, em geral,

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\mathcal{B}}{dt} A \cos \theta - N\mathcal{B} \frac{dA}{dt} \cos \theta + N\mathcal{B}A \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

Como o campo magnético é constante no tempo e a área das espiras é fixa, os dois primeiros termos da equação acima se anulam. Além disso, o mecanismo do gerador é construído de forma a funcionar com uma velocidade angular praticamente constante, de forma que podemos escrever

$$\theta = \omega t$$

sendo que, por convenção, para $t = 0$, $\theta = 0$, e o plano das espiras está perpendicular ao campo magnético. Dessa forma, a *fem* induzida fica

$$\mathcal{E} = N\mathcal{B}A\omega \sin \omega t$$

enquanto o fluxo magnético é

$$\Phi_N = N\mathcal{B}A \cos \omega t$$

Note que, quando o fluxo magnético Φ é máximo, a *fem* $\mathcal{E}$ se anula, e vice-versa. Essa *fem* fica disponível nos terminais do gerador, chamados de escovas. Ela é uma função senoidal do tempo, sendo portanto periódica. Entretanto, por causa do comutador anular dividido que aparece na figura G.1, ela não é alternada. Como o comutador é dividido, ocorre uma inversão nas ligações da bobina com o meio externo a cada meia volta do rotor ¹. Para verificar isso, considere que a bobina parta da posição $\theta = 0$, na qual o fluxo através dela é máximo, e gire no sentido indicado na figura. O fluxo através dela começa a diminuir à medida que θ cresce. Como o fluxo magnético diminui, aparece uma *fem* de retorno que tenta impedir a diminuição do fluxo. Aparece uma corrente induzida que produz um campo magnético induzido orientado de tal forma que seu fluxo através da bobina compense, ao menos em parte, a diminuição do fluxo externo. O campo magnético induzido na região interna à área da bobina deve estar orientado no mesmo sentido que o campo externo. Portanto, a corrente induzida circula no sentido mostrado na figura, entrando no gerador pela escova da direita e saindo para o circuito exterior pela escova

¹ Se o comutador não fosse dividido, mas sim inteiro, o circuito estaria em curto-circuito, o gerador iria aquecer por efeito Joule e provavelmente seria danificado.

da esquerda, como indicado ². A corrente e a tensão induzidas aumentam com o decorrer do giro, e o fluxo diminui, até que, em $\theta = \frac{\pi}{2}$ (a posição mostrada na figura), o fluxo se anula e a corrente e tensão atingem seu valor máximo. A partir daí, o fluxo através da área da bobina começa a aumentar, o que faz com que ela tente se opor a esse efeito. Para fazer isso, ela gera uma corrente induzida no sentido oposto ao inicial. Se a corrente na bobina fosse nula, o resultado seria uma corrente percorrendo o circuito no sentido contrário ao indicado. Entretanto, como a corrente que percorre a bobina está no seu valor máximo, ocorre uma soma algébrica de correntes, e o resultado é que a corrente total ainda percorre o circuito no sentido indicado, mas seu valor diminui até se anular em $\theta = \pi$, quando o fluxo através da bobina é máximo novamente.

As posições $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ são aquelas em que ocorre a troca de contatos do comutador. Assim, quando passamos por $\theta = \pi$, é como se o sistema estivesse partindo novamente de $\theta = 0$, e a corrente percorre o circuito novamente, como discutido acima. Ela é periódica, mas não chega a ser alternada. Um gráfico da corrente é mostrado na figura G.2. Esse é um gerador de *meia-onda*, porque só produz a parte positiva da oscilação completa do seno (ou cosseno).

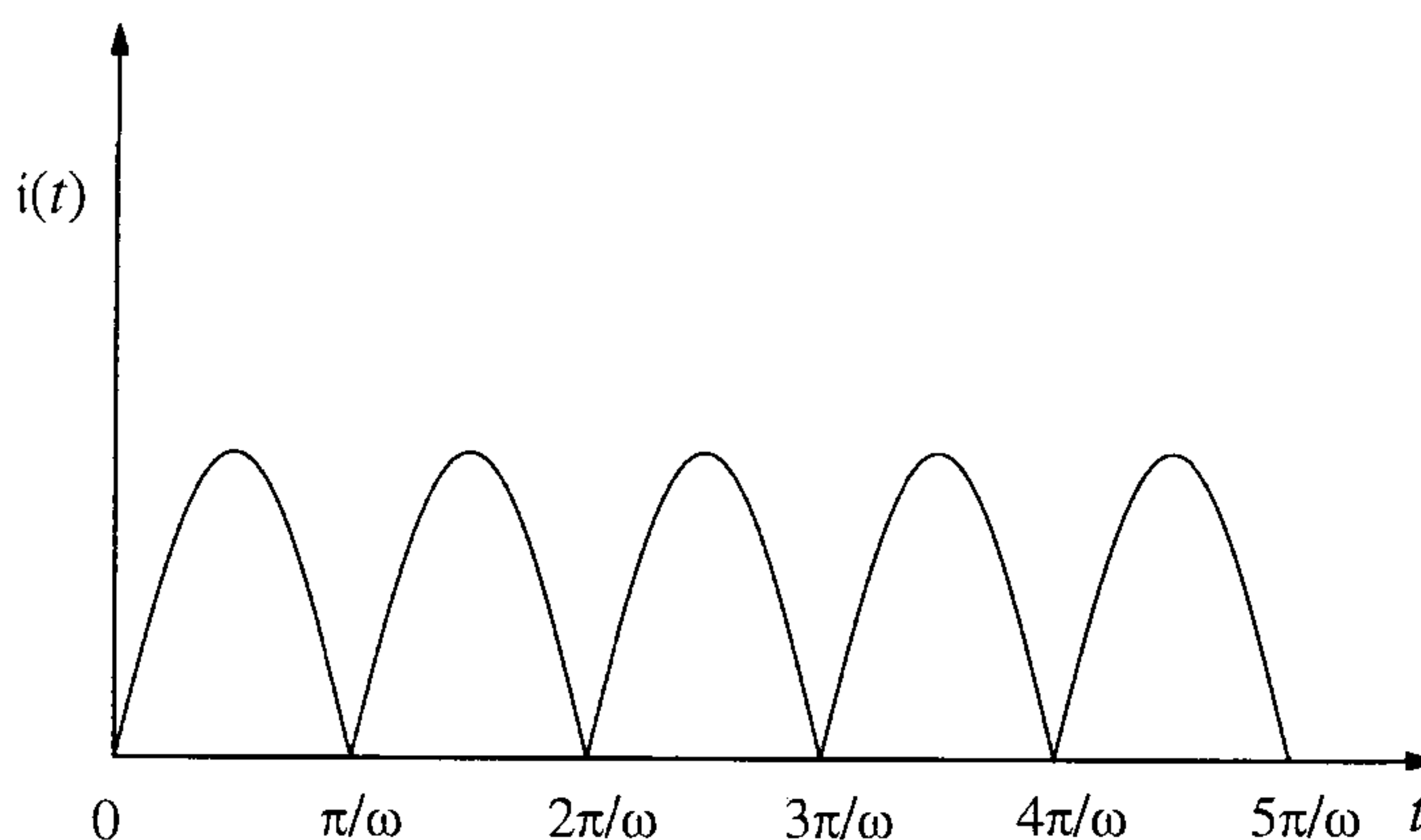


Figura G.2: Gráfico da corrente induzida para o gerador de meia-onda.

Note que o fluxo magnético sofre uma oscilação completa, como se observa

² Note que esse resultado também pode ser obtido se considerarmos a força magnética exercida nos elétrons do fio que formam a bobina, por meio da regra da mão direita.

na figura G.3.

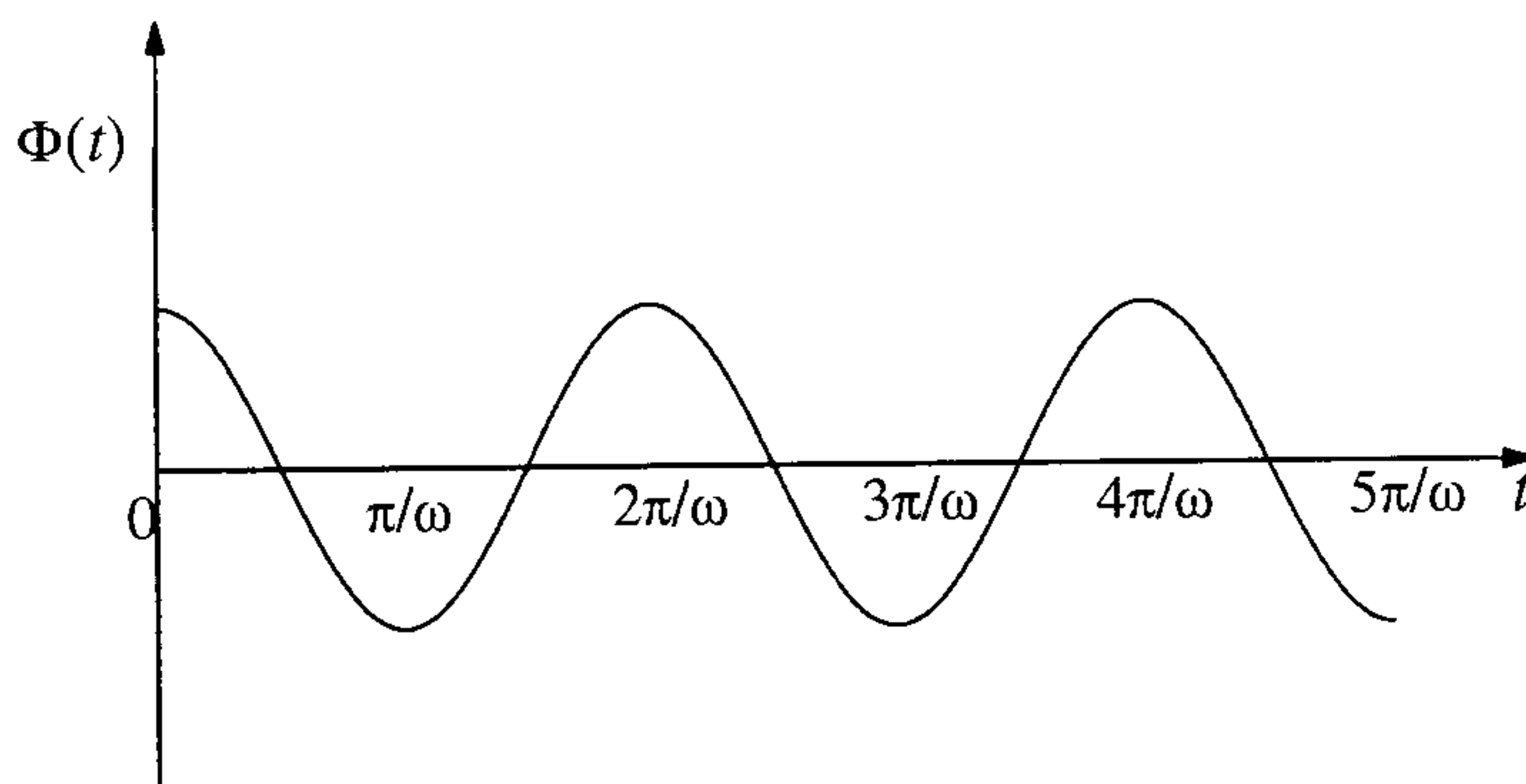


Figura G.3: Gráfico do fluxo magnético para o gerador de meia-onda.

A corrente $i(t)$ gerada pelo gerador da figura G.1 é também chamada de *corrente contínua pulsante* ou *cc pulsante*, e, matematicamente, ela poderia ser descrita por

$$i(t) = |i_0 \sin(\omega t)|$$

Nessa forma ela não poderia ser utilizada nas aplicações que envolvem correntes contínuas constantes. É possível “alisar” a tensão ou corrente pulsada que sai desse gerador se no seu rotor forem empregadas bobinas, ou enrolamentos, como mostrado na figura G.4.

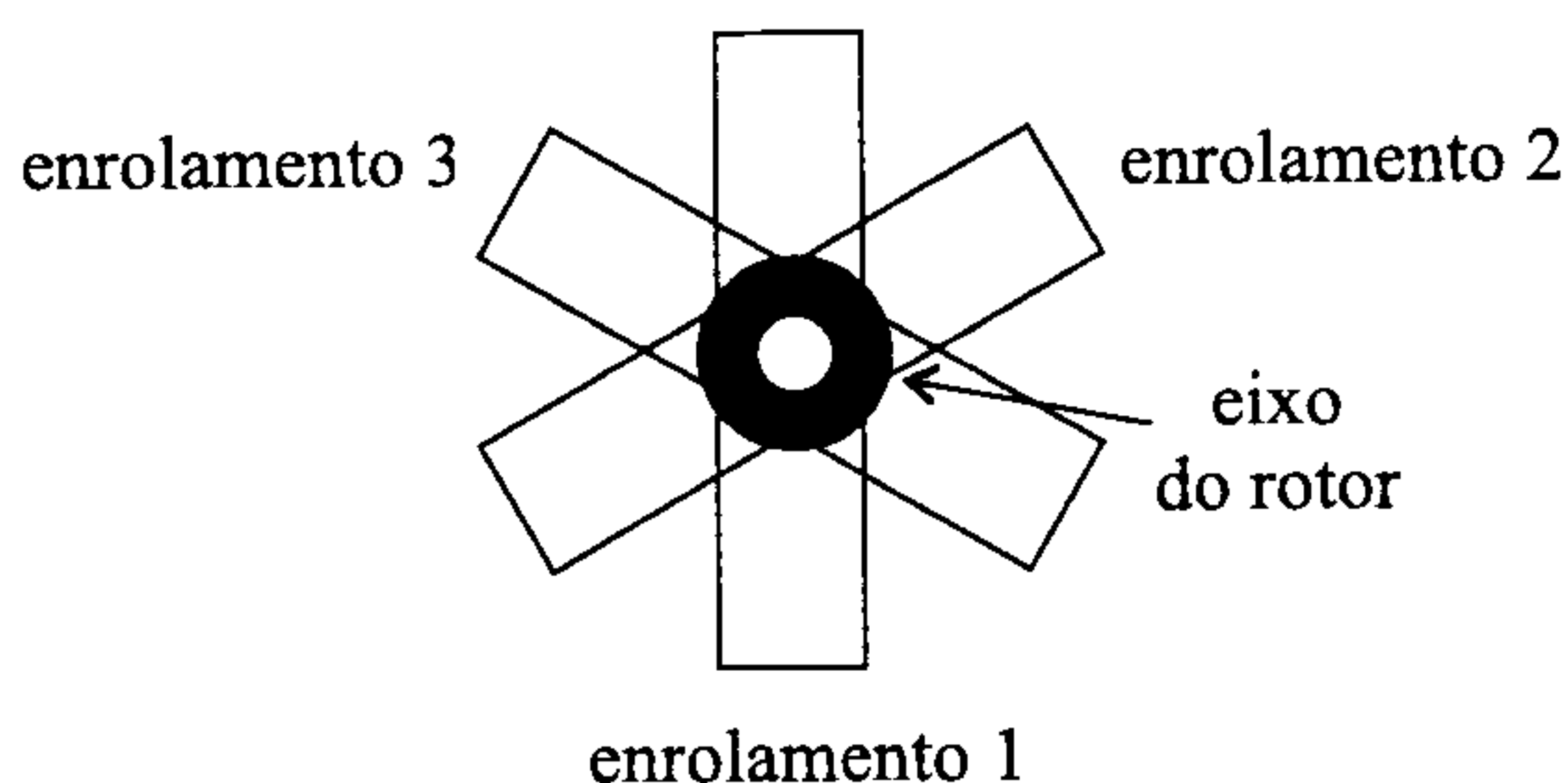


Figura G.4: Vista de um gerador com vários enrolamentos no rotor.

Quando o rotor gira, as tensões geradas pelas bobinas estarão defasadas e

produzirão uma tensão de saída, como a mostrada na figura G.5. Note que, quanto maior o número de enrolamentos, mais “lisa” será a tensão de saída. Além disso, o comutador anular deve ter o número de divisões apropriado para cada uma das bobinas gerar uma tensão de meia-onda.

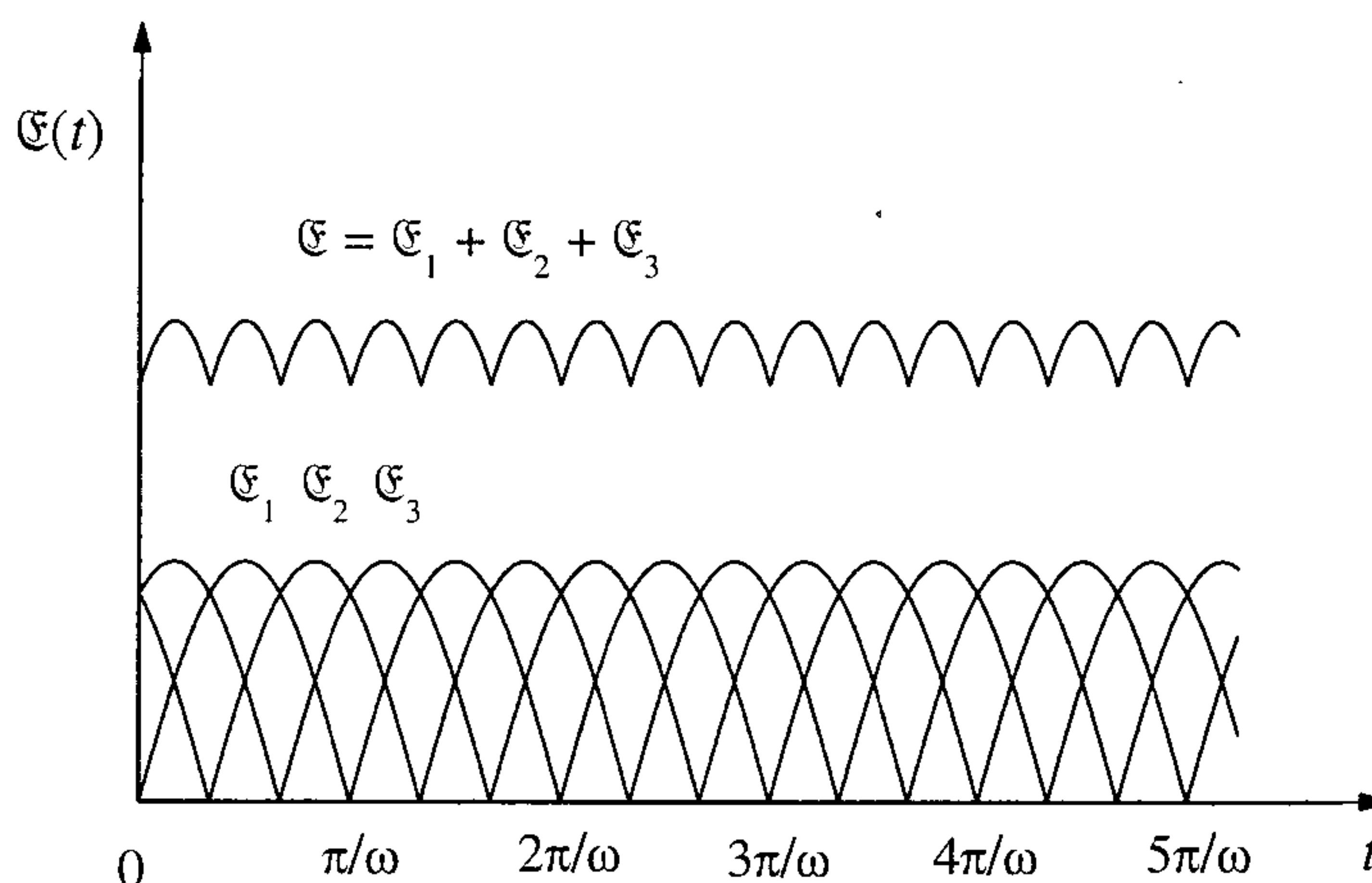


Figura G.5: Tensão de saída do gerador com vários enrolamentos no rotor.

Para obter corrente alternada periódica (**ca** periódica), ao invés de usar um comutador dividido, emprega-se um sistema de anéis deslizantes, como mostra a figura G.6. Nesse caso, os cabos que vêm da bobina para as escovas giram em contato com os anéis, e a tensão e a corrente induzidas percorrem um ciclo completo.

Com o uso dos anéis deslizantes, o gerador torna-se um gerador de *onda completa* e produz uma tensão ou corrente alternada e periódica, como aparece na figura G.7.

A corrente induzida, ao circular pela bobina, cria um momento de dipolo magnético, o qual interage com o campo magnético externo. Quanto maior o valor da tensão ou corrente desejada nos terminais do gerador, maior será esse momento magnético e, conseqüentemente, o torque externo responsável pelo giro do rotor também deve ser maior para manter a mesma velocidade angular. Por questões de padronização dos equipamentos elétricos e eletrônicos, na prática apenas duas frequências angulares são utilizadas para a geração de corrente alternada para uso diário. Elas correspondem às frequências de 50 Hz e 60 Hz, com frequências angulares correspondentes a $\omega_1 = 100\pi$ rad/s e $\omega_2 =$

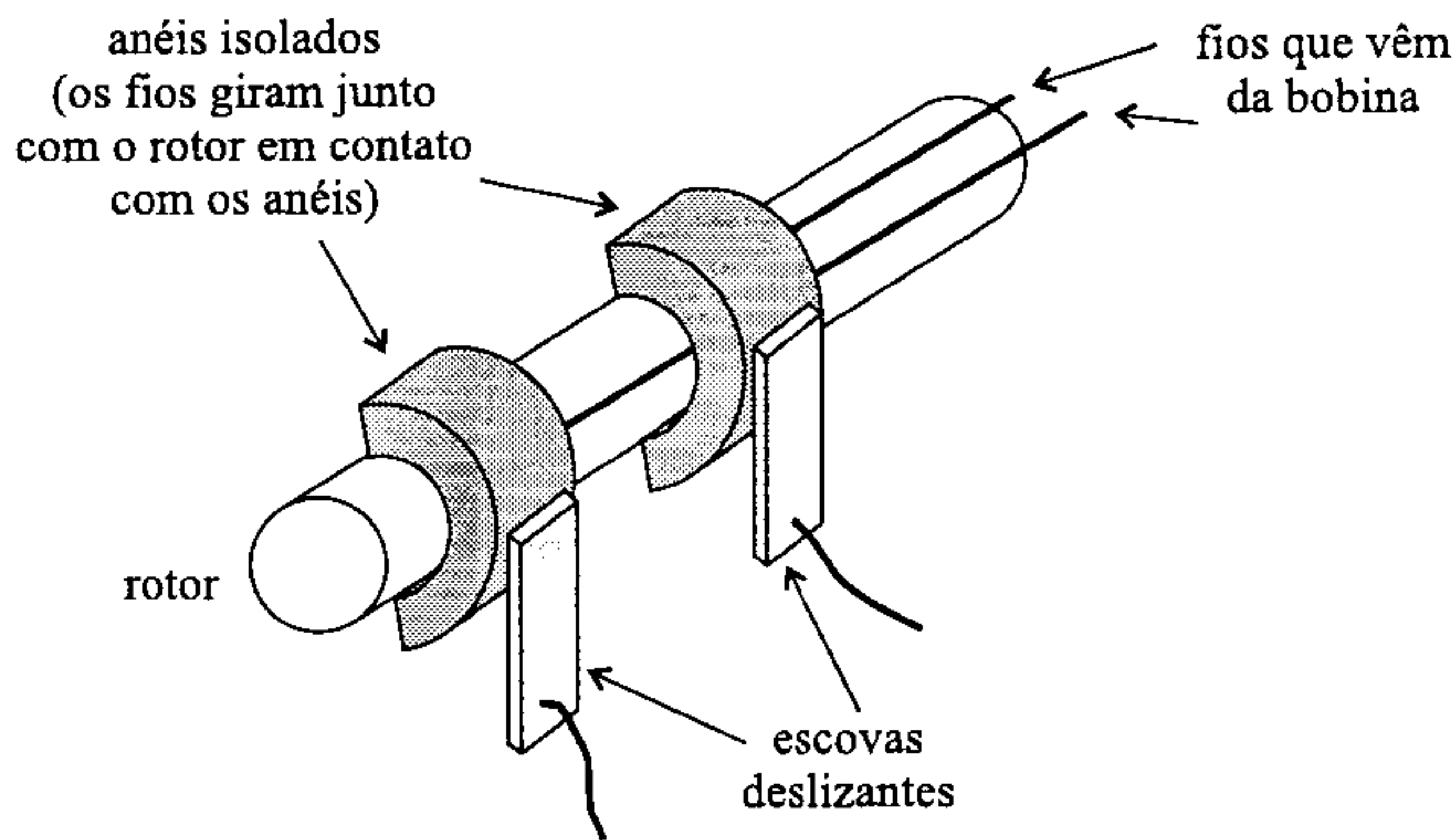


Figura G.6: Esquema do sistema de anéis deslizantes.

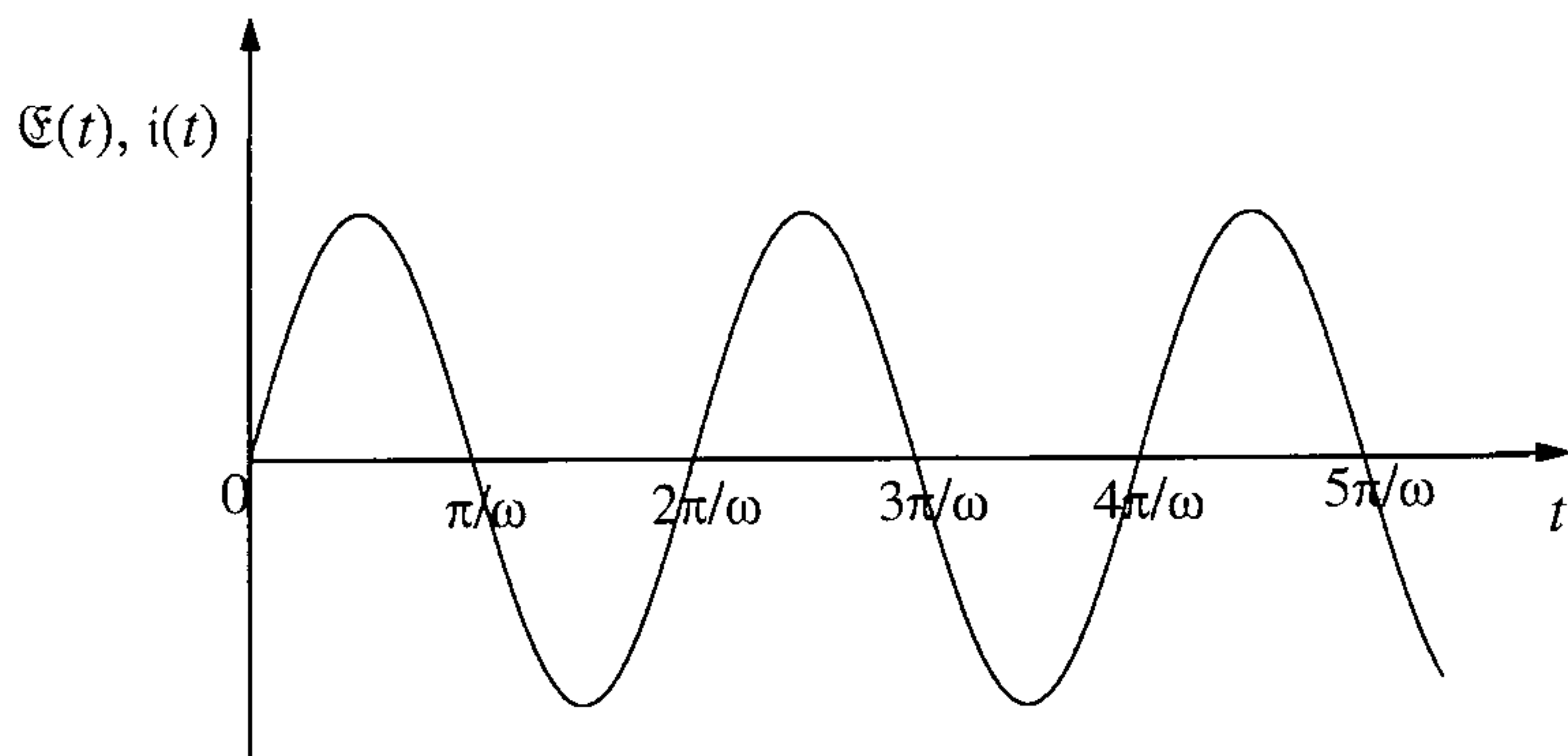


Figura G.7: Tensão e corrente de saída do gerador de onda completa.

120π rad/s, respectivamente. No Brasil, a maioria das empresas geradoras, senão todas, trabalha com a frequência de 60 Hz. Os geradores de corrente alternada são representados num circuito elétrico pelo símbolo $\text{---} \bigcirc \sim \text{---}$.

Conforme veremos mais adiante, a frequência da tensão ou corrente alternada periódica é um parâmetro muito importante na confecção de circuitos elétricos e eletrônicos que vão funcionar utilizando esse tipo de tensão ou corrente. Um aparelho projetado para funcionar em 60 Hz pode ser seriamente danificado se for empregado em 100 Hz, por exemplo. Por esse motivo, a padronização das frequências acima ocorre em escala mundial, não apenas regional. A realização de transações comerciais envolvendo produtos elétricos ou eletrônicos entre dois países com especificações diferentes para a frequência se tornaria inviável, algo não desejável do ponto de vista econômico.

Após estudar os geradores, devemos agora voltar nossa atenção para os motores elétricos. Um motor elétrico é, basicamente, um gerador elétrico funcionando ao contrário. Ao invés de o rotor estar sujeito a um torque externo produzido por algum agente mecânico, o qual produz a rotação do rotor e, conseqüentemente, a geração de corrente induzida alternada, num motor elétrico uma corrente externa entra (e sai, obviamente) pelos terminais do mesmo, passando pelo enrolamento da bobina do motor. A bobina, com corrente circulando por ela, age como um dipolo magnético. Esse dipolo está imerso num campo magnético externo, e sobre ele age um torque, conforme estudamos na seção 15.8 ³, que é responsável por fazê-la girar. Quando o rotor começa a girar, outro fenômeno torna-se relevante. A bobina, girando no campo magnético externo, fica sujeita a uma corrente induzida (não confundir com a corrente externa que circula pelo motor) produzida por causa da variação do fluxo magnético através de sua área. Essa corrente induzida depende da velocidade angular ω_m com que o rotor gira, que não necessariamente é a mesma frequência angular ω da corrente externa. Matematicamente, a expressão para essa corrente, ou para a tensão alternada induzida correspondente, é

$$\mathcal{E}_m = NBA\omega_m \sin \omega_m t$$

É importante notar que a bobina do rotor não sabe se ela faz parte de um gerador ou de um motor elétrico. Portanto, a *fem* de retorno induzida tem o mesmo valor, quer ela funcione como um ou outro. Por causa disso, a expressão para a *fem* é a mesma. Além disso, em geral $\omega_m \neq \omega$.

Se o motor está ligado a uma fonte de tensão externa constante, a corrente produzida pela *fem* $\mathcal{E}_{ext}$ externa é constante. A corrente induzida pelo giro da bobina no campo magnético externo é variável, e ela se opõe à corrente constante externa. Assim, a tensão total sobre o motor é

$$V = \mathcal{E}_{ext} - \mathcal{E}_m$$

e a corrente total fica

$$i = i_{ext} - i_m$$

onde i_{ext} é a corrente constante produzida pela *fem* externa, e i_m é a corrente

³ Lembre-se de que o campo magnético gerador pelo *stator* é constante e uniforme.

induzida produzida pelo motor. A razão entre a tensão total e a corrente total fornece uma “resistência” associada à bobina do motor, ou seja,

$$\mathcal{R}_m = \frac{V}{i} = \frac{\mathfrak{E}_{ext} - \mathfrak{E}_m}{i}$$

Assim, num diagrama de circuito, é conveniente representar um motor elétrico por uma fonte ideal alternada de *fem* de retorno de valor $\mathfrak{E}_m$ associado em série com uma resistência $\mathcal{R}_m$ dada pela expressão acima. Quando a corrente que alimenta o motor é alternada, a análise é mais complicada, como veremos nas próximas seções. Em seguida, vamos estudar quatro circuitos elementares que, apesar de utilizarem fontes de *fem* externas constantes, envolvem correntes variáveis.

G.2 Circuitos de Corrente Contínua

Os circuitos complexos que são utilizados em aparelhos elétricos e eletrônicos são formados, basicamente, por combinações de três elementos principais, a saber: capacitores, resistores e indutores, definidos por suas especificações de fabricação. Por isso, é importante estudar circuitos elementares formados por combinações desses elementos principais. Aqui vale lembrar as relações que existem entre tensão, corrente, carga e as propriedades específicas de cada elementos. A tensão gerada entre as placas de um capacitor de capacitância $\mathcal{C}$ contendo uma carga Q em cada placa é dada pela expressão 11.1,

$$V_C = \frac{Q}{\mathcal{C}}$$

A tensão que deve ser produzida nos extremos de um resistor de resistência $\mathcal{R}$ para que ele seja percorrido por uma corrente i é dada por 12.7,

$$V_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}i$$

e a tensão de retorno produzida por um indutor de auto-indutância $\mathfrak{L}$ quando há uma variação de corrente $\frac{di}{dt}$ através dele é obtida por intermédio de 18.31,

$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{L} \frac{di}{dt}$$

Outra relação importante é dada pela expressão 12.4,

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

a qual relaciona a corrente elétrica com a carga que passa através do condutor, e ela pode ser utilizada se necessário. Além disso, as duas leis de Kirchhoff, vistas na seção 13.3, e sumarizadas nas equações 13.5 (lei dos nós),

$$\sum i_{\text{entram}} = \sum i_{\text{saem}}$$

e 13.7 (lei das malhas),

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \text{malha}}}^n \Delta V_i = 0$$

permanecem válidas e podem ser utilizadas na análise dos circuitos. Vamos começar o estudo com o circuito RC.

G.2.1 Circuito RC em Série

Um circuito RC em série é composto por um resistor de resistência $\mathcal{R}$ e um capacitor de capacitância $\mathcal{C}$, como mostra a figura G.8. Há uma fonte de *fem* de valor $\mathcal{E}_0$ constante num dos ramos do circuito, enquanto o outro é formado apenas por um fio. Inicialmente, o circuito está desligado e as placas do capacitor não têm nenhuma carga líquida, ou seja, o número de cargas positivas (os prótons dos núcleos atômicos) é igual ao número de cargas negativas (os elétrons) em cada uma das placas, e vamos considerar que existem 10 cargas de cada (10 elétrons e^- e 10 prótons p^+)⁴. A força elétrica entre cargas de mesmo sinal é repulsiva, ao passo que, entre cargas de sinais opostos, ela é atrativa. Além disso, os prótons não são móveis, apenas os elétrons.

Assim, antes do circuito ser ligado, as forças repulsivas exercidas pelos elétrons de uma placa sobre os elétrons da outra são contrabalançadas pelas forças atrativas geradas pelos prótons da primeira placa sobre os elétrons da segunda, pois o número de cargas positivas é igual ao de cargas negativas. O mesmo balanço de forças ocorre para os prótons, e o total líquido geral é uma resultante nula. No tempo $t_0 = 0$, o contato é colocado no ponto **A**. Quando isso

⁴ O número real é muito maior do que isso, da ordem de 10^{23} .

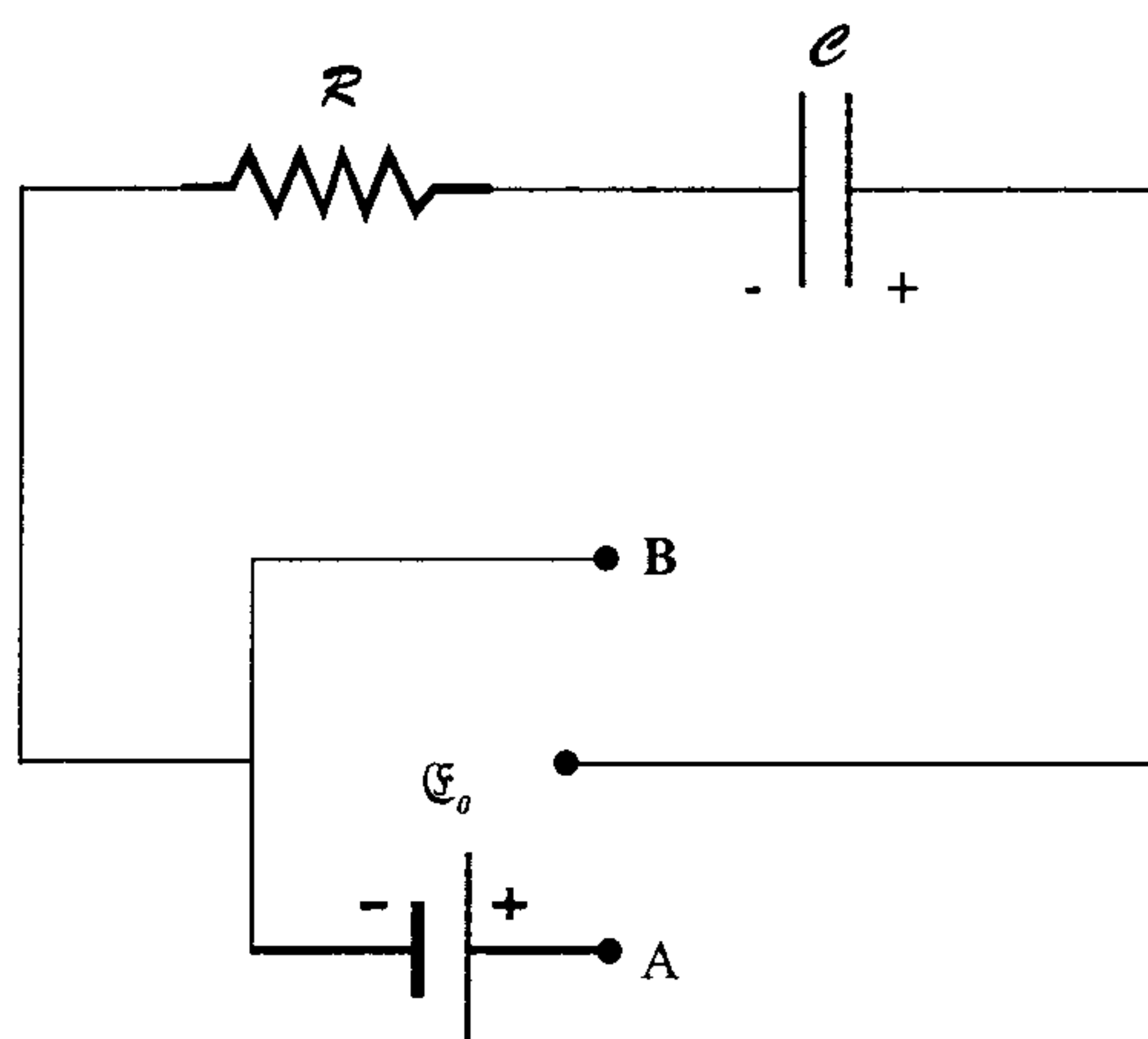


Figura G.8: Um circuito RC em série.

ocorre, a fonte de tensão $\mathcal{E}_0$ transfere energia para os elétrons. Vamos supor que um elétron receba uma certa quantidade de energia da fonte de cada vez e saia pela placa negativa da fonte (os elétrons só podem sair por esse lado). O elétron passa pelo resistor, onde perde uma parcela da energia por efeito Joule e chega à placa esquerda do capacitor, que adquire uma carga negativa, como indicado na figura. A carga líquida da placa esquerda torna-se $-1e$, onde e é o módulo da carga do elétron, pois, por hipótese, agora existem 11 elétrons e 10 prótons nessa placa. Este elétron extra da placa esquerda age sobre os elétrons e prótons da outra placa, e agora não há uma compensação total das forças porque existe um elétron a mais do que o número de prótons. Há uma força resultante repulsiva que “empurra” os elétrons da outra placa. Além disso, a fonte de tensão, que perdeu um elétron, ficou positivamente carregada e passa a atrair os elétrons da placa direita do capacitor. Estes efeitos combinados fazem com que um dos elétrons da placa da direita vá para a fonte de tensão, e o resultado é que a placa da direita do capacitor fica positiva, com uma carga $+1e$, e a outra placa fica negativa, com uma carga $-1e$, sendo que a fonte de tensão não perde nem ganha cargas. O fato de que o capacitor agora tem cargas gera um campo elétrico entre suas placas, e esse campo elétrico causa uma diferença de potencial entre elas. Essa diferença de potencial tem sinal oposto ao sinal da fonte de tensão, porque a placa positiva tem potencial mais alto do que a placa negativa.

A fonte de tensão agora dá energia para outro elétron. Esse elétron

passa no resistor, perde um pouco da energia e se aproxima do capacitor. No entanto, age agora sobre o elétron uma força repulsiva causada pelo elétron extra do ciclo anterior. Assim, é mais difícil para o 2º elétron chegar ao capacitor. Considerando que ele chega, o processo continua, e a diferença de potencial no capacitor fica um pouco maior, bem como a carga em cada uma das placas. À medida que o processo se desenvolve, fica cada vez mais difícil para o elétron chegar ao capacitor, até que, quando a carga é tal que a diferença de potencial entre as placas vale $-\mathfrak{E}_0$, o movimento cessa e o capacitor está completamente carregado. Esta é a descrição física qualitativa do processo de carga de um capacitor num circuito de corrente contínua. Vamos agora fazer uma descrição quantitativa. Para isso, escrevemos a lei das malhas para o circuito acima, quando o contato é colocado em **A**, lembrando que o sentido convencional para a corrente é o oposto ao do movimento dos elétrons. Assim, a soma das quedas de potencial através do circuito, partindo da fonte de fem , resulta em

$$\mathfrak{E}_0 + V_C + V_R = 0$$

$$\mathfrak{E}_0 - \frac{Q}{C} - \mathcal{R}i = 0$$

Lembrando que $i = \frac{dQ}{dt}$, temos

$$\mathfrak{E}_0 - \frac{Q}{C} - \mathcal{R}\frac{dQ}{dt} = 0$$

ou

$$\mathcal{R}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathfrak{E}_0$$

que é uma equação diferencial para $Q(t)$. Ela pode ser resolvida se fizermos algumas manipulações, como segue.

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\mathcal{R}C} = \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{R}}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{R}} - \frac{Q}{\mathcal{R}C} \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{C\mathfrak{E}_0 - Q}{\mathcal{R}C}\end{aligned}$$

$$\frac{dQ}{C\mathfrak{E}_0 - Q} = \frac{dt}{RC}$$

Após ser colocada na forma acima, podemos integrar a equação diferencial para obter a carga em função do tempo. Lembrando que em $t = 0$ o capacitor estava vazio, temos $Q(0) = 0$, e assim,

$$\begin{aligned} \int_0^Q \frac{dQ}{C\mathfrak{E}_0 - Q} &= \int_0^t \frac{dt}{RC} \\ -\ln[C\mathfrak{E}_0 - Q]_0^Q &= \frac{t}{RC} \\ \ln\left[\frac{C\mathfrak{E}_0 - Q}{C\mathfrak{E}_0}\right] &= -\frac{t}{RC} \\ \frac{C\mathfrak{E}_0 - Q}{C\mathfrak{E}_0} &= e^{-\frac{t}{RC}} \\ C\mathfrak{E}_0 - Q &= C\mathfrak{E}_0 e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

ou

$$Q(t) = C\mathfrak{E}_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right] \quad (\text{G.1})$$

A equação G.1 descreve o comportamento da carga de um capacitor num circuito RC como função do tempo. Ela tende para um valor limite dado por

$$Q_\infty = Q(t \rightarrow \infty) = C\mathfrak{E}_0 \quad (\text{G.2})$$

que é a carga máxima adquirida pelo capacitor. A grandeza RC é uma constante chamada de constante de tempo capacitiva τ_C , ou seja,

$$\tau_C = RC \quad (\text{G.3})$$

Em termos da constante capacitiva, a carga no capacitor fica

$$Q(t) = Q_\infty \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right] \quad (\text{G.4})$$

A corrente que circula no circuito é obtida mediante

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{dQ}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} \left\{ Q_{\infty} \left[1 - e^{-\frac{t}{\mathcal{R}C}} \right] \right\} \\
 i &= -Q_{\infty} \left[-\frac{1}{\mathcal{R}C} \right] e^{-\frac{t}{\mathcal{R}C}}
 \end{aligned}$$

ou

$$i(t) = \frac{Q_{\infty}}{\mathcal{R}C} e^{-\frac{t}{\mathcal{R}C}} \quad (\text{G.5})$$

que vai a zero com o decorrer do tempo, concordando com o que foi explicado inicialmente. A corrente pode ser dada também como

$$i(t) = \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{R}} e^{-\frac{t}{\mathcal{R}C}} \quad (\text{G.6})$$

onde fizemos uso da expressão G.2 em G.5. Até aqui estudamos a carga do capacitor. Vamos agora considerar que o capacitor está totalmente carregado e que o contato é colocado na posição **B**. Neste caso, a fonte de tensão não faz parte do circuito e os elétrons podem se deslocar livremente da placa negativa passando pelo resistor e perdendo um pouco da sua energia para chegar à placa positiva. Com o decorrer do tempo, toda a carga é transferida de uma placa para a outra e voltamos à situação inicial, antes do contato em **A**. Neste caso, a aplicação da lei das malhas leva à equação diferencial

$$\begin{aligned}
 V_{\mathcal{R}} + V_C &= 0 \\
 \mathcal{R}i + \frac{Q}{C} &= 0
 \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{R} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{\mathcal{R}C}$$

Lembrando que a carga total do capacitor carregado é $Q_{\infty} = C\mathfrak{E}_0$ (equação G.2), temos

$$\int_{Q_{\infty}}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\ln \frac{Q}{Q_{\infty}} = - \frac{t}{RC}$$

$$\frac{Q}{Q_{\infty}} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

ou

$$Q(t) = Q_{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (G.7)$$

que fornece o comportamento da carga do capacitor num circuito RC no processo de descarga. A corrente é calculada no exercício G.1. A figura G.9 mostra um gráfico de $Q(t) \times t$ para os processos de carga e descarga do capacitor. Sendo conhecidas $Q(t)$ e $i(t)$, vamos passar ao próximo circuito.

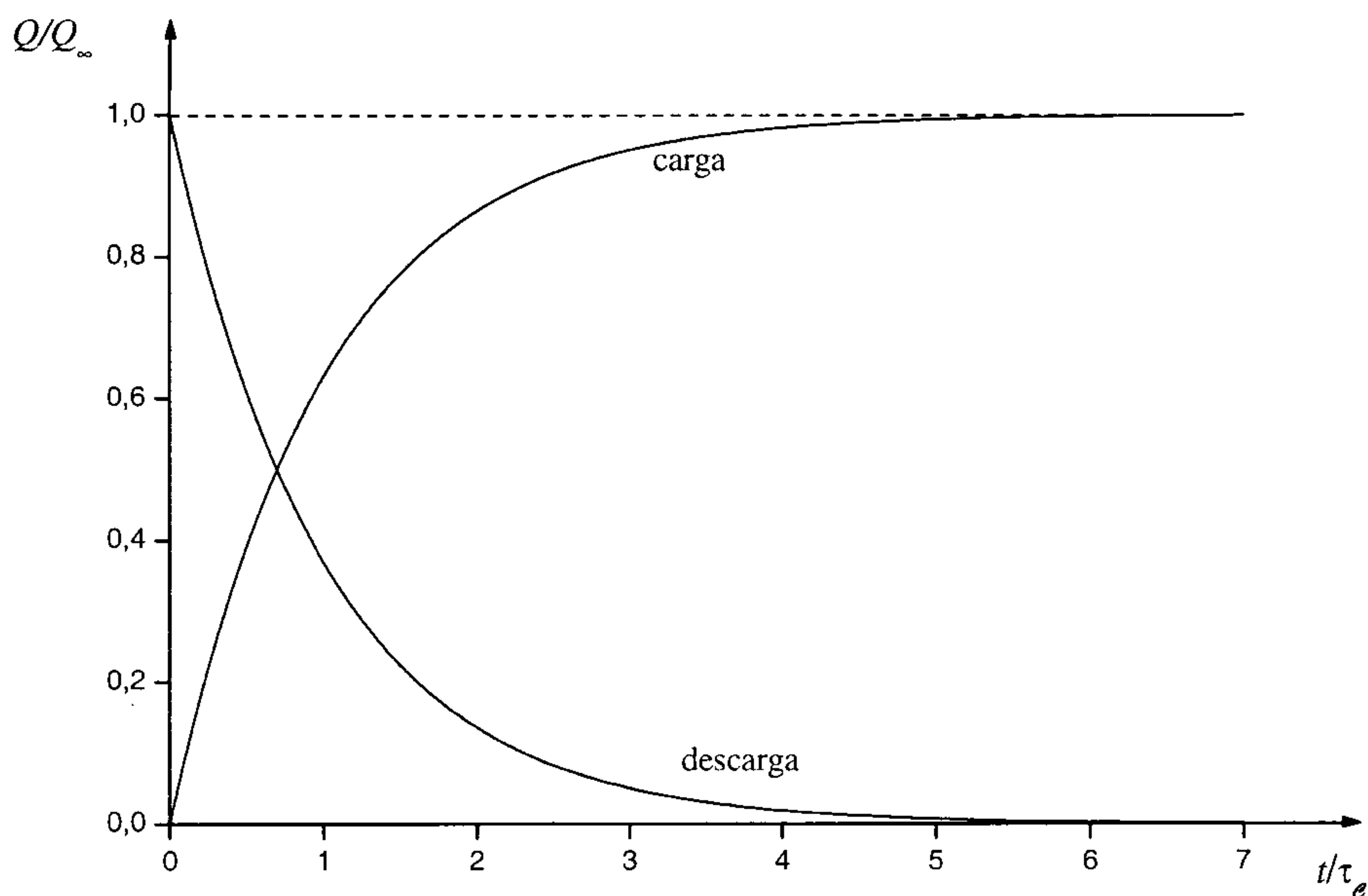


Figura G.9: Gráfico $Q(t) \times t$ para os processos de carga e descarga do capacitor no circuito RC.

G.2.2 Circuito RL em Série

O próximo circuito a ser estudado é um circuito RL em série, composto por um resistor de resistência $\mathcal{R}$ e por um indutor ideal de auto-indutância $\mathcal{L}$. Se ele não for ideal, acrescenta-se uma resistência $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ em série com ele, a qual pode ser somada com a resistência $\mathcal{R}$ externa para dar uma resistência equivalente $\mathcal{R}_e$, de modo que, no resultado final, $\mathcal{R}$ deve ser substituída por $\mathcal{R}_e$. A figura G.10 apresenta um diagrama deste circuito. Novamente, num dos ramos temos uma fonte de tensão constante de *fem* $\mathcal{E}_0$ e noutro, apenas fios que completam o circuito.

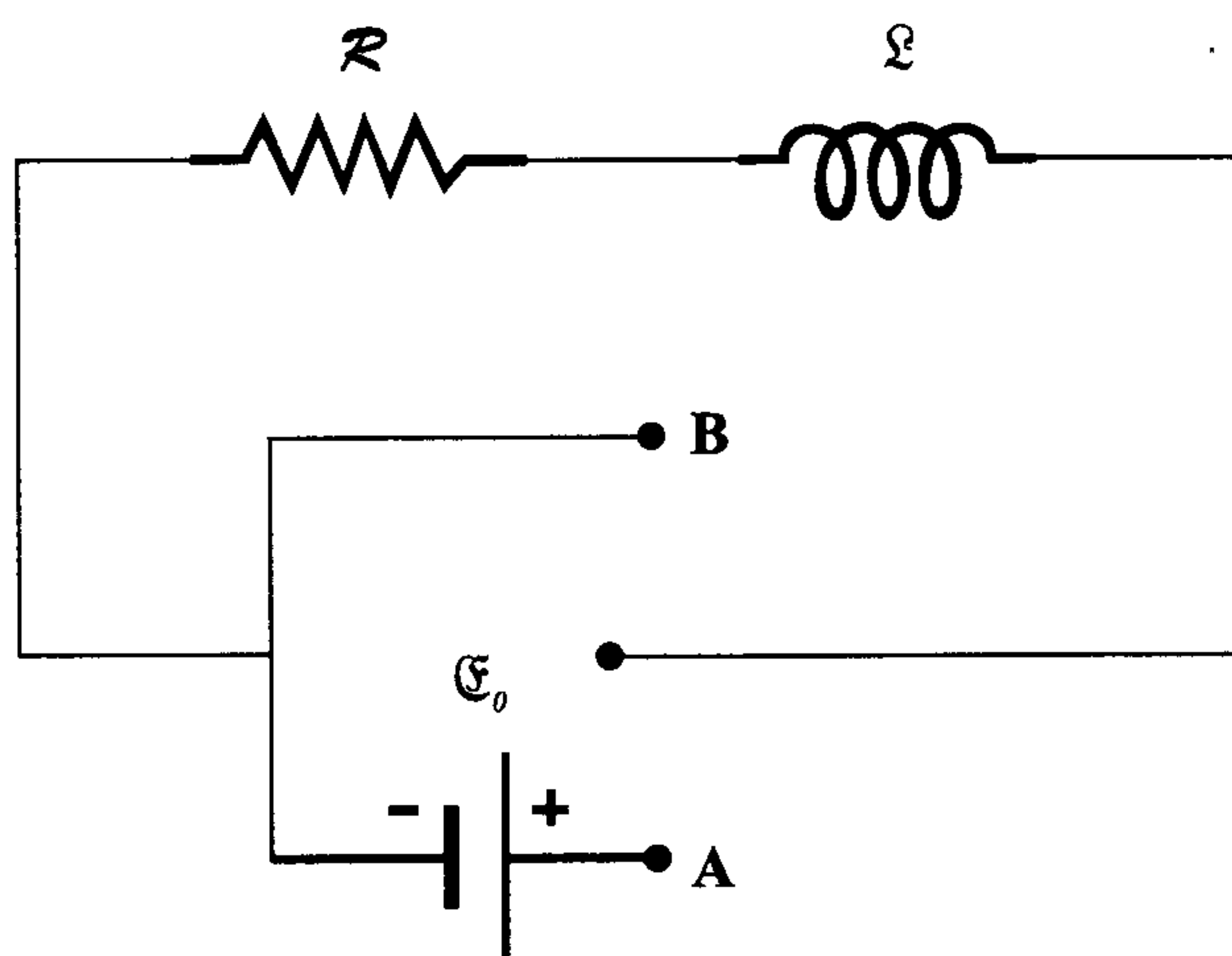


Figura G.10: Um circuito RL em série.

Quando a chave é colocada em **A**, os elétrons começam a se mover e geram uma corrente i , a qual, bem no início do processo, tem um valor pequeno, mas que aumenta com rapidez, ou seja, há um grande $\frac{di}{dt}$ ⁵. Essa corrente está variando e passa pelo resistor e pelo indutor, gerando neste um campo

⁵ Este processo é semelhante ao que ocorre com um carro parado num sinal fechado, quando o sinal abre e o motorista pisa “fundo” no acelerador. O carro estava parado e tinha uma velocidade $v = 0$. Ao abrir o sinal, a velocidade começa a aumentar rapidamente a partir do zero. Assim, a aceleração é grande, mas a velocidade é pequena. A velocidade vai aumentando até que ela chega ao valor desejado pelo motorista, e portanto, a aceleração vai diminuindo até se anular. Como $a = \frac{dv}{dt}$, percebe-se que, associando a velocidade v à corrente i , a aceleração é equivalente a $\frac{di}{dt}$, e o comportamento da corrente no circuito RL é idêntico ao da velocidade do carro.

e um fluxo magnético variável no tempo. Assim, o indutor responde a essa corrente variável produzindo uma *fem* de retorno e uma corrente induzida que tende a diminuir o grande $\frac{di}{dt}$ que age sobre ele. Então, $\frac{di}{dt}$ diminui à medida que i aumenta, até que se chega a uma situação em que $\frac{di}{dt} = 0$ e a corrente atinge um valor máximo que não muda mais, desde que a fonte mantenha uma tensão fixa. A equação diferencial para esse processo é

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_0 + V_{\mathcal{R}} + V_{\mathcal{L}} &= 0 \\ \mathfrak{E}_0 - \mathcal{R}i - \mathcal{L}\frac{di}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{G.8}$$

onde $V_{\mathcal{L}}$ corresponde à queda de tensão produzida no indutor pela *fem* de retorno. Podemos escrever também

$$\mathcal{L}\frac{di}{dt} + \mathcal{R}i = \mathfrak{E}_0$$

ou ainda,

$$\frac{di}{dt} + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}i = \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{L}}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{L}} - \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}i \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\mathfrak{E}_0 - \mathcal{R}i}{\mathcal{L}} \\ \frac{di}{\mathfrak{E}_0 - \mathcal{R}i} &= \frac{dt}{\mathcal{L}}\end{aligned}$$

e pode ser resolvida por meio de

$$\begin{aligned}\int_{i_0=0}^i \frac{di}{\mathfrak{E}_0 - \mathcal{R}i} &= \int_{t_0=0}^t \frac{dt}{\mathcal{L}} \\ -\frac{1}{\mathcal{R}} \ln[\mathfrak{E}_0 - \mathcal{R}i]_{i_0=0}^i &= \frac{t}{\mathcal{L}} \\ \ln\left[\frac{\mathfrak{E}_0 - \mathcal{R}i}{\mathfrak{E}_0}\right] &= -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t \\ \frac{\mathfrak{E}_0 - \mathcal{R}i}{\mathfrak{E}_0} &= e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t} \\ \mathfrak{E}_0 - \mathcal{R}i &= \mathfrak{E}_0 e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t}\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{R}i = \mathfrak{E}_0 \left[1 - e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t} \right]$$

e finalmente,

$$i(t) = \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{R}} \left[1 - e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}t} \right] \quad (\text{G.9})$$

que descreve a corrente num circuito RL como função do tempo. Após um grande intervalo de tempo, a corrente se estabiliza em

$$i_\infty = i(t \rightarrow \infty) = \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{R}} \quad (\text{G.10})$$

A constante de tempo indutiva $\tau_{\mathcal{L}}$ é definida por

$$\tau_{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}} \quad (\text{G.11})$$

e, em termos da constante indutiva, a corrente fica

$$i(t) = i_\infty \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\mathcal{L}}}} \right] \quad (\text{G.12})$$

Quando a chave é colocada na posição **B** (após a corrente estabilizar no valor i_∞), a corrente que circula no circuito começa a diminuir bruscamente, gerando um grande $\frac{di}{dt}$ negativo, já que a corrente diminui. O indutor reage a essa variação, tentando fazê-la diminuir. Assim, $\frac{di}{dt}$ vai diminuindo (em módulo), mas a corrente i também diminui, até que ambas se anulam completamente ⁶. Para este caso, temos

$$V_{\mathcal{R}} + V_{\mathcal{L}} = 0$$

ou, considerando que $\mathfrak{E}_0 = 0$ na equação G.8,

$$-\mathcal{R}i - \mathcal{L} \frac{di}{dt} = 0$$

⁶ Este caso é semelhante ao de uma freada brusca. Há uma grande desaceleração no início da freada ($\frac{dv}{dt}$ negativo) e a velocidade diminui rapidamente. À medida que a velocidade se aproxima de zero, a aceleração também diminui, e ambas se anulam quando o carro pára.

Note que, nesse caso, o indutor age como se fosse uma fonte de *fem*, já que ele produz, agora, uma *fem* de retorno visando manter a corrente circulando no mesmo sentido em que ela já estava circulando. Por isso, o potencial *aumenta* de $-\mathcal{L}\frac{di}{dt}$ quando passamos por ele. A equação acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\frac{di}{dt} &= -\mathcal{R}i \\ \frac{di}{i} &= -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} dt\end{aligned}$$

Lembrando a equação G.10, temos

$$\begin{aligned}\int_{i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{R}}}^i \frac{di}{i} &= -\int_{t_0 = 0}^t \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} dt \\ \ln \frac{i}{\mathcal{E}_0/\mathcal{R}} &= -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} t \\ \frac{i}{\mathcal{E}_0/\mathcal{R}} &= e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} t}\end{aligned}$$

ou

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{R}} e^{-\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} t} \quad (\text{G.13})$$

que descreve a corrente no circuito RL quando a fonte é desligada. Ela vai a zero após um tempo suficientemente longo, como esperado. A figura G.11 apresenta um gráfico da corrente no circuito RL quando a chave está colocada em **A** e em **B**.

Os circuitos RL em série têm importância considerável quando tratamos com circuitos em que a resistência é baixa mas a indutância é razoavelmente alta, como ocorre em motores elétricos industriais. Nesse caso, quando ocorre uma interrupção repentina no circuito, por causa de um desligamento acidental, por exemplo, a diminuição brusca da corrente elétrica pode causar o aparecimento de uma grande tensão de retorno no indutor, maior inclusive do que a tensão projetada para o circuito, gerando possíveis centelhas ou arcos elétricos no ponto de interrupção ou em qualquer ponto suscetível no circuito. Esses arcos, uma vez formados, podem se manter utilizando uma tensão bem menor do que a que os originou, o que pode causar grandes danos tanto ao circuito como eventualmente às pessoas que o operam. Como uma ilustração desse fenômeno, considere que na figura G.10 o circuito esteja fechado com a chave no ponto **A**, de modo que a fonte de tensão

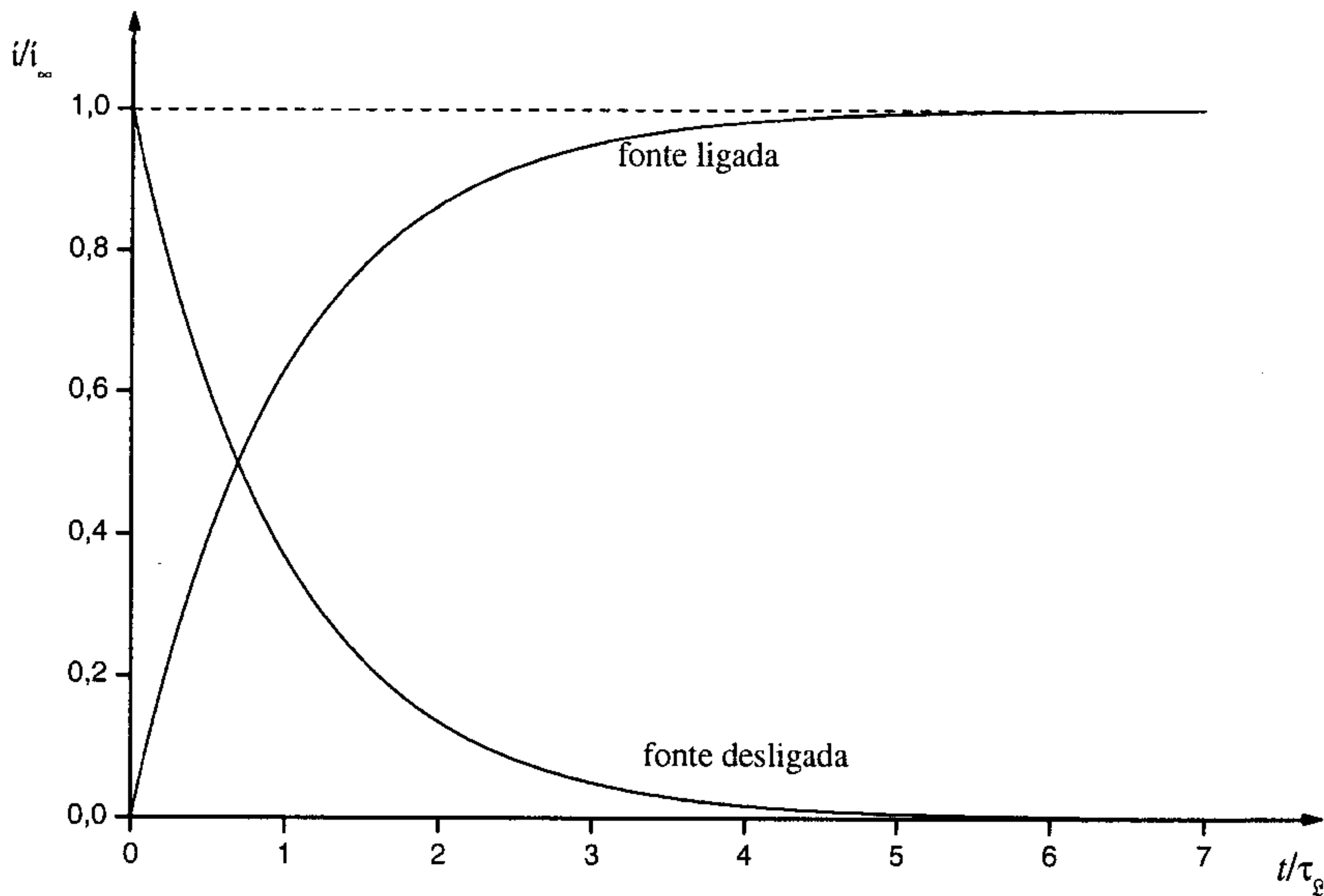


Figura G.11: Gráfico $i(t) \times t$ para a corrente no circuito RL.

esteja funcionando. Por hipótese, uma interrupção acidental ocorre no ramo vertical direito do circuito. A corrente então decresce rapidamente, e podemos utilizar uma expressão matemática para o decréscimo de corrente como sendo

$$i(t) = i_0 e^{-t/\Delta t} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{R}} e^{-t/\Delta t}$$

onde Δt representa o tempo de duração da interrupção, que pode ser da ordem de milissegundos. De acordo com essa expressão, a queda de tensão no resistor vai a zero de forma suave, já que

$$V_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}i = \mathcal{E}_0 e^{-t/\Delta t}$$

Entretanto, a tensão no indutor não é tão suave, já que ela envolve a derivada da corrente, isto é,

$$V_{\mathcal{L}} = -\mathcal{L} \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{L}\mathcal{E}_0}{\mathcal{R}} \frac{1}{\Delta t} e^{-t/\Delta t}$$

Utilizando a constante de tempo indutiva G.11, temos

$$V_{\mathcal{L}} = \mathcal{E}_0 \frac{\tau_{\mathcal{L}}}{\Delta t} e^{-t/\Delta t}$$

Note que $\tau_{\mathcal{L}}$ é grande porque a indutância é grande e a resistência é pequena. De fato, $\tau_{\mathcal{L}}$ pode ser muito maior do que Δt . Logo depois da interrupção, temos $t \gtrsim 0$, de modo que o valor da exponencial na expressão acima é muito próximo de 1, fazendo com que a tensão fique aproximadamente

$$V_{\mathcal{L}} \approx \frac{\tau_{\mathcal{L}}}{\Delta t} \mathfrak{E}_0$$

que pode ser muito maior do que $\mathfrak{E}_0$, que é a tensão definida para o circuito. Esse pico de tensão pode danificar o circuito, produzindo falhas de isolamento e centelhas no ponto em que ocorreu a interrupção ou em outros pontos do circuito. Para evitar que esse fenômeno ocorra quando o circuito é desligado intencionalmente, aplica-se um jato de óleo nos contatos da chave que será aberta, de forma a extinguir as centelhas produzidas.

G.2.3 Circuito LC em Série

O próximo circuito a ser estudado corresponde a uma associação em série feita entre dois elementos que não dissipam energia, ou seja, um capacitor e um indutor ideais. Temos então um circuito LC em série, mostrado na figura G.12.

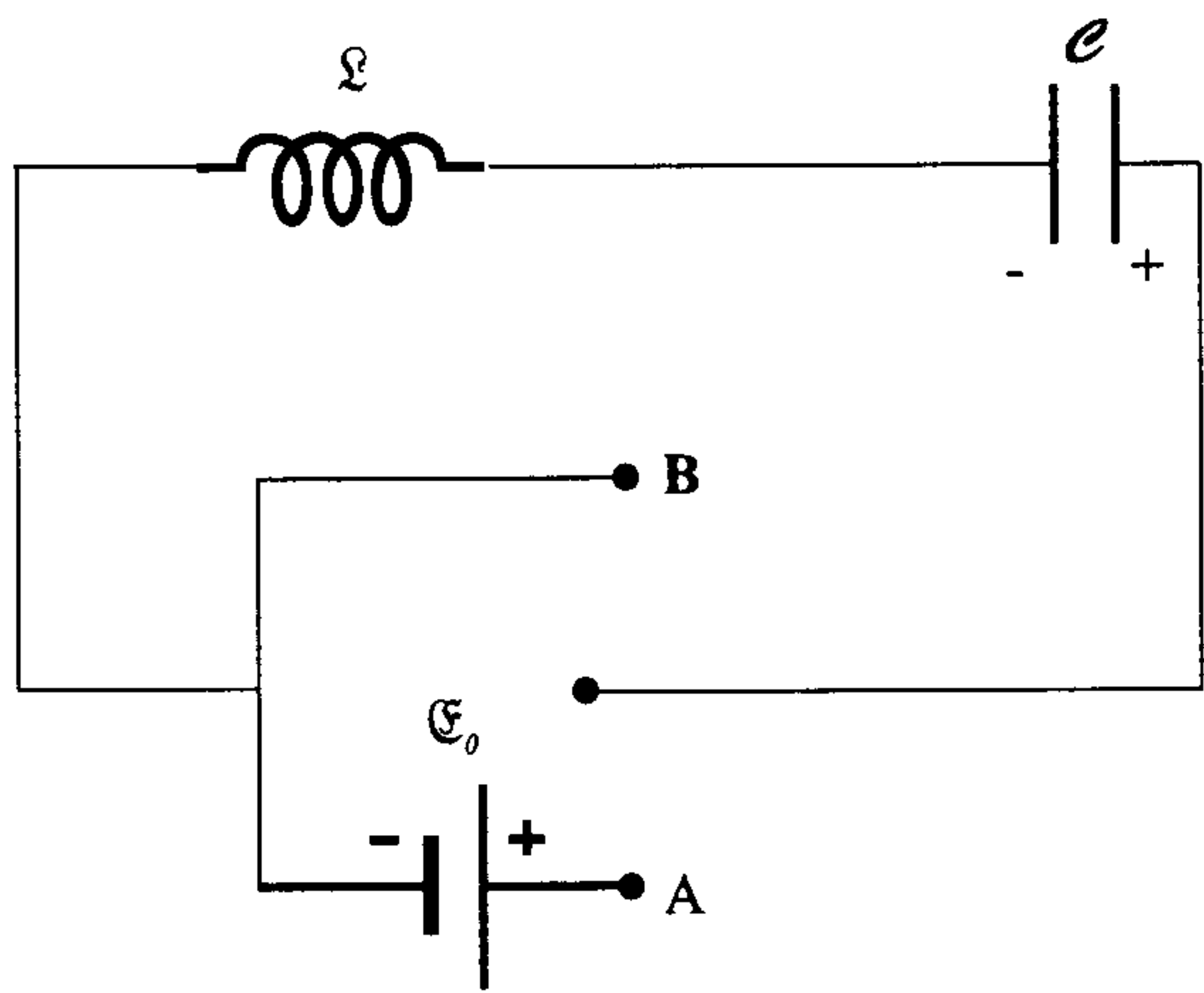


Figura G.12: Diagrama de um circuito LC em série.

Neste caso temos um capacitor ideal de capacitância $\mathcal{C}$ e um indutor ideal de indutância $\mathcal{L}$. Não há resistências, por hipótese, porque estamos considerando os componentes como ideais. Isso significa que, ao colocarmos a

chave em **A** pela primeira vez, há um pico de corrente que carrega o capacitor instantaneamente com uma carga tal que a tensão no capacitor torna-se igual à tensão da fonte ⁷. Assim, a análise deste circuito é feita de uma forma um pouco diferente. Vamos considerar que o capacitor já esteja completamente carregado, com o contato aberto. Nesse caso, não há nenhuma corrente percorrendo o circuito ($i_0 = 0$) nem existe variação de corrente $\frac{di}{dt}|_0 = 0$, e a carga no capacitor vale $Q_\infty = C\mathcal{E}_0$. Em seguida, a chave é colocada em **B**. Quando isso ocorre, a carga começa a circular pelo circuito e surge uma corrente i inicialmente bastante pequena, mas que exhibe uma taxa de variação $\frac{di}{dt}$ grande, da mesma forma como ocorre no caso do circuito RL. Por causa disso, há uma tensão de retorno produzida pelo indutor, e essa tensão deve ser igual e oposta à tensão entre as placas do capacitor, para que a lei das malhas seja satisfeita.

À medida que a corrente flui, e aumenta, o capacitor se descarrega, e a tensão entre suas placas diminui. Do mesmo modo, a taxa de variação da corrente também diminui com o tempo, de modo que a *fem* de retorno no indutor decresce igualmente. Num certo instante o capacitor fica completamente descarregado, o que implica que a tensão no indutor também deve ser nula. Para que isso ocorra, $\frac{di}{dt}$ deve se anular, o que indica que nesse instante a corrente atingiu seu valor máximo. Assim, quando a corrente i que percorre o circuito LC atinge seu valor máximo, a carga no capacitor se anula bem como as tensões no capacitor e no indutor.

Como existe uma corrente i percorrendo o circuito, cargas começam a se acumular novamente no capacitor, só que agora os sinais das placas se invertem. Desse modo, começa a aparecer uma tensão entre as placas do capacitor. Conforme discutimos na seção G.2.1, o acúmulo de cargas no capacitor dificulta a chegada de mais cargas, diminuindo a intensidade da corrente. Portanto, existe agora um $\frac{di}{dt}$, só que negativo, que produz dois efeitos. Há uma tensão no indutor, que contrabalança a tensão no capacitor, e a corrente diminui de intensidade até se anular quando o capacitor fica completamente carregado novamente, só que agora com uma polaridade invertida.

A situação nesse momento é praticamente idêntica à inicial, quando fechamos a chave **B**, diferindo apenas pelo sinal da carga nas placas do capacitor. Portanto, o capacitor começa a descarregar e aparece uma corrente que circula pelo circuito no sentido oposto ao da corrente inicial. A corrente atin-

⁷ Note que essa é uma situação idealizada. Na prática, sempre existe uma pequena resistência, que faz com que o tempo necessário para carregar o capacitor seja finito.

ge um valor máximo quando o capacitor está completamente descarregado e diminui a partir daí, anulando-se quando o capacitor está novamente carregado, exatamente como na situação inicial. Se o sistema não for perturbado, o ciclo descrito acima ocorrerá indefinidamente. Essa oscilação da corrente no circuito, ou da carga do capacitor, é muito semelhante à que ocorre num sistema mecânico bastante conhecido, o oscilador harmônico simples. De fato, como veremos em seguida, matematicamente os dois sistemas são idênticos, o que implica que circuitos elétricos, como o circuito LC, podem apresentar fenômenos interessantes associados a sistemas oscilantes, como, por exemplo, o fenômeno da ressonância, que vamos estudar na seqüência. Antes, porém, devemos investigar quantitativamente o circuito LC.

Ao aplicar a lei das malhas para o circuito quando a chave é colocada na posição **B**, devemos considerar a tensão no indutor e no capacitor, ou seja,

$$V_L + V_C = 0$$

ou

$$-L \frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

Lembrando que $i = \frac{dQ}{dt}$, podemos escrever

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

ou

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Vamos definir

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (\text{G.14})$$

de modo que obtemos

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (\text{G.15})$$

que é a equação diferencial que descreve o comportamento da carga numa das placas do capacitor. Para uma comparação, a equação diferencial de um oscilador harmônico simples unidimensional oscilando na direção x é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

onde ω_0 é a frequência angular de oscilação do oscilador. Note que as duas equações são idênticas matematicamente, mas descrevem sistemas físicos bem diferentes. A primeira descreve a oscilação da carga num circuito elétrico, ao passo que a segunda descreve uma oscilação puramente mecânica de um sistema mecânico.

Para resolver a equação diferencial G.15 acima, é importante perceber que ela estabelece que a derivada segunda de Q é um múltiplo de Q . Esse fato acontece com as funções exponenciais, do tipo $y = Ae^{Bx}$. Assim, vamos supor que a carga seja dada por

$$Q = ae^{bt} \quad (\text{G.16})$$

onde a e b são constantes, eventualmente complexas, sendo que a carga Q , obviamente, é uma grandeza real. O motivo de incluirmos números complexos se torna evidente quando tomamos a derivada segunda da expressão acima, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}(ae^{bt}) \\ &= \frac{d}{dt}(abe^{bt}) \\ \frac{d^2Q}{dt^2} &= ab^2e^{bt} \end{aligned}$$

e a substituímos, juntamente com a expressão para a carga Q , na equação diferencial G.15, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q &= 0 \\ ab^2e^{bt} + \omega_0^2 ae^{bt} &= 0 \\ ae^{bt}(b^2 + \omega_0^2) &= 0 \end{aligned}$$

Para que a equação acima seja sempre satisfeita, independentemente do valor de t , devemos ter ⁸

$$\begin{aligned} b^2 + \omega_0^2 &= 0 \\ b^2 &= -\omega_0^2 \end{aligned}$$

ou

$$b = \pm i\omega_0$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Assim, para que a equação G.16 seja solução da equação diferencial G.15 que descreve a carga no circuito LC, devemos ter

$$Q_+ = a_+ e^{i\omega_0 t}$$

ou

$$Q_- = a_- e^{-i\omega_0 t}$$

ou ainda, como a soma das soluções forma a solução geral,

$$Q(t) = a_+ e^{i\omega_0 t} + a_- e^{-i\omega_0 t}$$

Podemos reescrever a expressão acima definindo

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{A}{2} e^{i\delta} \\ a_- &= \frac{A}{2} e^{-i\delta} \end{aligned}$$

onde A e δ são grandezas reais. Substituindo estes valores na equação para a carga, temos

$$Q(t) = \frac{A}{2} e^{i\delta} e^{i\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-i\delta} e^{-i\omega_0 t}$$

ou

$$Q(t) = \frac{A}{2} \left[e^{i(\omega_0 t + \delta)} + e^{-i(\omega_0 t + \delta)} \right]$$

⁸ Note que $a = 0$ também seria uma solução, só que corresponde a $Q(t) = 0$ para qualquer valor de t , ou seja, não há carga no capacitor em nenhum momento. É uma solução trivial, sem grande interesse físico.

Como

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

podemos escrever

$$Q(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

As grandezas A , ω_0 e δ podem agora ser identificadas. A corresponde ao valor máximo que a carga do capacitor pode atingir, o que ocorre quando o cosseno vale 1. Conforme a discussão feita no início desta seção, temos $A = Q_\infty = C\mathcal{E}_0$. O ângulo δ , chamado de *ângulo de fase*, corresponde à defasagem existente entre o instante inicial $t_0 = 0$ e o instante em que se inicia a observação da carga do capacitor. Na situação em que descrevemos o circuito LC, começamos a observar o capacitor quando sua carga era máxima, e esse também foi o instante em que fechamos o circuito. Logo, $\delta = 0$ naquele caso. Por fim, a grandeza ω_0 é uma frequência angular, como ocorre também no caso do oscilador harmônico simples, e é fácil perceber isso se fizermos o gráfico $Q(t) \times \omega_0 t$, como mostra a figura G.13.

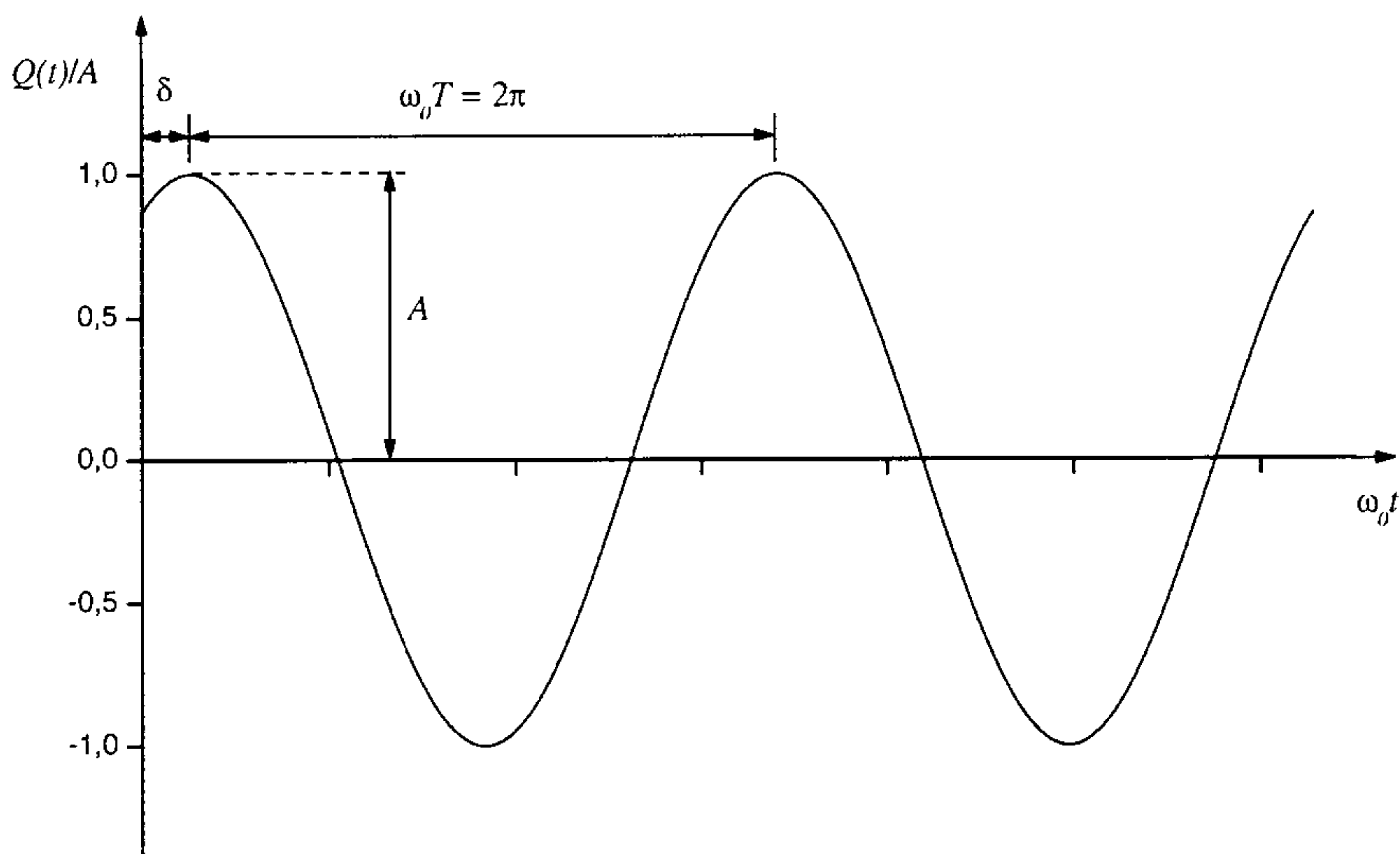


Figura G.13: Gráfico $Q(t) \times \omega_0 t$ para o circuito LC sem fonte de tensão externa.

Utilizando o valor conhecido para A , temos

$$Q(t) = C\mathfrak{E}_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (\text{G.17})$$

A corrente i fica, então,

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -C\mathfrak{E}_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (\text{G.18})$$

No circuito LC, quando a corrente que circula pelo circuito é máxima, a carga no capacitor é nula, e quando a carga no capacitor é máxima, a corrente que circula é nula. As cargas oscilam de uma placa do capacitor para a outra, de forma harmônica, como ocorre no oscilador harmônico simples mecânico.

Uma questão interessante corresponde ao fato de que, se não há resistências no circuito, a energia eletromagnética associada a ele deve ser conservada. Para verificar isso explicitamente, vamos calcular a energia armazenada no capacitor e no indutor no decorrer do tempo e verificar se a energia total, que é a soma dessas duas grandezas, é uma constante. A energia potencial armazenada no capacitor pode ser obtida mediante a equação 11.9,

$$\mathbb{U} = \frac{Q^2}{2C}$$

de modo que, utilizando a expressão G.17, temos

$$\mathbb{U} = \frac{C^2\mathfrak{E}_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)}{2C}$$

ou

$$\mathbb{U} = \frac{C\mathfrak{E}_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)}{2}$$

Note que a energia armazenada no capacitor não é constante no tempo. A energia potencial armazenada no indutor pode ser obtida por meio da equação 18.55,

$$\mathcal{U} = \frac{\mathfrak{L}i^2}{2}$$

que fica, utilizando a expressão G.18,

$$\mathcal{U} = \mathcal{L} \frac{C^2 \mathfrak{E}_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)}{2}$$

Lembrando que $\omega_0^2 = \frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}}$, achamos

$$\mathcal{U} = \mathcal{L} \frac{C^2 \mathfrak{E}_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)}{2\mathcal{L}\mathcal{C}}$$

ou

$$\mathcal{U} = \frac{C \mathfrak{E}_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)}{2}$$

que também oscila no tempo, não sendo, portanto, constante. A energia total, por outro lado, é a soma das energias armazenadas no capacitor e no indutor, e ela é constante, como podemos ver mediante

$$U = \mathbb{U} + \mathcal{U}$$

que fica

$$U = \frac{C \mathfrak{E}_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)}{2} + \frac{C \mathfrak{E}_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)}{2}$$

ou

$$U = \frac{C \mathfrak{E}_0^2}{2} [\cos^2(\omega_0 t + \delta) + \sin^2(\omega_0 t + \delta)]$$

e então,

$$U = \frac{C \mathfrak{E}_0^2}{2}$$

que é uma constante, e a energia é conservada no circuito LC. Ela é armazenada no campo elétrico do capacitor e transferida continuamente para o campo magnético do indutor, e vice-versa.

G.2.4 Circuito RLC em Série

Os circuitos RC, RL e LC são idealizações de um circuito mais geral que envolve os três elementos de circuito, um resistor de resistência $\mathcal{R}$, um

capacitor de capacitância $\mathcal{C}$ e um indutor de indutância $\mathcal{L}$, isso porque na prática não se pode fabricar componentes ideais. Assim, vamos agora estudar o circuito RLC em série, cujo esquema é mostrado na figura G.14 abaixo.

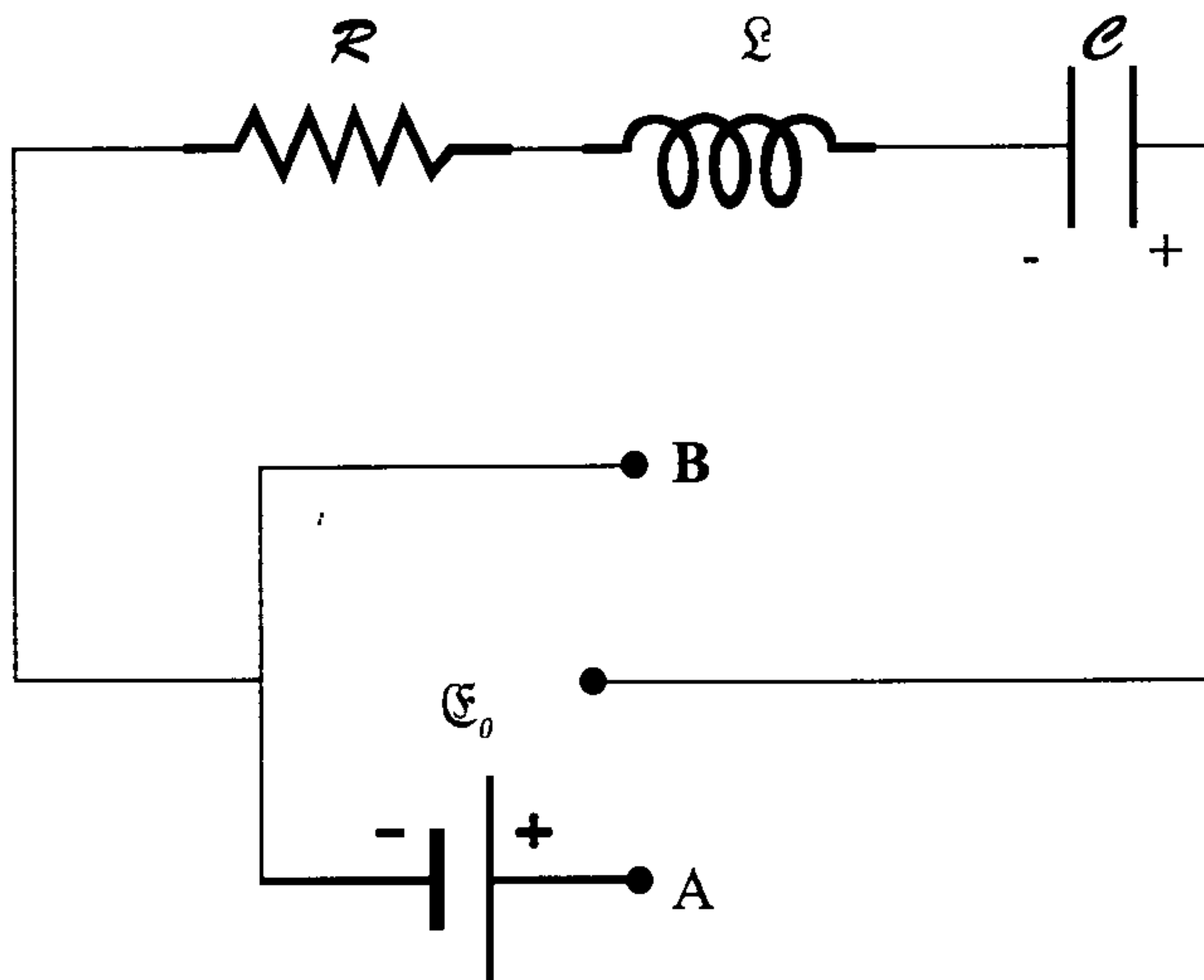


Figura G.14: Diagrama de um circuito RLC em série.

Como fizemos com relação aos circuitos anteriores, para montar a equação diferencial, usamos a lei das malhas. Quando o contato é colocado em **A**, temos

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{L} \frac{di}{dt} - \mathcal{R}i - \frac{Q}{\mathcal{C}} = 0$$

onde Q é a carga e i é a corrente que se relaciona com a carga por intermédio de 12.4,

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Com esta consideração, a equação diferencial acima pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} \frac{d^2Q}{dt^2} + \mathcal{R} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\mathcal{C}} = \mathcal{E}_0$$

ou

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\mathcal{L}\mathcal{C}} = \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{L}} \quad (\text{G.19})$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem. Vamos compará-la com a equação diferencial de um oscilador harmônico forçado unidimensional formado por um sistema massa-mola submetido a uma força externa F_{ext} , que é

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_{\text{ext}}}{m}$$

onde m é a massa do oscilador, γ é um termo de atrito e k é a constante da mola. Da comparação, vemos que elas apresentam a mesma estrutura matemática, apesar de representarem sistemas físicos diferentes. No entanto, com base nas características físicas dos termos que aparecem na equação G.19, é possível fazer uma correspondência direta entre eles. A carga Q corresponde à posição x , enquanto a corrente $i = \frac{dQ}{dt}$ seria a velocidade $v = \frac{dx}{dt}$. O atrito é representado pelo coeficiente γ no oscilador harmônico. No sistema elétrico, ele está associado com a resistência elétrica $\mathcal{R}$ do resistor, que age como dissipador de energia. O papel inercial da massa m é representado pela auto-indutância $\mathcal{L}$ do indutor, pois este se opõe às variações na corrente, da mesma forma que um corpo em movimento uniforme tende a permanecer assim se não agirem forças sobre ele. A resistência do corpo em mudar seu movimento aparece como a sua inércia, e no caso da corrente, como a indutância $\mathcal{L}$ do indutor. A força externa está associada à tensão externa $\mathfrak{E}_0$. Por fim, no caso elétrico, é o capacitor que faz o papel de mola. No entanto, a relação entre eles é tal que a constante de mola está ligada ao inverso da capacitância $\mathcal{C}$ do capacitor. Esquematicamente, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} x \Leftrightarrow Q \\ v \left(= \frac{dx}{dt} \right) \Leftrightarrow i \left(= \frac{dQ}{dt} \right) \\ m \Leftrightarrow \mathcal{L} \\ \gamma \Leftrightarrow \mathcal{R} \\ k \Leftrightarrow \frac{1}{\mathcal{C}} \\ F_{\text{ext}} \Leftrightarrow \mathfrak{E}_0 \end{array} \right. \quad (\text{G.20})$$

Podemos agora reescrever a equação diferencial, considerando as seguintes definições:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}}} \quad (\text{G.21})$$

que é a frequência natural do sistema,

$$2\beta = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}} \quad (\text{G.22})$$

que é o termo de amortecimento, e

$$\epsilon_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{L}} \quad (\text{G.23})$$

Assim, a equação diferencial G.19 fica

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2Q = \epsilon_0 \quad (\text{G.24})$$

Essa equação é uma equação diferencial não-homogênea. Sua solução corresponde a uma solução particular somada à solução da equação diferencial homogênea correspondente, que é

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2Q = 0 \quad (\text{G.25})$$

Para resolver essa equação diferencial, consideramos a mesma suposição feita no caso do circuito LC, ou seja,

$$Q(t) = ae^{bt} \quad (\text{G.26})$$

onde a e b podem ser complexos, mas Q , a carga, é necessariamente real. Com esta suposição, temos

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= abe^{bt} \\ \frac{d^2Q}{dt^2} &= ab^2e^{bt} \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na equação diferencial, obtemos

$$ab^2e^{bt} + 2ab\beta e^{bt} + a\omega_0^2e^{bt} = 0$$

ou

$$ae^{bt}(b^2 + 2b\beta + \omega_0^2) = 0$$

Como a não deve ser sempre zero (solução trivial) e a exponencial não é nula, temos

$$b^2 + 2b\beta + \omega_0^2 = 0$$

que é uma equação cujas raízes são os valores de b que devem ser utilizados na solução tentativa G.26. Elas são dadas por

$$b = -\frac{2\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

que se desdobra em

$$b_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

e

$$b_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

As raízes acima podem ser complexas, reais e distintas, e reais e iguais, dependendo do valor do termo dentro da raiz quadrada. Portanto, temos que separar estes três casos.

I Raízes Complexas

Se o termo $\beta^2 - \omega_0^2$ for negativo, então as raízes serão complexas. Para este caso, é útil definir

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

de modo que as raízes se tornem

$$b_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta + \sqrt{-\omega^2} = -\beta + i\omega$$

e

$$b_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta - \sqrt{-\omega^2} = -\beta - i\omega$$

Assim, a solução da equação diferencial G.25, para este caso, é formada pelas funções

$$Q_+ = a_+ e^{(-\beta + i\omega)t} \quad \text{e} \quad Q_- = a_- e^{(-\beta - i\omega)t}$$

de acordo com a solução tentativa G.26. A solução geral é a soma das duas soluções, ou seja,

$$Q(t) = a_+ e^{(-\beta + i\omega)t} + a_- e^{(-\beta - i\omega)t}$$

Esta expressão pode ser reescrita se definirmos

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{A}{2} e^{i\delta} \\ a_- &= \frac{A}{2} e^{-i\delta} \end{aligned}$$

onde A e δ são reais. Utilizando estas definições, temos

$$Q(t) = \frac{A}{2} e^{i\delta} e^{(-\beta + i\omega)t} + \frac{A}{2} e^{-i\delta} e^{(-\beta - i\omega)t}$$

ou

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{A}{2} e^{i\delta} e^{-\beta t} e^{i\omega t} + \frac{A}{2} e^{-i\delta} e^{-\beta t} e^{-i\omega t} \\ Q(t) &= \frac{A e^{-\beta t}}{2} \left[e^{i(\omega t + \delta)} + e^{-i(\omega t + \delta)} \right] \end{aligned}$$

que fica

$$Q(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta) \quad (\text{G.27})$$

que é a solução da equação diferencial G.25 quando as raízes são complexas. A carga no capacitor oscila com uma frequência angular ω , que não é a frequência natural do sistema, mas a amplitude da oscilação decresce exponencialmente com o tempo, por causa do termo $A e^{-\beta t}$. Esse circuito é chamado de circuito RLC subcrítico. Em termos das grandezas elétricas, a frequência vale

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}} - \left(\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}}\right)^2}$$

A figura G.15 apresenta um gráfico $Q(t) \times t$ para o circuito RLC subcrítico.

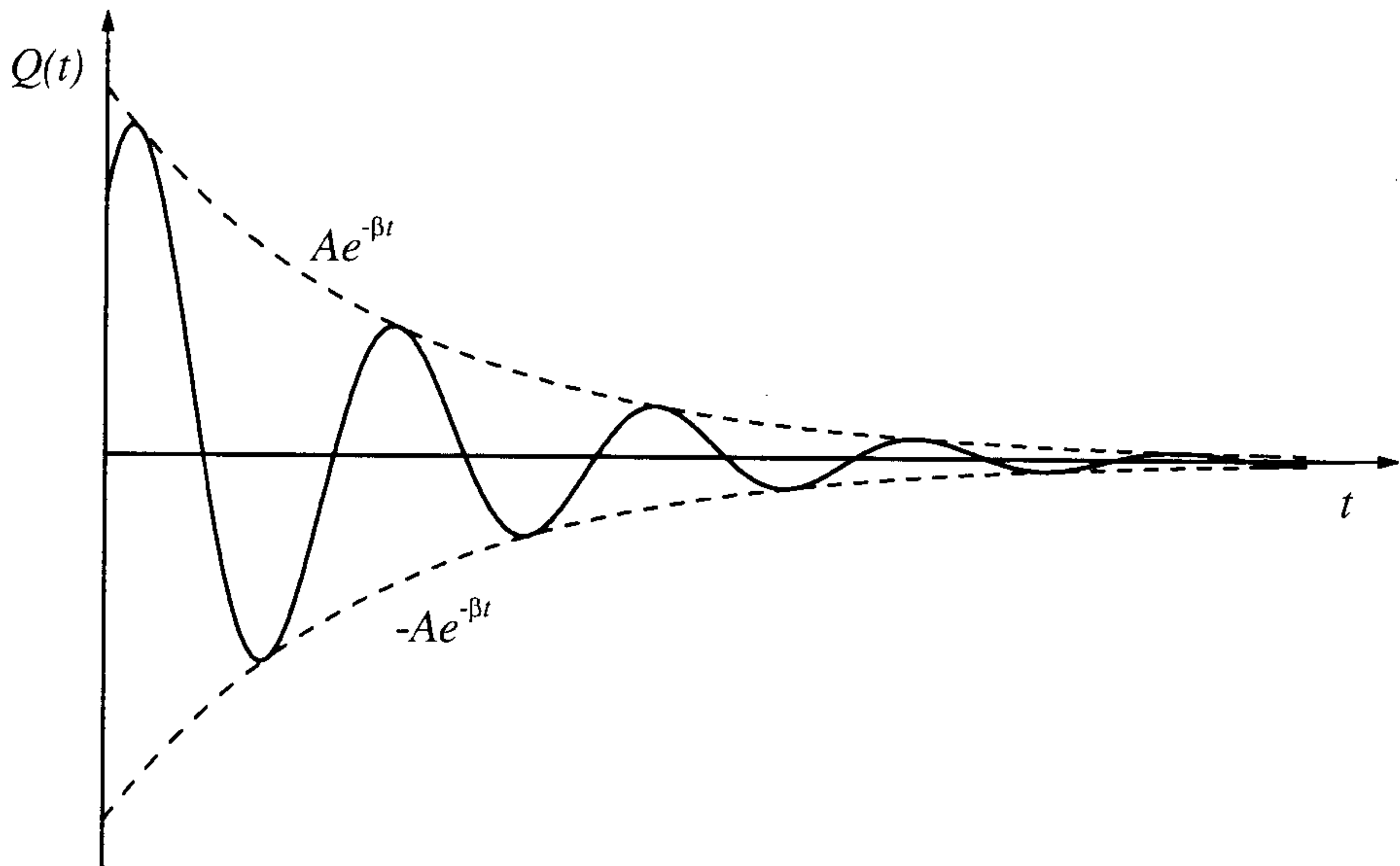


Figura G.15: Gráfico de $Q(t) \times t$ para o circuito RLC subcrítico.

II Raízes Reais e Distintas

Quando $\beta^2 - \omega_0^2$ é positivo, a raiz quadrada resulta num número real. Vamos definir, neste caso,

$$\omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2$$

e então as raízes ficam

$$b_1 = -\beta + \omega$$

e

$$b_2 = -\beta - \omega$$

As soluções que formam a solução geral são

$$Q_+ = a_+ e^{(-\beta + \omega)t} \quad \text{e} \quad Q_- = a_- e^{(-\beta - \omega)t}$$

de modo que achamos

$$Q(t) = a_+ e^{(-\beta+\omega)t} + a_- e^{(-\beta-\omega)t}$$

Definimos agora

$$a_+ = \frac{A}{2} e^{\delta}$$

$$a_- = \frac{A}{2} e^{-\delta}$$

onde A e δ são reais. Utilizando estas definições, temos

$$Q(t) = \frac{A}{2} e^{\delta} e^{(-\beta+\omega)t} + \frac{A}{2} e^{-\delta} e^{(-\beta-\omega)t}$$

ou

$$Q(t) = \frac{A}{2} e^{\delta} e^{-\beta t} e^{\omega t} + \frac{A}{2} e^{-\delta} e^{-\beta t} e^{-\omega t}$$

$$Q(t) = \frac{A e^{-\beta t}}{2} \left[e^{\omega t + \delta} + e^{-(\omega t + \delta)} \right]$$

A função cosseno hiperbólico é definida por meio de

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

Com o uso desta expressão, achamos

$$Q(t) = A e^{-\beta t} \cosh(\omega t + \delta) \quad (\text{G.28})$$

que é a solução da equação diferencial G.25 quando as raízes são reais e distintas. A carga no capacitor decresce rapidamente e não chega a oscilar, já que o cosseno hiperbólico não é uma função periódica. Esse circuito é chamado de circuito RLC supercrítico. A figura G.16 apresenta um gráfico $Q(t) \times t$ para o circuito RLC supercrítico.

III Raízes Reais e Iguais

Quando $\beta^2 = \omega_0^2$, temos o caso em que as raízes são reais e iguais, ou seja,

$$b_1 = b_2 = -\beta = -\omega_0$$

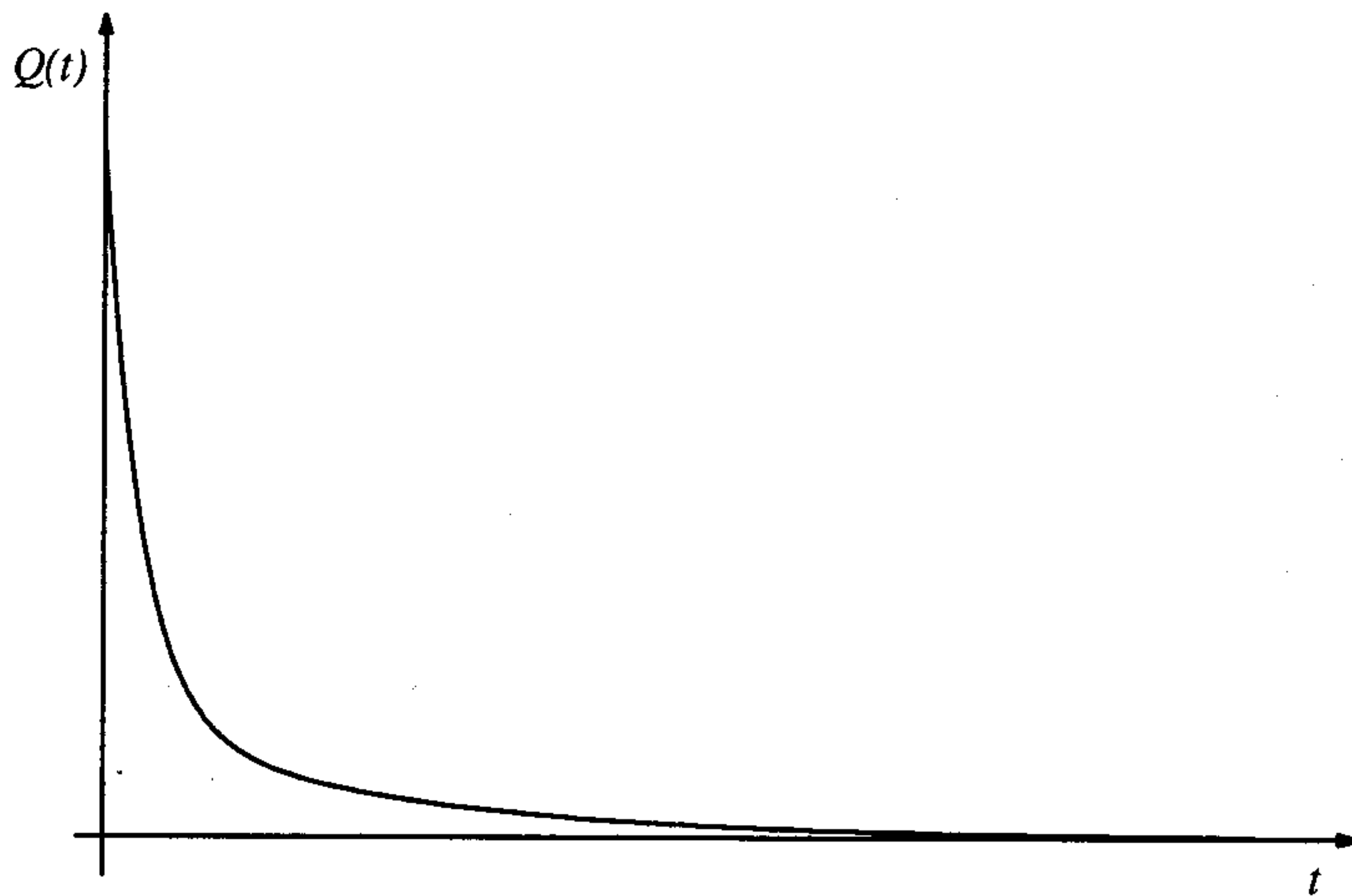


Figura G.16: Gráfico de $Q(t) \times t$ para o circuito RLC supercrítico.

Portanto, uma das soluções que formam a solução geral é

$$Q_1 = a_1 e^{-\omega_0 t}$$

e precisamos obter a outra solução, para que possamos formar a solução geral. Ela pode ser encontrada se supusermos que ela seja da forma

$$Q_2 = a_2 t e^{-bt}$$

Precisamos das derivadas dessa expressão para substituí-las na equação G.25, de modo que

$$\frac{dQ_2}{dt} = a_2 e^{-bt} - a_2 b t e^{-bt}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_2}{dt^2} &= -a_2 b e^{-bt} - a_2 b e^{-bt} + a_2 \beta^2 t e^{-\beta t} \\ \frac{d^2 Q_2}{dt^2} &= a_2 b^2 t e^{-bt} - 2a_2 b e^{-bt} \end{aligned}$$

Voltando agora à equação diferencial, temos

$$a_2 b^2 t e^{-bt} - 2a_2 b e^{-bt} + 2b(a_2 e^{-bt} - a_2 b t e^{-bt}) + \omega_0^2 a_2 t e^{-bt} = 0$$

ou

$$a_2 b^2 t e^{-bt} - 2a_2 b e^{-bt} + 2a_2 b e^{-bt} - 2a_2 b^2 t e^{-bt} + \omega_0^2 a_2 t e^{-bt} = 0$$

$$a_2 t e^{-bt} (\omega_0^2 - b^2) = 0$$

Para que a equação acima seja válida sempre, devemos ter

$$\omega_0^2 - b^2 = 0$$

ou

$$b = \omega_0$$

o que faz com que a segunda solução se torne

$$Q_2 = a_2 t e^{-\omega_0 t}$$

e a solução geral fica

$$Q = a_1 e^{-\omega_0 t} + a_2 t e^{-\omega_0 t}$$

ou

$$Q(t) = (a_1 + a_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad (\text{G.29})$$

Note que esse caso é o caso limite entre dois comportamentos diferentes. Quando o amortecimento é um pouco menor, temos um circuito oscilante subcrítico. Quando é um ponto maior, a carga não oscila mais e cai rapidamente a zero. Por isso, esse circuito é chamado de circuito RLC crítico. O comportamento da carga como função do tempo é apresentado na figura G.17.

A solução da equação diferencial homogênea G.25 é dada por um dos três casos descritos acima. Resta agora obter uma solução particular para a equação G.24,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = e_0$$

Uma possível solução consiste em considerarmos

$$Q_p = B$$

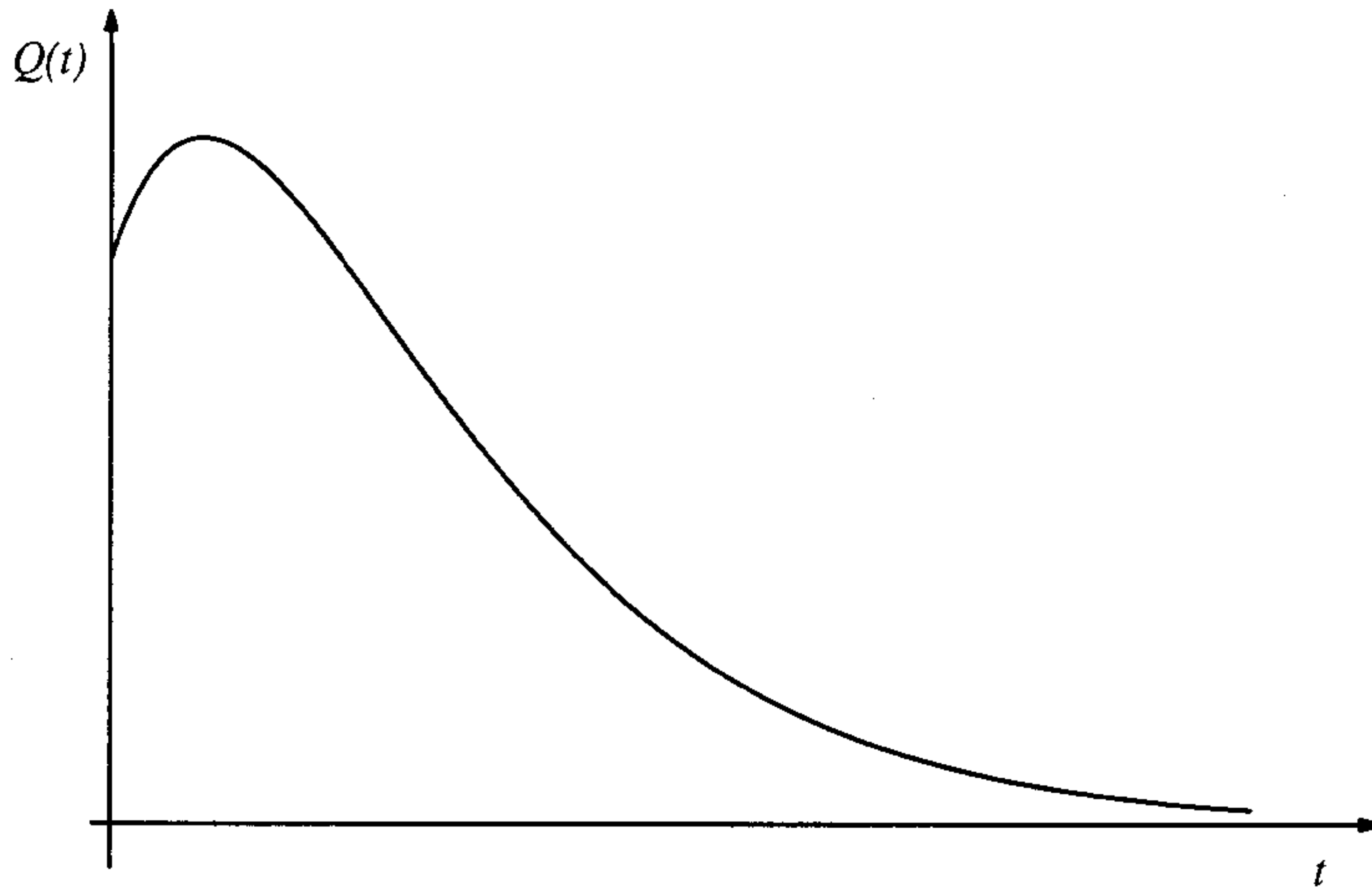


Figura G.17: Gráfico de $Q(t) \times t$ para o circuito RLC crítico.

onde B é uma constante. Substituindo esta expressão na equação diferencial, e lembrando que as derivadas são nulas, achamos

$$\omega_0^2 B = \epsilon_0$$

ou

$$B = \frac{\epsilon_0}{\omega_0^2}$$

Das equações G.21,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$$

e G.23,

$$\epsilon_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{L}}$$

temos

$$B = \frac{\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{L}}}{\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$$

ou

$$B = C\mathfrak{E}_0$$

Portanto, a solução particular fica

$$Q_p(t) = C\mathfrak{E}_0 \quad (\text{G.30})$$

e a solução geral é a soma da equação G.30 com uma das soluções homogêneas dadas pelas expressões G.27 (circuito RLC subcrítico), G.28 (circuito RLC supercrítico) e G.29 (circuito RLC crítico). Quando o termo de amortecimento é nulo, isto é, quando o resistor de resistência $\mathcal{R}$ é retirado do circuito, temos uma situação especial, que corresponde ao circuito LC.

G.3 Circuitos de Corrente Alternada

Após analisar o que ocorre com circuitos simples de corrente contínua, vamos considerar circuitos também elementares só que agora supondo que a corrente e a tensão possam ser alternadas, isto é, $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(t)$ e $i = i(t)$. Em particular, estaremos interessados em uma dependência temporal para a tensão externa aplicada, do tipo

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos \omega t \quad (\text{G.31})$$

onde $\mathfrak{E}_0$ é a amplitude da tensão, ou valor máximo, e $\omega = 2\pi\nu$ é a frequência angular, sendo ν a frequência linear de oscilação da tensão. Tal condição é importante porque corresponde aproximadamente ao que ocorre na prática na distribuição de tensão à população, em que geradores alternados oscilantes, conforme discutimos na seção G.1, fornecem tensões senoidas ou cossenoidais numa certa frequência, e no Brasil usa-se $\nu = 60$ Hz. Assim, vamos nos concentrar nessa forma funcional para a tensão.

Para proceder ao estudo, é interessante introduzir, em paralelo, um procedimento analítico e uma análise gráfica para os circuitos. Para estabelecer conceitos, vamos começar com o circuito mais simples que podemos ter, que corresponde a um resistor ligado em série a uma fonte de tensão, como mostra a figura G.18. Para esse caso extremamente simples, que corresponde a um circuito puramente resistivo, a lei das malhas torna-se

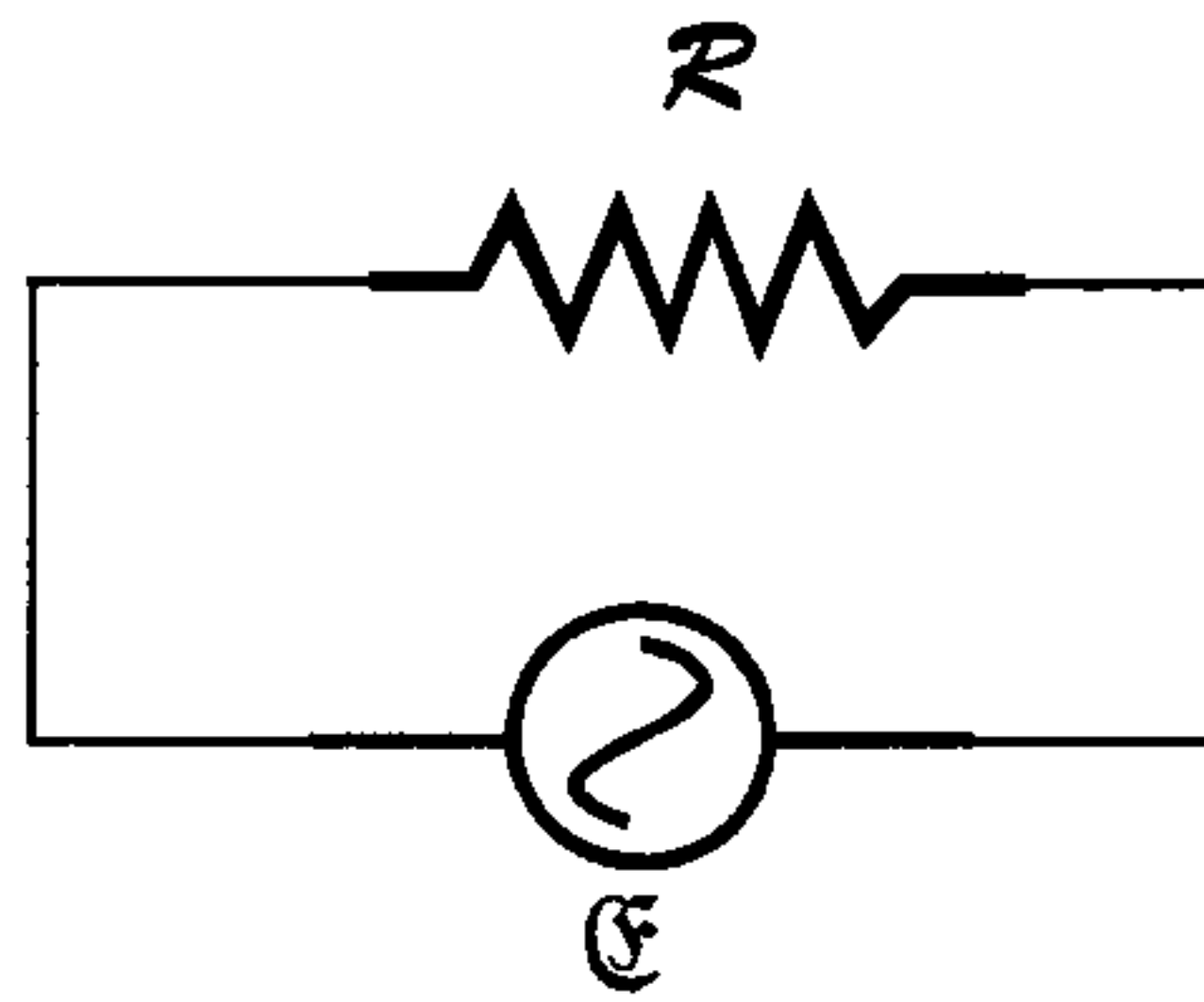


Figura G.18: Um circuito de corrente alternada puramente resistivo.

$$\mathcal{E} - \mathcal{R}i_{\mathcal{R}} = 0 \quad (\text{G.32})$$

ou

$$i_{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}} \quad (\text{G.33})$$

ou ainda, usando a expressão G.31,

$$i_{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{R}} \cos \omega t = i_{0,\mathcal{R}} \cos \omega t \quad (\text{G.34})$$

Essa expressão nos informa que a corrente no resistor e a tensão nele estão em fase, ou seja, atingem os valores máximos, nulos, mínimos, etc, ao mesmo tempo. Podemos representar graficamente essa situação utilizando a idéia de *fasor*. Um fasor é a representação vetorial de uma grandeza escalar que varia de forma senoidal ou cossenoidal. Considere o vetor apresentado na figura G.19.

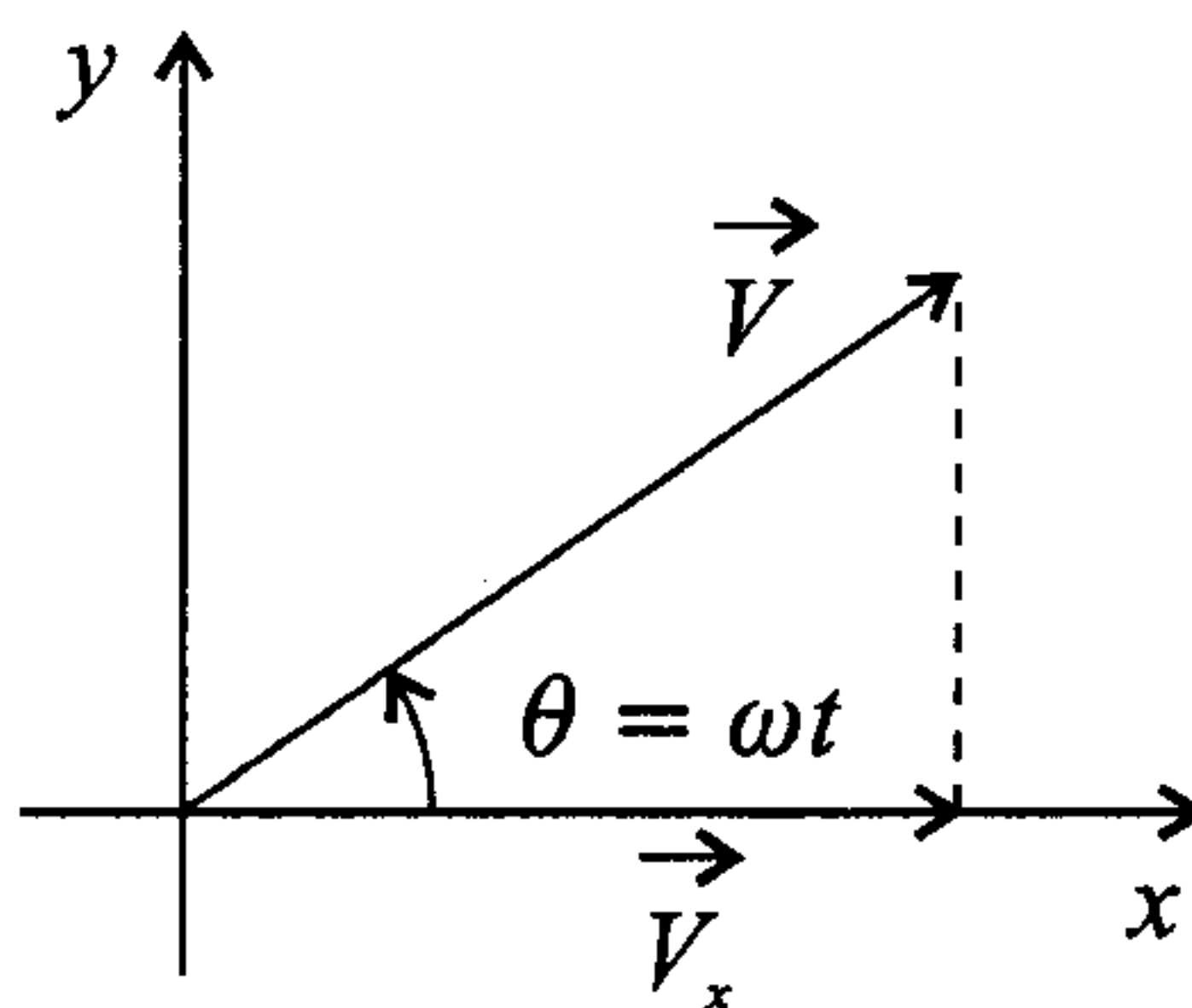


Figura G.19: Representação de um fasor.

A projeção de $\vec{V}$ no eixo x vale

$$V_x = V \cos \theta = V \cos \omega t \tag{G.35}$$

Agora, considere a tensão dada em G.31,

$$\mathfrak{E}(t) = \mathfrak{E}_0 \cos \omega t$$

O valor num dado tempo t , ou seja, o valor instantâneo de $\mathfrak{E}$, corresponde à projeção no eixo x de um vetor, ou, mais precisamente, um fasor, de módulo $\mathfrak{E}_0$, cujo ângulo instantâneo com o eixo é $\theta = \omega t$. À medida que o tempo passa, esse valor muda, e o fasor “gira” no plano xy . Assim, um fasor é um vetor com uma fase que varia com o tempo. Se representarmos a tensão $\mathfrak{E}(t)$ num diagrama de fasores, teremos a figura G.20.

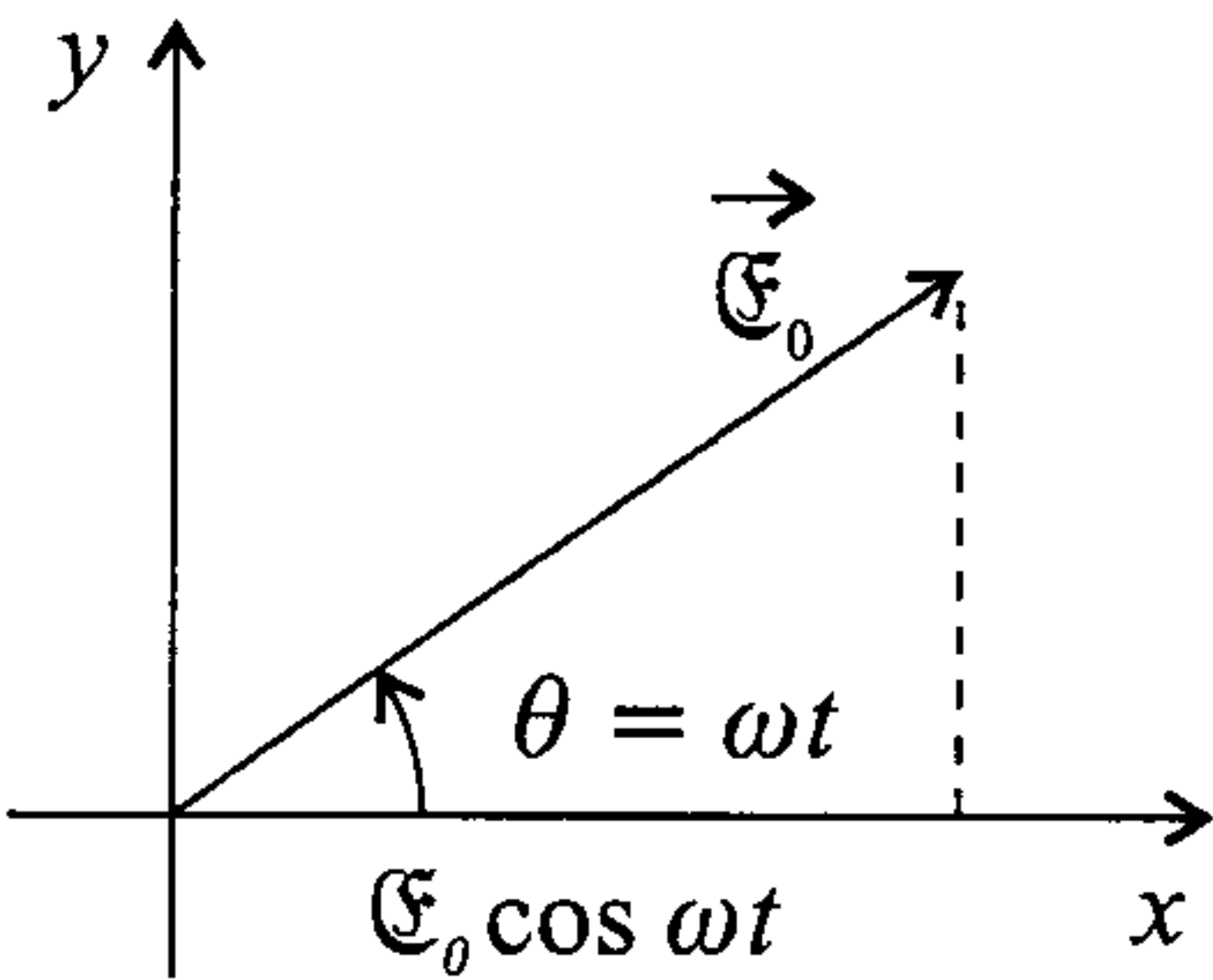


Figura G.20: Representação da tensão alternada como um fasor.

Agora, podemos desenhar um diagrama de fasores para o circuito puramente resistivo da figura G.18, incluindo a tensão e a corrente. Nesse caso, como elas estão em fase, o diagrama fica como na figura G.21.

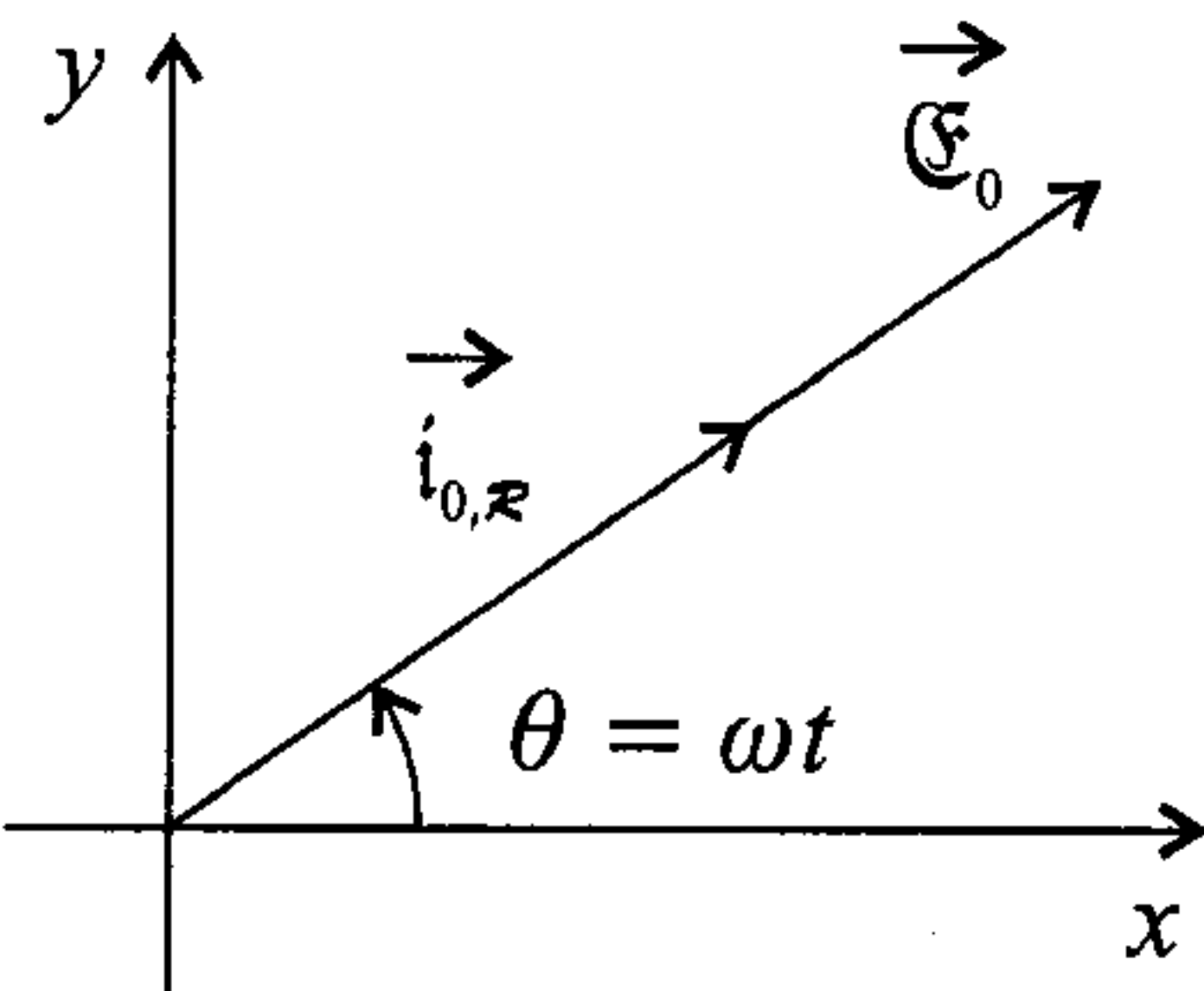


Figura G.21: Diagrama de fasores para o circuito da figura G.18.

Assim, os dois fasores giram ao mesmo tempo, e em fase. Vamos agora considerar um circuito puramente capacitivo, formado por um capacitor e a fonte de tensão, como mostra a figura G.22.

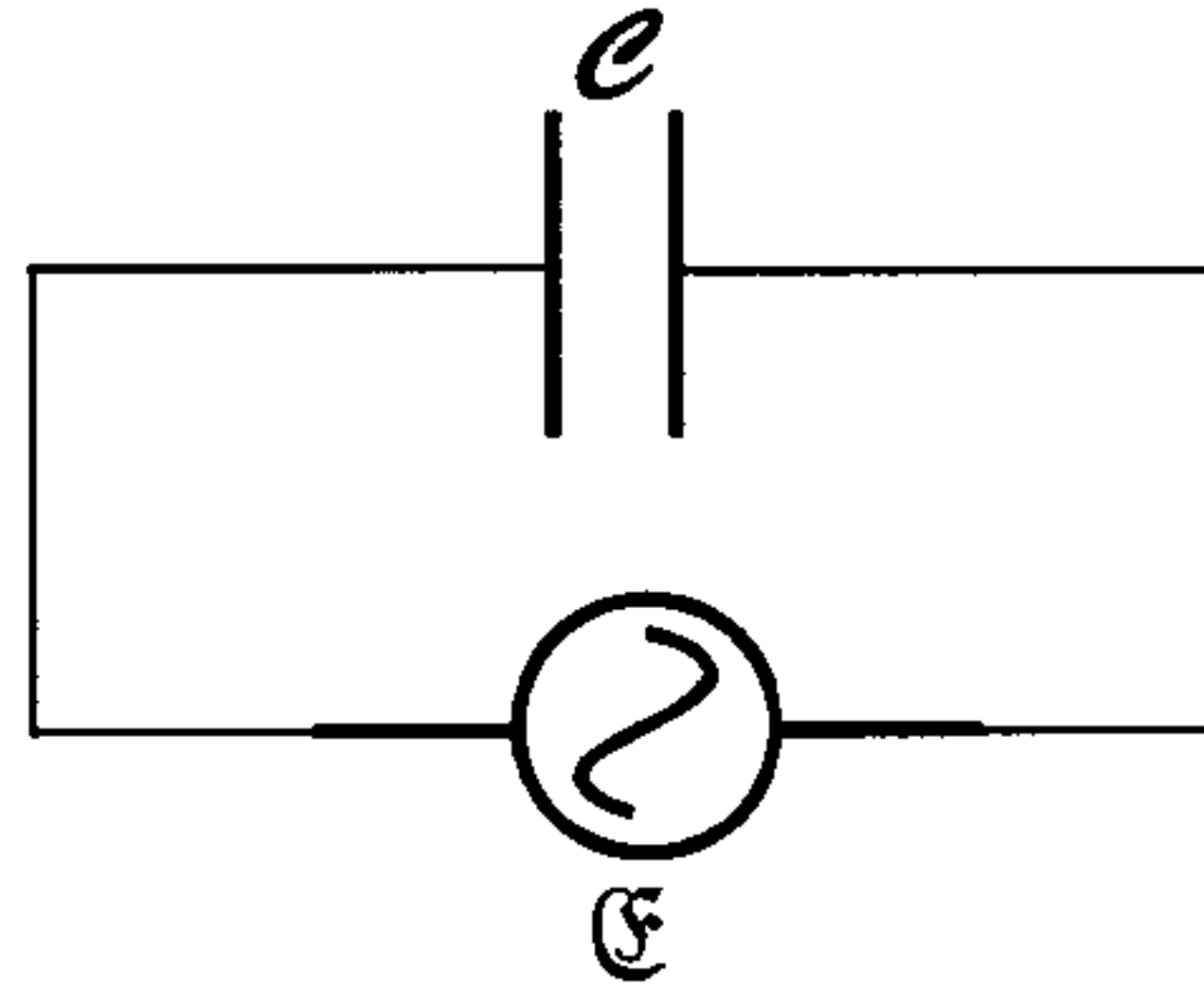


Figura G.22: Um circuito puramente capacitivo.

Nesse caso, a lei das malhas fornece

$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0 \quad (\text{G.36})$$

ou

$$Q = C\mathcal{E} = C\mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (\text{G.37})$$

Lembrando que

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

vamos calcular a corrente no capacitor, ou seja,

$$i_C = -\omega C\mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (\text{G.38})$$

Agora, considere que

$$\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t \cos \frac{\pi}{2} - \sin \omega t \sin \frac{\pi}{2} = -\sin \omega t \quad (\text{G.39})$$

Assim, podemos escrever a equação G.37 como

$$i_C = \omega C\mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{G.40})$$

Agora, vamos definir uma grandeza chamada reatância capacitiva $\mathcal{X}_C$, por intermédio de

$$\mathcal{X}_C = \frac{1}{\omega C} \quad (\text{G.41})$$

e assim, a equação G.40 pode ser escrita como

$$i_C = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{X}_C} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = i_{0,C} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{G.42})$$

Agora, podemos comparar esta expressão com a equação G.34, para o caso do circuito puramente resistivo. O primeiro fato a notar é que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{X}_C$ têm a mesma unidade, o ohm, com a diferença de que $\mathcal{R}$ é a resistência de um resistor, onde ocorre dissipação de energia, e no capacitor isso não ocorre. Outro fato a notar consiste nas fases dos cossenos. A corrente está, no capacitor, na frente da tensão, por um valor de $\frac{\pi}{2}$, ou 90° . Assim, quando a corrente atinge seu valor máximo, a tensão é nula, e vice-versa. Podemos entender o processo fisicamente do seguinte modo. Começemos a análise quando o capacitor está descarregado, sendo a tensão nele nula. Nesse ponto a corrente do circuito é máxima, e ela começa diminuir, pois cargas começam a chegar às placas do capacitor, produzindo uma tensão inversa e dificultando a chegada de mais cargas. À medida que o tempo passa, a quantidade de cargas no capacitor aumenta, e também a tensão nele, enquanto a corrente tende a se anular, o que ocorre quando o capacitor está totalmente carregado. Nesse ponto, a corrente inverte de sentido, pois cargas vão passar de uma placa para a outra do capacitor. Assim, a tensão começa a diminuir e a corrente aumenta, até chegar ao valor máximo de corrente quando o capacitor está completamente descarregado, e o ciclo continua. Como a reatância capacitiva $\mathcal{X}_C$ depende do inverso da frequência, vemos que ela é importante em frequências baixas, diminuindo com o aumento de ω . Num diagrama de fasores, $\mathcal{E}$ e i_C ficariam como na figura G.23.

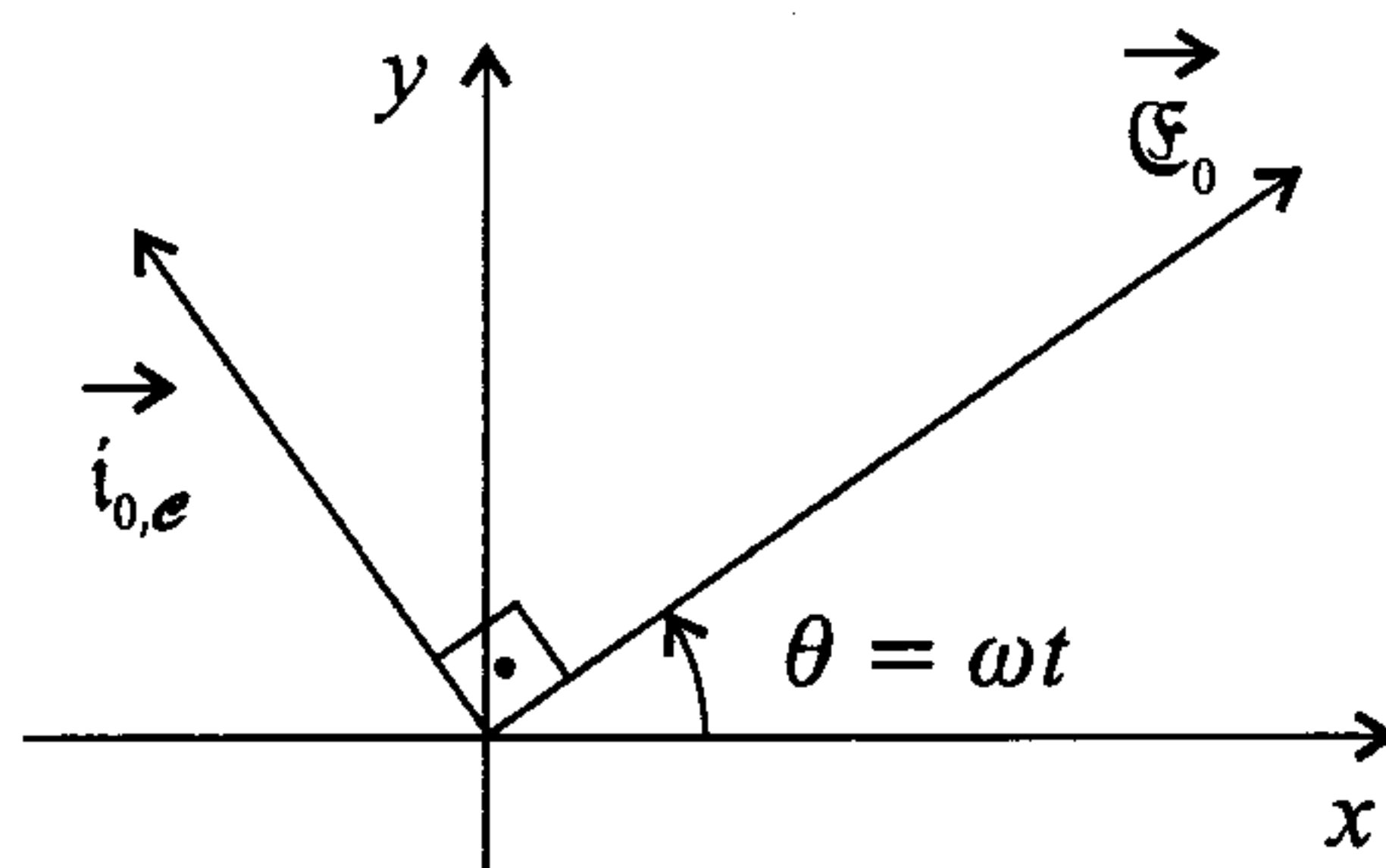


Figura G.23: Diagrama de fasores para o circuito da figura G.22.

Passamos agora a um circuito puramente indutivo, ou seja, um circuito formado por um indutor e uma fonte de tensão, como mostra a figura G.24.

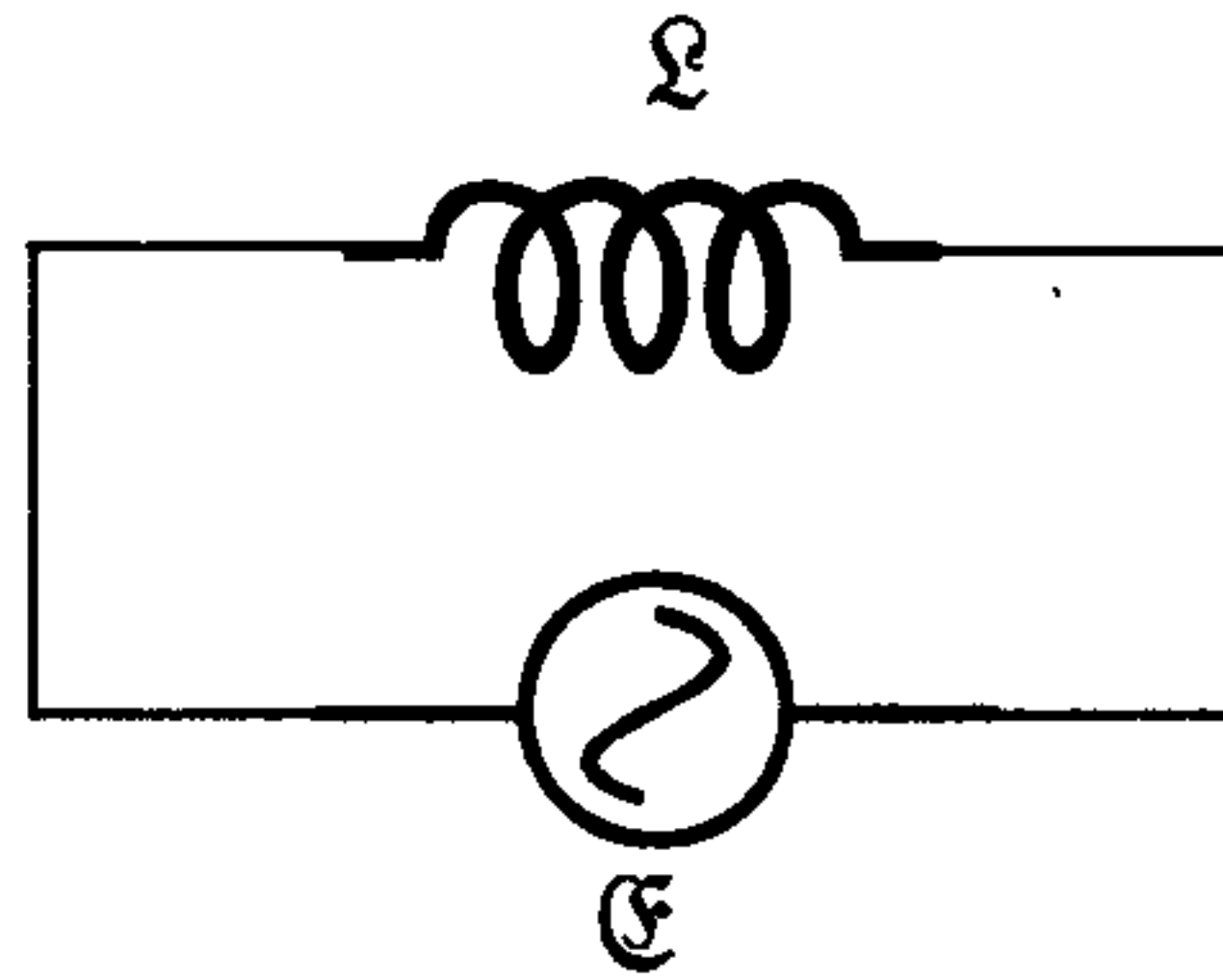


Figura G.24: Um circuito puramente indutivo.

Nesse caso, a lei das malhas fornece

$$\mathcal{E} - \mathcal{L} \frac{di_{\mathcal{L}}}{dt} = 0 \quad (\text{G.43})$$

ou

$$\frac{di_{\mathcal{L}}}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}}$$

e, usando G.31,

$$\frac{di_{\mathcal{L}}}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{L}} \cos \omega t$$

Vamos integrar esta equação, usando o que já sabemos sobre circuitos RL, além do comportamento de indutores, o que nos indica que quando a corrente atinge uma máximo, por exemplo, sua derivada deve ser nula, e vice-versa. Então, temos

$$\int \frac{di_{\mathcal{L}}}{dt} dt = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{L}} \int \cos \omega t dt$$

ou

$$i_{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega \mathcal{L}} \sin \omega t \quad (\text{G.44})$$

Note que

$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t \cos \frac{\pi}{2} + \sin \omega t \sin \frac{\pi}{2} = \sin \omega t \quad (\text{G.45})$$

Assim, podemos reescrever G.44 como

$$i_{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega \mathcal{L}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{G.46})$$

Vamos definir agora a reatância indutiva $\mathcal{X}_{\mathcal{L}}$ por meio de

$$\mathcal{X}_{\mathcal{L}} = \omega \mathcal{L} \quad (\text{G.47})$$

Com essa definição, podemos escrever

$$i_{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{X}_{\mathcal{L}}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_{0,\mathcal{L}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{G.48})$$

Comparando esta expressão com as equações G.34 e G.42, vemos que nesse caso a corrente está atrasada com relação à tensão do ângulo $\frac{\pi}{2}$ radianos ou 90° , havendo, portanto, uma defasagem entre elas. Isso pode ser entendido se considerarmos a lei das malhas G.43 e o modo como o indutor responde a variações de corrente. Considere que a tensão esteja em seu valor máximo. Nesse caso, pela lei das malhas, vemos que a derivada da corrente está em seu valor máximo, o que ocorre quando a corrente é nula. A partir daí, a tensão vai diminuir, o que corresponde a uma diminuição da derivada de i . Além disso, a corrente, como está variando, passa do valor nulo para um valor diferente de zero, e ela aumenta até que atinge um valor máximo, quando sua derivada se anula e também a tensão no circuito. A partir daí, a tensão volta a crescer, assim como a derivada da corrente, mas i decresce até chegar em zero, e o ciclo continua. Note que $\mathcal{X}_{\mathcal{L}}$ também é medido em ohms, mas não é uma resistência real, pois não dissipa energia. Esse fator torna-se mais importante à medida que a frequência ω aumenta, o que pode ser facilmente entendido, pois, nesse caso, haverá grande indução eletromagnética e a *fem* de retorno será também grande, fazendo com que seja mais “difícil” o estabelecimento de uma corrente. Num diagrama de fasores, o circuito puramente indutivo da figura G.24 ficaria como na figura G.25.

Estamos agora em condições de estudar um sistema mais complexo, como o circuito RLC em série da figura G.14. A lei das malhas, para esse caso, fica

$$\mathcal{E} - \mathcal{R}i - \mathcal{L}\frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

ou, derivando em relação ao tempo,

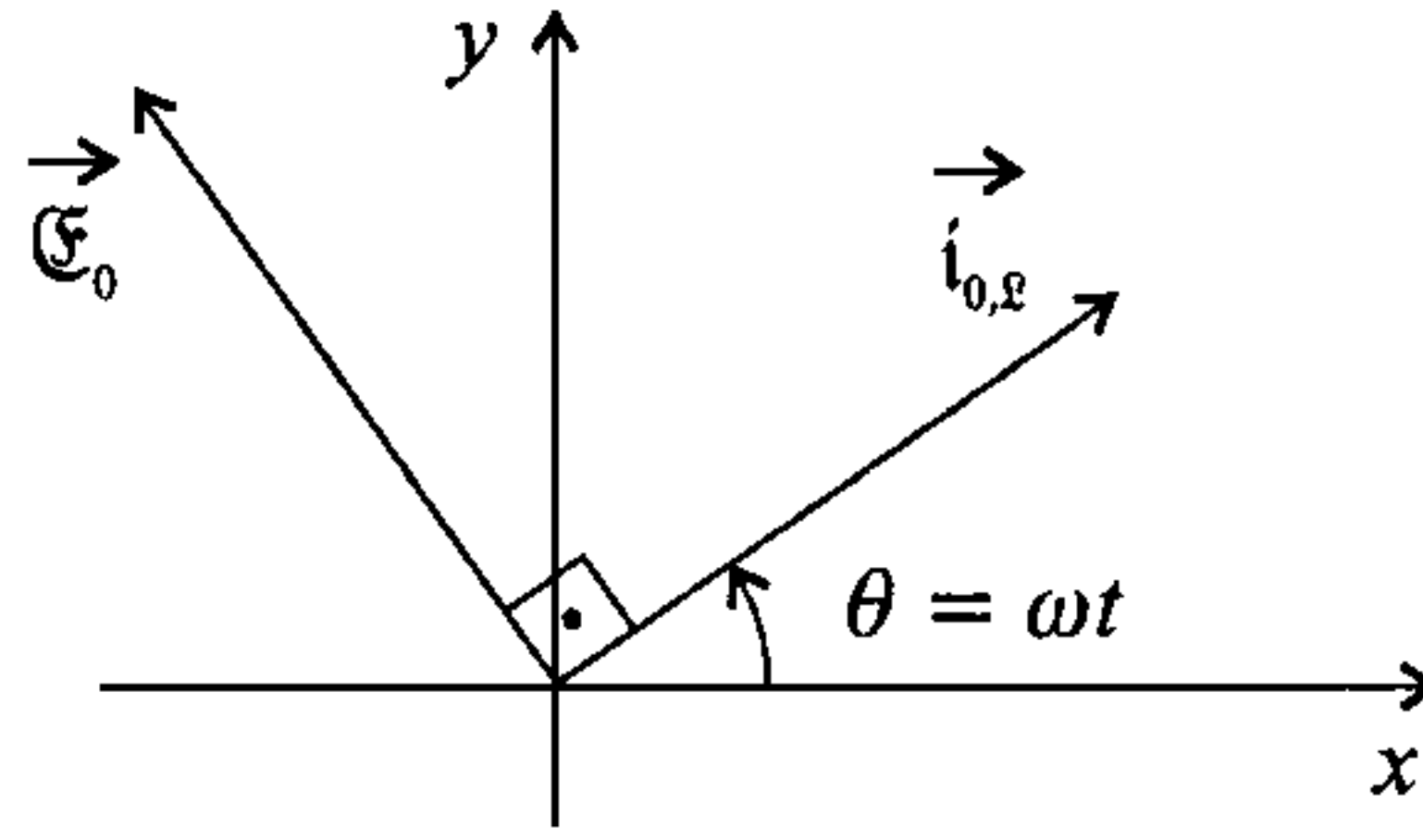


Figura G.25: Diagrama de fasores para o circuito da figura G.24.

$$\mathcal{L} \frac{d^2 i}{dt^2} + \mathcal{R} \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \quad (\text{G.49})$$

Note que, como o circuito está em série, a corrente que passa por todos os elementos é a mesma. Recordando os três casos que vimos acima, podemos estabelecer o seguinte:

- A tensão no resistor, $\mathcal{E}_R$, está em fase com a corrente i no resistor, que é a corrente no circuito.
- A tensão no capacitor, $\mathcal{E}_C$, tem uma diferença de fase de 90° com relação à corrente no circuito, sendo que a corrente fica na frente da tensão.
- A tensão no indutor, $\mathcal{E}_L$, está adiantada, com relação à corrente, de 90° .

Considerando os três pontos acima, o diagrama de fasores para o circuito tem o aspecto qualitativo mostrado na figura G.26.

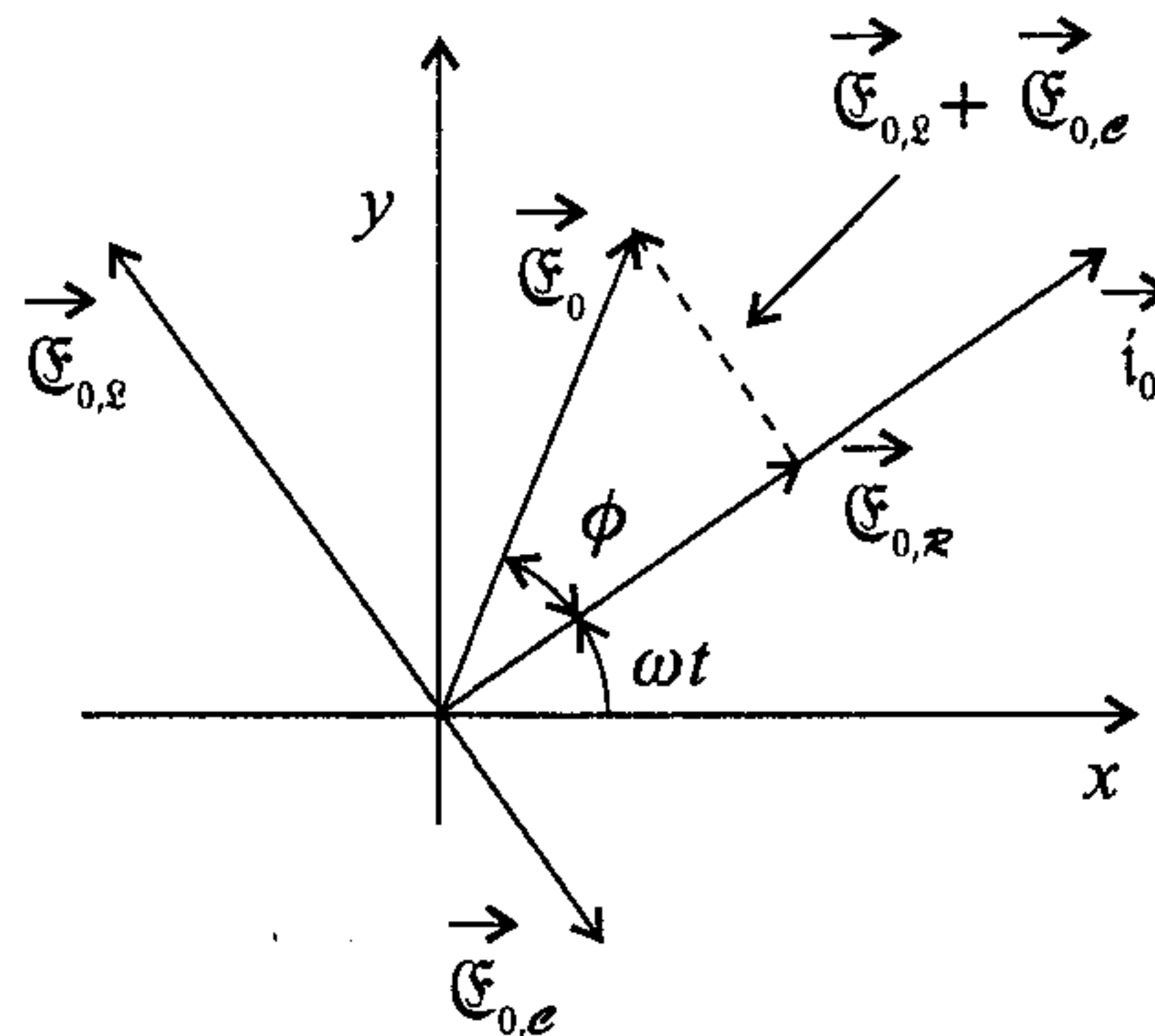


Figura G.26: Diagrama de fasores qualitativo para o circuito RLC em série da figura G.14.

Observe, na figura, que a soma dos fasores das tensões nos elementos resulta na tensão da fonte, que em geral não está em fase com relação à corrente i do circuito. A defasagem entre $\mathfrak{E}$ e i é dada pelo ângulo de fase ϕ e, na figura, $\mathfrak{E}$ está adiantada com relação a i , indicando um circuito com características indutivas.

Agora que, graficamente, temos uma idéia de como se comportam tensão e corrente no circuito, precisamos resolver a equação diferencial G.49. Sendo ela uma equação não-homogênea, sua solução é dada pela solução da homogênea correspondente, o que já foi estudado na seção G.2.4, somado a uma solução particular. Considerando a forma G.31 para a tensão e também o diagrama de fasores G.26, vamos escrever como solução particular para a corrente uma expressão do tipo

$$i = i_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{G.50})$$

Assim, vamos precisar calcular

$$\frac{di}{dt} = -\omega i_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{G.51})$$

e

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -\omega^2 i_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{G.52})$$

além de

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -\omega \mathfrak{E}_0 \sin \omega t \quad (\text{G.53})$$

Substituindo as equações G.50–G.53 em G.49, temos

$$-\mathfrak{L}\omega^2 i_0 \cos(\omega t + \phi) - \mathcal{R}\omega i_0 \sin(\omega t + \phi) + \frac{i_0}{C} \cos(\omega t + \phi) = -\omega \mathfrak{E}_0 \sin \omega t$$

ou

$$\omega \mathfrak{L} i_0 \cos(\omega t + \phi) + \mathcal{R} i_0 \sin(\omega t + \phi) - \frac{i_0}{\omega C} \cos(\omega t + \phi) = \mathfrak{E}_0 \sin \omega t$$

que pode ser reescrita, usando as definições das reatâncias $\mathcal{X}_C$ e $\mathcal{X}_L$, como

$$\mathcal{X}_L i_0 \cos(\omega t + \phi) + \mathcal{R} i_0 \sin(\omega t + \phi) - \mathcal{X}_C i_0 \cos(\omega t + \phi) = \mathfrak{E}_0 \sin \omega t \quad (\text{G.54})$$

Vamos definir agora a grandeza impedância, por meio de

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathfrak{E}_0}{i_0} \quad (\text{G.55})$$

Com o uso de G.55, a equação G.54 simplifica-se para

$$(\mathcal{X}_L - \mathcal{X}_C)i_0 \cos(\omega t + \phi) + \mathcal{R}i_0 \sin(\omega t + \phi) = \mathcal{Z}i_0 \sin \omega t$$

ou, definindo a reatância mediante

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_L - \mathcal{X}_C \quad (\text{G.56})$$

temos

$$\mathcal{X} \cos(\omega t + \phi) + \mathcal{R} \sin(\omega t + \phi) = \mathcal{Z} \sin \omega t \quad (\text{G.57})$$

Agora, temos

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi \quad (\text{G.58})$$

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi \quad (\text{G.59})$$

Substituindo essas expressões em G.57, achamos

$$\mathcal{X}(\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) + \mathcal{R}(\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) = \mathcal{Z} \sin \omega t$$

ou

$$\mathcal{X} \cos \omega t \cos \phi - \mathcal{X} \sin \omega t \sin \phi + \mathcal{R} \sin \omega t \cos \phi + \mathcal{R} \cos \omega t \sin \phi = \mathcal{Z} \sin \omega t$$

ou ainda,

$$(\mathcal{X} \cos \phi + \mathcal{R} \sin \phi) \cos \omega t + (\mathcal{R} \cos \phi - \mathcal{X} \sin \phi - \mathcal{Z}) \sin \omega t = 0 \quad (\text{G.60})$$

Como a equação acima deve valer para qualquer valor de t , cada parênteses deve se anular, o que resulta em duas equações, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \cos \phi + \mathcal{R} \sin \phi &= 0 \\ \mathcal{R} \cos \phi - \mathcal{X} \sin \phi - \mathcal{Z} &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{R}} \quad (\text{G.61a})$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{R} \cos \phi - \mathcal{X} \operatorname{sen} \phi \quad (\text{G.61b})$$

A equação G.61a pode ser representada graficamente por meio de um triângulo, como mostra a figura G.27.

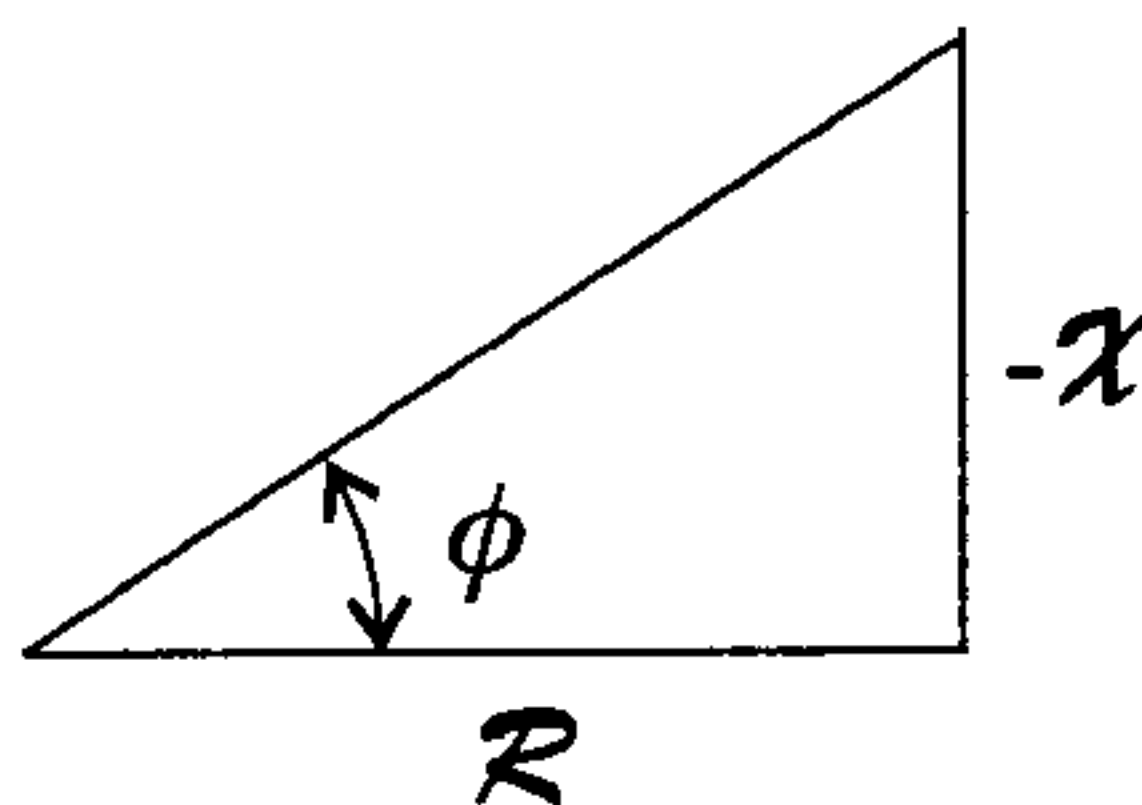


Figura G.27: Triângulo definido a partir da equação G.61a.

Assim, a hipotenusa do triângulo vale

$$a = \sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}$$

e, da figura, temos também

$$\cos \phi = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}} \quad (\text{G.62a})$$

$$\operatorname{sen} \phi = -\frac{\mathcal{X}}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}} \quad (\text{G.62b})$$

Utilizando essas equações em G.61b, obtemos

$$\mathcal{Z} = \mathcal{R} \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}} - \mathcal{X} \left(-\frac{\mathcal{X}}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}} \right)$$

ou

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{R}^2}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}} + \frac{\mathcal{X}^2}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}}$$

o que resulta em

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2}}$$

ou, finalmente,

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{X}^2} \quad (\text{G.63})$$

que pode ser reescrita nas formas

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\mathcal{R}^2 + (\mathcal{X}_{\mathcal{L}} - \mathcal{X}_{\mathcal{C}})^2} \quad (\text{G.64})$$

ou também

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\mathcal{R}^2 + \left(\omega \mathcal{L} - \frac{1}{\omega \mathcal{C}}\right)^2} \quad (\text{G.65})$$

A equação G.62a pode ser reescrita em termos de $\mathcal{Z}$ como

$$\cos \phi = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{Z}} \quad (\text{G.66})$$

ou, conforme a necessidade, como

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{R}}{\cos \phi} \quad (\text{G.67})$$

Note que, sendo conhecidos $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{L}$, a impedância $\mathcal{Z}$ e o ângulo ϕ serão funções da frequência ω da fonte de tensão externa. Em particular, para um dado valor de $\mathcal{R}$, o menor valor de $\mathcal{Z}$ ocorre quando a reatância $\mathcal{X}$ em G.63 se anula, quando então ocorre

$$\mathcal{Z}_{\text{mín}} = \mathcal{R} \quad (\text{G.68})$$

Para que ocorra essa condição, devemos ter $\mathcal{X} = 0$ ou então, de G.65,

$$\omega_c \mathcal{L} - \frac{1}{\omega_c \mathcal{C}} = 0$$

ou

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$$

ou seja, a frequência da fonte de tensão deve ser igual a ω_c , quando então teremos a menor impedância do circuito. Note que essa é precisamente a frequência natural de oscilação do sistema, dada pela equação G.21,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$$

o que indica que estamos na condição de ressonância para o circuito. Nessa condição, a amplitude da corrente que circula no circuito, para um dado valor de $\mathfrak{E}_0$, é máxima, já que, de G.55, temos

$$i_0 = \frac{\mathfrak{E}_0}{Z} \quad (\text{G.69})$$

e, quando $\omega = \omega_0$, $Z = Z_{\text{mín}}$, o que resulta em $i_0 = i_{0,\text{máx}}$, para um dado valor de $\mathfrak{E}_0$. Usando G.67 e G.69 em G.50, temos

$$i = \frac{\mathfrak{E}_0}{Z} \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{G.70})$$

ou

$$i = \frac{\mathfrak{E}_0}{\mathcal{R}} \cos \phi \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{G.71})$$

Dessas expressões, vemos que Z , no circuito de corrente alternada, faz o papel da resistência $\mathcal{R}$ em circuitos de corrente contínua. Entretanto, é preciso lembrar que, em geral, $\mathfrak{E}$ e i não atingem os valores máximos ao mesmo tempo, havendo entre eles uma diferença de fase dada pelo ângulo ϕ . Considerando a equação G.61a vemos que, quando $\mathcal{X} > 0$, o que corresponde a $\mathcal{X}_{\mathcal{L}} > \mathcal{X}_{\mathcal{C}}$, a tangente de ϕ será negativa, indicando um ângulo ϕ negativo. Nesse caso, observando a equação G.71, veremos que a corrente i se atrasa com relação à tensão total $\mathfrak{E}$, numa situação parecida com a que ocorre na figura G.26. Nesse caso, a tensão $\mathfrak{E}_{0,\mathcal{L}}$ no indutor é maior que a tensão $\mathfrak{E}_{0,\mathcal{C}}$ no capacitor, indicando um circuito com características indutivas. É o caso, por exemplo, de motores elétricos, nos quais há uma grande carga resistiva, formada pelos fios dos enrolamentos, e também indutiva, por causa da indutância associada aos próprios enrolamentos. Há também uma pequena carga capacitiva, que surge na região entre dois fios próximos, por exemplo, mas a situação total resulta num circuito indutivo. Note que, nesse caso, como $\mathcal{X}_{\mathcal{L}} > \mathcal{X}_{\mathcal{C}}$, usando as expressões explícitas para $\mathcal{X}_{\mathcal{L}}$ e $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$, veremos que a frequência de operação é tal que $\omega > \omega_0$, onde $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$ é a frequência de ressonância.

No caso em que $\mathcal{X} < 0$, ou seja, $\mathcal{X}_{\mathcal{L}} < \mathcal{X}_{\mathcal{C}}$ ⁹, vemos que a tangente de

⁹ Note que a reatância $\mathcal{X}$, apesar de ser medida em ohms, como a resistência $\mathcal{R}$, não é de

ϕ é positiva, indicando um ângulo $\phi > 0$. Assim, o que se adianta agora é a corrente em relação à tensão, e o circuito tem características capacitivas. Nesse caso, a frequência de operação é tal que $\omega < \omega_0$.

Quando $\mathcal{X} = 0$ e o circuito está em ressonância, $\phi = 0$, e tensão e corrente estão em fase. Nesse caso, $\mathcal{X}_{\mathcal{L}} = \mathcal{X}_{\mathcal{C}}$, e a frequência de operação é dada por $\omega = \omega_0$. Além disso, os fasores que representam $\mathfrak{E}_{\mathcal{L}}$ e $\mathfrak{E}_{\mathcal{C}}$ se anulam perfeitamente. Vamos recordar a relação entre i_0 e as amplitudes das tensões indutiva $\mathfrak{E}_{0,\mathcal{L}}$ e capacitiva $\mathfrak{E}_{0,\mathcal{C}}$, dadas pelas equações G.42 e G.48,

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{0,\mathcal{C}} &= \mathcal{X}_{\mathcal{C}} i_{0,\mathcal{C}} \\ \mathfrak{E}_{0,\mathcal{L}} &= \mathcal{X}_{\mathcal{L}} i_{0,\mathcal{L}}\end{aligned}$$

ou também, usando as definições das respectivas reatâncias,

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{0,\mathcal{C}} &= \frac{1}{\omega \mathcal{C}} i_{0,\mathcal{C}} \\ \mathfrak{E}_{0,\mathcal{L}} &= \omega \mathcal{L} i_{0,\mathcal{L}}\end{aligned}$$

Na ressonância, $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$, e

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{0,\mathcal{C}} &= \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} i_{0,\mathcal{C}} \\ \mathfrak{E}_{0,\mathcal{L}} &= \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} i_{0,\mathcal{L}}\end{aligned}$$

Enquanto isso, a impedância $\mathcal{Z}$ vale $\mathcal{R}$ e a tensão da fonte é dada por

$$\mathfrak{E}_0 = \mathcal{Z} i_0 = \mathcal{R} i_0$$

Assim, dependendo dos valores de $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{R}$, pode ocorrer que, na ressonância, as amplitudes das tensões no capacitor e no indutor ($\mathfrak{E}_{0,\mathcal{C}}$ e $\mathfrak{E}_{0,\mathcal{L}}$) sejam maiores do que a própria amplitude da tensão da fonte ($\mathfrak{E}_0$), podendo ser, inclusive, maior que os valores máximos de operação tolerados pelos elementos do circuito. Essa situação de operação, que pode danificar os equipamentos, pode ser contornada retirando-se o sistema da ressonância, por meio da alteração de $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{C}$, ou também mantendo a ressonância, mas aumentando o valor de $\mathcal{R}$. Cada opção depende do que se deseja para a operação do circuito.

fato uma resistência, já que pode inclusive ser negativa.

Note que nem sempre a ressonância é nociva. Um exemplo simples de aplicação onde se quer ressonância ocorre na recepção de sinais de TV ou rádio, por exemplo. Tal recepção é feita em geral por antenas, que são condutores metálicos na forma de varetas. Na antena chega radiação vinda das várias estações de rádio ou TV ao mesmo tempo, e não se pode “desligar” as emissoras que não se quer ouvir. A radiação que chega à antena faz com que os elétrons do material condutor se movam, gerando correntes alternadas que circularão por algum circuito receptor formado por indutores, capacitores e resistores, e serão transformadas em som e imagem. Ao selecionar um canal ou estação, o que fazemos é ajustar esse circuito receptor, alterando $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{C}$, ou ambos, para que a frequência de ressonância do circuito se ajuste à frequência do canal ou estação desejado, de modo que ele entra em ressonância e a amplitude das tensões relacionadas ao canal ou estação selecionado tornam-se muito mais altas do que as das outras emissoras. Um sistema de filtros, projetados para permitir a passagem de sinal a partir de uma certa amplitude, completa o aparelho receptor, “limpando” o sinal e deixando apenas o que interessa.

Quando se usa, transmite ou mesmo gera tensão ou corrente alternada, valores instantâneos de grandezas como a potência não são tão relevantes quanto valores médios dessas grandezas considerados durante um ciclo de oscilação da tensão ou corrente. Assim, nosso próximo passo é estabelecer e calcular grandezas importantes na análise de circuitos. Para começar, definimos o valor quadrático médio, ou valor RMS ¹⁰, como é mais conhecido, de uma grandeza qualquer G mediante

$$G_{\text{RMS}} = \sqrt{\langle G^2 \rangle} \quad (\text{G.72})$$

onde a média é calculada durante um ciclo de oscilação da grandeza. Dois valores importantes são os valores RMS da tensão e da corrente, isto é, $\mathcal{E}_{\text{RMS}}$ e i_{RMS} . Com $\mathcal{E}$ dada por G.31, temos que calcular, inicialmente,

$$\langle \mathcal{E}^2 \rangle = \frac{\int_0^T (\mathcal{E}_0 \cos \omega t)^2 dt}{\int_0^T dt}$$

onde T é o período de uma oscilação, relacionado à frequência angular por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{G.73})$$

Temos, então,

¹⁰ Sigla em inglês de Root Mean Square.

$$\langle \mathfrak{E}^2 \rangle = \frac{\omega \mathfrak{E}_0^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t \, dt$$

ou, usando

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

achamos

$$\langle \mathfrak{E}^2 \rangle = \frac{\omega \mathfrak{E}_0^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \, dt$$

ou

$$\langle \mathfrak{E}^2 \rangle = \frac{\omega \mathfrak{E}_0^2}{4\pi} \left(t + \frac{\text{sen } 2\omega t}{2\omega} \right)_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

que fica

$$\langle \mathfrak{E}^2 \rangle = \frac{\omega \mathfrak{E}_0^2}{4\pi} \frac{2\pi}{\omega}$$

ou, finalmente,

$$\langle \mathfrak{E}^2 \rangle = \frac{\mathfrak{E}_0^2}{2} \quad (\text{G.74})$$

Portanto, temos, usando G.72,

$$\mathfrak{E}_{\text{RMS}} = \sqrt{\langle \mathfrak{E}^2 \rangle}$$

ou, empregando G.74,

$$\mathfrak{E}_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{E}_0^2}{2}} = \frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{G.75})$$

Esse valor, também chamado de tensão eficaz, é o que normalmente conhecemos a respeito de uma linha de transmissão de corrente alternada. Em particular, é essa grandeza a que nos referimos quando falamos que a tensão em nossas casas vale 110 V ou 127 V, ou ainda, 220 V. Portanto, o valor da

amplitude da tensão é maior que o valor nominal a que estamos acostumados, e, para uma linha onde $\mathfrak{E}_{\text{RMS}} = 110 \text{ V}$, temos

$$\mathfrak{E}_0^{110} = 110\sqrt{2} = 156 \text{ V}$$

Para a linha de 220 V, achamos

$$\mathfrak{E}_0^{220} = 220\sqrt{2} = 312 \text{ V}$$

Esses valores também são chamados de valores de pico. Um valor usado mais raramente é o valor da tensão de pico a pico, que corresponde ao dobro da tensão de pico, ou seja,

$$\mathfrak{E}_{pp} = 2\mathfrak{E}_0 \quad (\text{G.76})$$

Além da tensão, precisamos também do valor RMS da corrente, o que é feito considerando-se a equação G.50 e calculando

$$\langle i^2 \rangle = \frac{\int_0^T [i_0 \cos(\omega t + \phi)]^2 dt}{\int_0^T dt}$$

Usando G.73, temos

$$\langle i^2 \rangle = \frac{\omega i_0^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t + \phi) dt$$

ou

$$\langle i^2 \rangle = \frac{\omega i_0^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1 + \cos 2(\omega t + \phi)}{2} dt$$

ou então,

$$\langle i^2 \rangle = \frac{\omega i_0^2}{4\pi} \left(t + \frac{\sin 2(\omega t + \phi)}{2\omega} \right)_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

que fica

$$\langle i^2 \rangle = \frac{\omega i_0^2}{4\pi} \frac{2\pi}{\omega}$$

ou, finalmente,

$$\langle i^2 \rangle = \frac{i_0^2}{2} \quad (\text{G.77})$$

de modo que

$$i_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{i_0^2}{2}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{G.78})$$

Por fim, podemos determinar a potência média fornecida ao circuito de corrente alternada. A potência instantânea é dada por

$$P = \mathfrak{E}i$$

de modo que a potência média será

$$\langle P \rangle = \frac{\int_0^T \mathfrak{E}_0 \cos \omega t \, i_0 \cos(\omega t + \phi) \, dt}{\int_0^T dt}$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{i_0 \mathfrak{E}_0 \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t \cos(\omega t + \phi) \, dt$$

que pode ser escrita como

$$\langle P \rangle = \frac{i_0 \mathfrak{E}_0 \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \, dt$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{i_0 \mathfrak{E}_0 \omega}{2\pi} \left\{ \cos \phi \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t \, dt - \sin \phi \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t \sin \omega t \, dt \right\}$$

que fica

$$\langle P \rangle = \frac{i_0 \mathfrak{E}_0 \omega}{2\pi} \left\{ \cos \phi \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \, dt - \sin \phi \left[\frac{\sin^2 \omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \right\}$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{i_0 \mathfrak{E}_0 \omega}{4\pi} \cos \phi \left[t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$

ou ainda,

$$\langle P \rangle = \frac{i_0 \mathfrak{E}_0 \omega}{4\pi} \cos \phi \frac{2\pi}{\omega}$$

e, finalmente,

$$\langle P \rangle = \frac{i_0 \mathfrak{E}_0}{2} \cos \phi$$

ou, em termos dos valores RMS, dados em G.75 e G.78,

$$\langle P \rangle = i_{\text{RMS}} \mathfrak{E}_{\text{RMS}} \cos \phi \quad (\text{G.79})$$

Das expressões G.67 e G.69, temos

$$i_0 = \frac{\mathfrak{E}_0 \cos \phi}{\mathcal{R}} \quad (\text{G.80})$$

Então, temos, dividindo G.80 por $\sqrt{2}$,

$$i_{\text{RMS}} = \frac{\mathfrak{E}_{\text{RMS}} \cos \phi}{\mathcal{R}} \quad (\text{G.81})$$

e assim,

$$\langle P \rangle = i_{\text{RMS}} \frac{\mathcal{R} i_{\text{RMS}}}{\cos \phi} \cos \phi = \mathcal{R} i_{\text{RMS}}^2 \quad (\text{G.82})$$

ou

$$\langle P \rangle = \frac{\mathfrak{E}_{\text{RMS}} \cos \phi}{\mathcal{R}} \mathfrak{E}_{\text{RMS}} \cos \phi = \frac{\mathfrak{E}_{\text{RMS}}^2 \cos^2 \phi}{\mathcal{R}} \quad (\text{G.83})$$

Assim, a potência média transmitida ao circuito de corrente alternada depende dos valores RMS e também do ângulo de fase ϕ entre a tensão e a corrente. O valor $\cos \phi$ é chamado de fator de potência, e ele deve estar tão próximo de 1 quanto possível, para que a transferência de potência seja a máxima possível, o que corresponde a termos $\phi = 0$, que é a condição de ressonância para o circuito. Se $\phi \neq 0$, o fator de potência é menor que 1, e existe uma defasagem entre tensão e corrente. Nesse caso, o vai-e-vem da corrente nas linhas de transmissão que ligam os geradores aos receptores produz perdas na forma de aquecimento, conforme mostra a equação G.82, mas a conversão de energia eletromagnética em trabalho útil nos circuitos receptores não é feita da forma

mais eficiente. Isso pode ser um problema para indústrias, por exemplo, que normalmente compram uma certa quantidade de energia mensalmente das usinas geradoras de energia e que, se o consumo superar o valor contratado, pagam um adicional bastante elevado. Nesse caso, como os motores industriais são circuitos bastante indutivos, o ângulo ϕ é em geral grande, e muita energia seria gasta simplesmente para esquentar os fios de transmissão, e não para gerar trabalho útil. Para corrigir o problema, a alternativa mais simples é acrescentar ao sistema um banco de capacitores, que dão origem a uma carga capacitiva, e a uma reatância capacitiva, que se soma à carga indutiva dos motores e diminui o ângulo ϕ , aumentando, portanto, o fator de potência.

É útil comentar aqui sobre uma questão interessante relativa à medida de potência de equipamentos eletrônicos, em particular equipamentos de som. Em geral, a tais equipamentos são atribuídos dois valores de potência. Um deles é o valor RMS ou eficaz, ou também, o valor médio discutido acima, que é o que tem validade tanto científica quanto técnica. O outro é conhecido como valor de potência PMPO. Rigorosamente falando, cada fabricante de equipamentos tem sua própria definição do que seja a potência PMPO, de modo que não há como comparar equipamentos de fabricantes diferentes usando essa grandeza. A questão é que normalmente os valores de potência real, ou RMS, são pequenos (o que não significa que a sensação auditiva também seja), e não “impressionam” tanto quanto os valores PMPO divulgados em propagandas, que costumam ser muito maiores que os valores RMS. Assim, para não comprar “gato” por “lebre”, verifique sempre a potência real, RMS, dos equipamentos eletrônicos.

É importante notar que aqui demos uma idéia geral de como analisar circuitos simples de corrente alternada. Circuitos mais complexos, inclusive não-lineares, requerem métodos também mais sofisticados, de cunho mais técnico, e fogem ao nosso escopo. Assim, encerramos aqui nosso estudo sobre circuitos de corrente alternada.

G.4 Exercícios

- G.1** Calcule a corrente no processo de descarga do capacitor do circuito RC, derivando a equação G.7 em relação ao tempo.

- G.2** Analise um circuito de corrente alternada formado por um resistor, um indutor e um capacitor ligados em paralelo a uma fonte de tensão descrita por $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cos \omega t$. Lembre-se das propriedades da associação em paralelo.

Apêndice H

Equação de Helmholtz

Neste apêndice, vamos resolver a equação diferencial de Helmholtz em coordenadas esféricas, obtendo as funções de Bessel esféricas. Vamos também apresentar a função de Green em termos das funções de Bessel esféricas.

H.1 Equação de Helmholtz e Funções de Bessel Esféricas

A equação escalar de Helmholtz é escrita na forma geral como

$$\nabla^2 f(\vec{r}) + \lambda^2 f(\vec{r}) = 0 \quad (\text{H.1})$$

onde λ é um número real. Ela pode também ser escrita de forma simplificada como

$$(\nabla^2 + \lambda^2) f(\vec{r}) = 0 \quad (\text{H.2})$$

Nosso objetivo agora é encontrar soluções para essa equação em coordenadas esféricas. Nesse caso, precisaremos do operador Laplaciano nessas coordenadas, dado pela expressão B.20,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

que dá origem, então, à equação

$$(\nabla^2 + \lambda^2)f(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}[rf(\vec{r})] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f(\vec{r})}{\partial \phi^2} + \lambda^2 f(\vec{r}) = 0 \quad (\text{H.3})$$

cuja solução geral, seguindo os moldes da resolução da equação de Laplace vista no capítulo 6, parte da hipótese de que é possível escrever

$$f(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Antes de seguirmos por esse caminho, vamos simplificar um pouco o procedimento. Para isso, considere a equação diferencial 6.56,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$$

que pode ser reescrita para obtermos uma equação diferencial bastante útil. Conforme já vimos ao discutir a resolução da equação de Laplace em coordenadas esféricas, a solução da parte em Φ é obtida da equação 6.49, isto é,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0$$

ou seja,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \quad (\text{H.4})$$

Agora, vamos multiplicar a equação 6.56 por Φ e rearranjar alguns termos, obtendo

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta \Phi = -\ell(\ell + 1) \Theta \Phi$$

ou então, usando a expressão H.4, achamos

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \Theta \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\ell(\ell + 1) \Theta \Phi$$

Agora, como a derivada em θ não age sobre a função em ϕ , e vice-versa, podemos escrever

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial(\Theta \Phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2(\Phi \Theta)}{\partial \phi^2} = -\ell(\ell + 1)\Theta \Phi$$

A equação C.30 define os harmônicos esféricos $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ por meio de

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

sendo que $\Theta(\theta) = P_{\ell,m}(\cos \theta)$ e $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$. Portanto, acrescentando o fator multiplicativo apropriado, obtemos a equação diferencial

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell,m}}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell,m}}{\partial \phi^2} = \ell(\ell + 1)Y_{\ell,m} \quad (\text{H.5})$$

que pode ser escrita também como

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{\ell,m} = \ell(\ell + 1)Y_{\ell,m} \quad (\text{H.6})$$

Podemos definir agora um operador diferencial $\mathcal{L}^2$ mediante

$$\mathcal{L}^2 = -\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{H.7})$$

de modo que, sugestivamente, temos

$$\mathcal{L}^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell + 1)Y_{\ell,m} \quad (\text{H.8})$$

que é uma equação de autovalores, bem conhecida em Mecânica Quântica ¹. O operador $\mathcal{L}^2$ é dado por

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2 \quad (\text{H.9})$$

enquanto o operador momento angular $\vec{\mathcal{L}}$ fica

$$\vec{\mathcal{L}} = -i(\vec{r} \times \nabla) \quad (\text{H.10})$$

¹ Aqui é útil consultar livros sobre Mecânica Quântica, para rever esses conceitos.

onde

$$\vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathcal{L}_y \hat{\mathbf{j}} + \mathcal{L}_z \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{H.11})$$

É útil relembrar também os operadores “escada” abaixador e elevador, além de $\mathcal{L}_z$, definidos por

$$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_x + i\mathcal{L}_y = e^{i\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (\text{H.12a})$$

$$\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_x - i\mathcal{L}_y = e^{-i\phi} \left[-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (\text{H.12b})$$

$$\mathcal{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{H.12c})$$

de modo que

$$\mathcal{L}_x = \frac{\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-}{2} \quad (\text{H.13a})$$

$$\mathcal{L}_y = \frac{\mathcal{L}_+ - \mathcal{L}_-}{2i} \quad (\text{H.13b})$$

e cuja ação sobre as autofunções $Y_{\ell,m}$ se dá por intermédio de

$$\mathcal{L}_+ Y_{\ell,m} = \sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)} Y_{\ell,m+1} \quad (\text{H.14a})$$

$$\mathcal{L}_- Y_{\ell,m} = \sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)} Y_{\ell,m-1} \quad (\text{H.14b})$$

$$\mathcal{L}_z Y_{\ell,m} = m Y_{\ell,m} \quad (\text{H.14c})$$

Note que os operadores não alteram o valor de ℓ , atuando apenas em m , aumentando ($\mathcal{L}_+$; elevador), diminuindo ($\mathcal{L}_-$; abaixador) ou mantendo constante ($\mathcal{L}_z$). A demonstração das relações H.14 é simples, porém trabalhosa, envolvendo as equações H.12 além das propriedades dos harmônicos esféricos vistas no apêndice C, e fica como exercício para o leitor (veja o exercício H.1). Da definição H.10, e lembrando as propriedades de produtos vetoriais, temos imediatamente que

$$\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{L}} = 0 \quad (\text{H.15})$$

Com o uso do operador $\mathcal{L}^2$, o operador ∇^2 pode ser reescrito como

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) - \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} \quad (\text{H.16})$$

Agora, consideramos novamente a equação de Helmholtz H.2, que fica

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r) - \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} + \lambda^2 \right] f(\vec{r}) = 0$$

Vamos supor que uma possível solução para essa equação seja escrita como ²

$$f_{\ell,m}(\vec{r}) = R_{\ell}(r)Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (\text{H.17})$$

de modo que achamos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R_{\ell} Y_{\ell,m}) - \frac{\mathcal{L}^2 (R_{\ell} Y_{\ell,m})}{r^2} + \lambda^2 R_{\ell} Y_{\ell,m} = 0$$

ou

$$\frac{Y_{\ell,m}}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{\ell}) - R_{\ell} \frac{\mathcal{L}^2 Y_{\ell,m}}{r^2} + \lambda^2 R_{\ell} Y_{\ell,m} = 0$$

Usando a equação H.8, temos

$$\frac{Y_{\ell,m}}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{\ell}) - R_{\ell} \frac{\ell(\ell+1)Y_{\ell,m}}{r^2} + \lambda^2 R_{\ell} Y_{\ell,m} = 0$$

e, dividindo por $Y_{\ell,m}$, achamos

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{\ell}) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{\ell} + \lambda^2 R_{\ell} = 0 \quad (\text{H.18})$$

Como

$$\frac{d}{dr} (r R_{\ell}) = R_{\ell} + r \frac{dR_{\ell}}{dr}$$

e

$$\frac{d^2}{dr^2} (r R_{\ell}) = \frac{d}{dr} \left[R_{\ell} + r \frac{dR_{\ell}}{dr} \right]$$

ou

² Deve ser entendido que a solução geral será a combinação linear de todas as soluções possíveis.

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR_\ell) = \frac{dR_\ell}{dr} + \frac{dR_\ell}{dr} + r \frac{d^2R_\ell}{dr^2}$$

que fica

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR_\ell) = r \frac{d^2R_\ell}{dr^2} + 2 \frac{dR_\ell}{dr}$$

temos

$$\frac{1}{r} \left[r \frac{d^2R_\ell}{dr^2} + 2 \frac{dR_\ell}{dr} \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_\ell + \lambda^2 R_\ell = 0$$

ou

$$\frac{d^2R_\ell}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_\ell}{dr} + \lambda^2 R_\ell - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_\ell = 0 \quad (\text{H.19})$$

Vamos fazer agora a substituição

$$R_\ell(r) = \frac{H_\ell(r)}{\sqrt{r}} \quad (\text{H.20})$$

Assim, temos

$$\frac{dR_\ell}{dr} = \frac{d}{dr}(r^{-\frac{1}{2}}H_\ell) = r^{-\frac{1}{2}} \frac{dH_\ell}{dr} - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} H_\ell = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{dH_\ell}{dr} - \frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}} H_\ell$$

Além disso,

$$\frac{d^2R_\ell}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left[r^{-\frac{1}{2}} \frac{dH_\ell}{dr} - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} H_\ell \right]$$

ou

$$\frac{d^2R_\ell}{dr^2} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2H_\ell}{dr^2} - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} \frac{dH_\ell}{dr} - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} \frac{dH_\ell}{dr} + \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} H_\ell$$

ou ainda,

$$\frac{d^2R_\ell}{dr^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{d^2H_\ell}{dr^2} - \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{dH_\ell}{dr} + \frac{3}{4r^{\frac{5}{2}}} H_\ell$$

Assim, a equação H.19 fica

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{d^2 H_\ell}{dr^2} - \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{dH_\ell}{dr} + \frac{3}{4r^{\frac{5}{2}}} H_\ell \\ + \frac{2}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{dH_\ell}{dr} - \frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}} H_\ell \right] + \lambda^2 \frac{H_\ell}{\sqrt{r}} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \frac{H_\ell}{\sqrt{r}} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{d^2 H_\ell}{dr^2} + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{dH_\ell}{dr} - \frac{1}{4r^{\frac{5}{2}}} H_\ell + \lambda^2 \frac{H_\ell}{\sqrt{r}} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \frac{H_\ell}{\sqrt{r}} = 0$$

ou ainda, realizando algumas simplificações,

$$\frac{d^2 H_\ell}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH_\ell}{dr} + \lambda^2 H_\ell - \frac{(\ell + \frac{1}{2})^2}{r^2} H_\ell = 0$$

Agora, definimos a variável $\varrho = \lambda r$ e escrevemos a equação diferencial nesta variável. Temos que calcular

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} &= \frac{d\varrho}{dr} \frac{d}{d\varrho} \\ \frac{d}{dr} &= \lambda \frac{d}{d\varrho} \end{aligned} \tag{H.21}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} \right) \\ &= \left(\lambda \frac{d}{d\varrho} \right) \left(\lambda \frac{d}{d\varrho} \right) \\ \frac{d^2}{dr^2} &= \lambda^2 \frac{d^2}{d\varrho^2} \end{aligned} \tag{H.22}$$

Substituindo estas expressões na equação diferencial, temos

$$\lambda^2 \frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{\lambda^2}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + \left[\lambda^2 - \frac{\lambda^2(\ell + \frac{1}{2})^2}{\varrho^2} \right] R = 0$$

ou

$$\frac{d^2 H_\ell}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dH_\ell}{d\varrho} + \left[1 - \frac{(\ell + \frac{1}{2})^2}{\varrho^2} \right] H_\ell = 0$$

que corresponde à equação de Bessel 6.121, com $\nu = \ell + \frac{1}{2}$. Portanto, suas soluções são funções de Bessel de ordem $\ell + \frac{1}{2}$, ou seja, recordando também a substituição H.20 além da solução geral D.17, temos, já incluindo coeficientes apropriados,

$$R_\ell(r) = A_\ell \frac{J_{\ell+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{r}} + B_\ell \frac{J_{-\ell-\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{r}} \quad (\text{H.23})$$

o que faz com que a solução geral da equação de Helmholtz H.2 torne-se

$$f(\vec{r}) = \sum_{\ell,m} \left[A_{\ell,m} \frac{J_{\ell+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{r}} + B_{\ell,m} \frac{J_{-\ell-\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{r}} \right] Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (\text{H.24})$$

lembrando que, em geral, os coeficientes podem ser funções tanto de ℓ como de m (veja a equação H.17).

É interessante definir agora as funções de Bessel esféricas para reescrever as soluções H.23 e H.24. Considerando as funções de Bessel usuais de primeiro tipo, as funções de Bessel esféricas de primeiro tipo ficam

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{H.25})$$

Vamos considerar agora a propriedade D.39, válida para funções de Bessel,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) = -\frac{1}{x^\nu} J_{\nu+1}(x)$$

Agora, fazemos $\nu = \ell + \frac{1}{2}$, ou seja,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)}{x^{\ell+\frac{1}{2}}} \right) = -\frac{1}{x^{\ell+\frac{1}{2}}} J_{\ell+\frac{3}{2}}(x)$$

e dividimos por x , para obter

$$\frac{J_{\ell+\frac{3}{2}}(x)}{x^{\ell+\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)}{x^{\ell+\frac{1}{2}}} \right)$$

Da expressão H.25, podemos escrever

$$J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\frac{1}{2}} j_\ell(x)$$

Então,

$$\frac{j_{\ell+1}(x)}{x^{\ell+1}} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{j_{\ell}(x)}{x^{\ell}} \right) \quad (\text{H.26})$$

Considere agora que $\ell = 0$. Temos

$$\frac{j_1(x)}{x} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (j_0(x))$$

Agora, suponha que $\ell = 1$. Nesse caso,

$$\frac{j_2(x)}{x^2} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{j_1(x)}{x} \right)$$

ou, também,

$$\frac{j_2(x)}{x^2} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (j_0(x)) \right]$$

Continuando com esse processo, é possível mostrar que, para $\ell = 0, 1, 2, \dots$ vale

$$j_{\ell}(x) = x^{\ell} \left[-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^{\ell} j_0(x) \quad (\text{H.27})$$

que é uma relação de recorrência para as funções de Bessel esféricas. Assim, conhecendo j_0 , as outras funções ficam univocamente definidas. Vamos considerar novamente a equação diferencial original H.19,

$$\frac{d^2 R_{\ell}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{\ell}}{dr} + \lambda^2 R_{\ell} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R_{\ell} = 0$$

quando $\ell = 0$, e já fazendo as substituições H.21 e H.22, temos

$$\lambda^2 \frac{d^2 R_0}{d\rho^2} + \frac{2\lambda^2}{\rho} \frac{dR_0}{d\rho} + \lambda^2 R_0 = 0$$

ou

$$\frac{d^2 R_0}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR_0}{d\rho} + R_0 = 0$$

ou ainda,

$$\varrho \frac{d^2 R_0}{d\varrho^2} + 2 \frac{dR_0}{d\varrho} + \varrho R_0 = 0$$

Agora, consideramos que

$$R_0(\varrho) = \frac{W(\varrho)}{\varrho} \quad (\text{H.28})$$

Portanto, precisamos calcular

$$\frac{dR_0}{d\varrho} = \frac{d}{d\varrho} \frac{W}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{W}{\varrho^2}$$

e

$$\frac{d^2 R_0}{d\varrho^2} = \frac{d}{d\varrho} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{W}{\varrho^2} \right]$$

ou

$$\frac{d^2 R_0}{d\varrho^2} = \frac{1}{\varrho} \frac{d^2 W}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{dW}{d\varrho} + \frac{2W}{\varrho^3}$$

ou ainda,

$$\frac{d^2 R_0}{d\varrho^2} = \frac{1}{\varrho} \frac{d^2 W}{d\varrho^2} - \frac{2}{\varrho^2} \frac{dW}{d\varrho} + \frac{2W}{\varrho^3}$$

Então, voltando à equação diferencial,

$$\varrho \left[\frac{1}{\varrho} \frac{d^2 W}{d\varrho^2} - \frac{2}{\varrho^2} \frac{dW}{d\varrho} + \frac{2W}{\varrho^3} \right] + 2 \left[\frac{1}{\varrho} \frac{dW}{d\varrho} - \frac{W}{\varrho^2} \right] + \varrho \frac{W}{\varrho} = 0$$

temos uma equação diferencial bastante simples e conhecida, isto é,

$$\frac{d^2 W}{d\varrho^2} + W = 0$$

cujas soluções são (excetuando-se constantes)

$$W(\varrho) = \begin{cases} \text{sen } \varrho \\ \cos \varrho \end{cases}$$

e então, voltando à equação H.28,

$$R_0(\varrho) = \begin{cases} \frac{\text{sen } \varrho}{\varrho} \\ \frac{\cos \varrho}{\varrho} \end{cases} \quad (\text{H.29})$$

Usualmente, define-se

$$j_0(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \quad (\text{H.30})$$

o que explica também o fator multiplicativo na expressão H.25,

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$$

como pode ser visto se considerarmos $J_{\frac{1}{2}}(x)$, de modo que

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{1}{2}}(x)$$

Primeiro, da equação D.10, temos

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

ou, com $\nu = \frac{1}{2}$, achamos

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Agora, considere que

$$\Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$$

onde $n!! = n(n-2)(n-4) \cdots 5 \times 3 \times 1$ representa o duplo fatorial de n . Substituindo esse valor, temos

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n!(2n+1)!!\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Agora, temos também a relação

$$(2n+1)! = 2^n n! (2n+1)!!$$

então,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

ou

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Multiplicando e dividindo por x , temos

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Devemos lembrar que a série acima é a série de Taylor 2.4 para a função seno, ou seja,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

que pode ser escrita como

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{1}{2}}(x)$$

ou

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{1}{2}}(x)$$

A outra solução encontrada para R_ℓ dada pela equação H.29 é utilizada para definir as funções de Bessel de segundo tipo, ou funções de Neumann esféricas, por meio de

$$\mathfrak{n}_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \quad (\text{H.31})$$

além de

$$\mathfrak{n}_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{H.32})$$

onde $N_\ell(x)$ são as funções de Neumann usuais. Para $\mathfrak{n}_\ell(x)$, vale também

$$\mathfrak{n}_\ell(x) = (-x)^\ell \left[-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^\ell \mathfrak{n}_0(x) \quad (\text{H.33})$$

Por fim, temos as funções de Hankel esféricas, definidas por meio de

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} [J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) + iN_{\ell+\frac{1}{2}}(x)] \quad (\text{H.34a})$$

$$\mathfrak{h}_\ell^2(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} [J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) - iN_{\ell+\frac{1}{2}}(x)] \quad (\text{H.34b})$$

que podem também ser escritas como

$$\mathfrak{h}_\ell^1(x) = \mathfrak{j}_\ell(x) + i\mathfrak{n}_\ell(x) \quad (\text{H.35a})$$

$$\mathfrak{h}_\ell^2(x) = \mathfrak{j}_\ell(x) - i\mathfrak{n}_\ell(x) \quad (\text{H.35b})$$

Utilizando as relações H.27, H.30, H.31, H.33 e H.34, podemos calcular as formas explícitas das funções acima para alguns valores de ℓ , ou seja,

$$j_0(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad (\text{H.36a})$$

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \quad (\text{H.36b})$$

$$h_0^1(x) = \frac{e^{ix}}{ix} \quad (\text{H.36c})$$

$$j_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \quad (\text{H.36d})$$

$$n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad (\text{H.36e})$$

$$h_1^1(x) = -\frac{e^{ix}}{x} \left(1 + \frac{i}{x}\right) \quad (\text{H.36f})$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \operatorname{sen} x - \frac{3 \cos x}{x^2} \quad (\text{H.36g})$$

$$n_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3 \operatorname{sen} x}{x^2} \quad (\text{H.36h})$$

$$h_2^1(x) = \frac{ie^{ix}}{x} \left(1 + \frac{3i}{x} - \frac{3}{x^2}\right) \quad (\text{H.36i})$$

Sendo assim, a solução H.24 pode ser escrita, por exemplo, como

$$f(\vec{r}) = \sum_{\ell, m} \left[A_{\ell, m}^1 h_{\ell}^1(\lambda r) + A_{\ell, m}^2 h_{\ell}^2(\lambda r) \right] Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (\text{H.37})$$

onde usamos as funções de Hankel esféricas para exprimir a solução da equação de Helmholtz. A função $f(\vec{r})$ pode representar qualquer uma das componentes do campo elétrico ou magnético, e as constantes $A_{\ell, m}^{1,2}$ dependem das condições de contorno de cada problema específico, de onde se vê que, em geral, as soluções serão matematicamente complexas. Note que $h_{\ell}^1(x)$ envolve o termo e^{ix} , enquanto $h_{\ell}^2(x)$, por ser seu complexo conjugado, envolve o termo e^{-ix} . O primeiro caso corresponde a ondas propagando-se “para fora” a partir de uma certa fonte, enquanto o segundo corresponde a ondas propagando-se de fora para dentro, em direção a um ponto. No caso específico de querermos uma solução que descreva a emissão de ondas a partir de um ponto, o coeficiente do fator $h_{\ell}^2(x)$ deve ser anulado, isto é, $A_{\ell, m}^2 = 0$. Nosso próximo passo é obter uma expansão para a função de Green em termos das funções de Bessel esféricas.

H.2 Expansão da Função de Green em Funções de Bessel Esféricas

Vamos obter agora a expansão em termos de funções de Bessel esféricas para a função de Green associada à equação de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2)\mathfrak{F}_k = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{H.38})$$

Na verdade, já resolvemos essa equação na seção 20.5 (veja as equações 20.42, 20.43–20.45 e o exemplo 20.7) e a solução para ondas propagando-se a partir de um ponto é dada pela equação 20.43,

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\text{H.39})$$

Por outro lado, seguindo os passos descritos na seção 20.5 e também na seção 9.4, queremos uma expansão para esta função na forma

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{\ell, m} f_\ell(r, r') Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (\text{H.40})$$

Lembrando que, pela equação 4.41,

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(r - r')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi')}{r^2}$$

e que as funções delta de Dirac angulares têm uma expansão em harmônicos esféricos dada pela equação 9.22,

$$\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi') = \sum_{\ell, m} Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

podemos reescrever a expressão H.38, usando também a equação H.16, como

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) - \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} + k^2 \right] \sum_{\ell, m} f_\ell(r, r') Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = - \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{\ell, m} Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

Lembrando que os operadores só agem sobre as coordenadas sem linha e que, pela equação H.8,

$$\mathcal{L}^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell,m}$$

achamos

$$\sum_{\ell,m} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right] f_{\ell}(r, r') =$$

$$- \sum_{\ell,m} Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \frac{\delta(r-r')}{r^2}$$

ou então,

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right] f_{\ell}(r, r') = -\frac{\delta(r-r')}{r^2} \quad (\text{H.41})$$

Quando $r \neq r'$, temos a equação

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right] f_{\ell}(r, r') = 0 \quad (\text{H.42})$$

que é precisamente a equação H.18, cujo desenvolvimento já foi feito e que origina as soluções que são as funções de Bessel esféricas. Como condições de contorno, devemos ter uma onda propagando-se em direção ao infinito, o que implica na função h_{ℓ}^1 , e na origem não deve haver divergências, o que impõe uma solução dependendo da função j_{ℓ} , de modo que a função de Green $f_{\ell}(r, r')$ fica

$$f_{\ell}(r, r') = C j_{\ell}(kr_{<}) h_{\ell}^1(kr_{>}) \quad (\text{H.43})$$

onde $r_{<}$ é o menor entre r e r' , e $r_{>}$ é o maior. A constante C é determinada seguindo o procedimento utilizado na 9.4, que consiste em considerar a equação diferencial H.41, multiplicá-la por r para obter

$$\frac{d^2}{dr^2}(r f_{\ell}) - \frac{\ell(\ell+1)f_{\ell}}{r} + r k^2 f_{\ell} = -\frac{\delta(r-r')}{r}$$

e, em seguida, integrá-la no intervalo $[r' - \Delta, r' + \Delta]$, fazendo depois $\Delta \rightarrow 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta} \frac{d}{dr} \left[\frac{d(r f_\ell)}{dr} \right] dr - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta} \frac{\ell(\ell+1) f_\ell}{r} dr \\ + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta} r k^2 f_\ell dr = - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{r'-\Delta}^{r'+\Delta} \frac{\delta(r-r')}{r} dr \end{aligned}$$

Note que, nas duas integrais que não envolvem derivadas no lado esquerdo da equação acima, quando o limite é aplicado, os limites de integração tornam-se iguais, e as integrais se anulam. Temos, portanto,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{d(r f_\ell)}{dr} \right]_{r'-\Delta}^{r'+\Delta} = - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{r'}$$

ou

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = - \frac{1}{r'} \quad (\text{H.44})$$

Precisamos agora calcular as derivadas que aparecem nesta expressão. Considerando inicialmente a primeira, em que $r = r' + \Delta$, temos que $r_{>} = r$ e $r_{<} = r'$, de modo que a função H.43 fica

$$f_\ell(r, r') = C j_\ell(kr') h_\ell^1(kr)$$

Multiplicando por r , temos

$$r f_\ell = C r j_\ell(kr') h_\ell^1(kr)$$

e assim,

$$\frac{d}{dr}(r f_\ell) = C j_\ell(kr') \frac{d}{dr}[r h_\ell^1(kr)] \quad (\text{H.45})$$

Uma importante propriedade válida para as funções de Bessel esféricas estabelece que

$$\frac{d}{dx}[x \Upsilon_\ell(x)] = x \Upsilon_{\ell-1}(x) - \ell \Upsilon_\ell(x) \quad (\text{H.46})$$

onde $\Upsilon_\ell(x)$ é qualquer função de Bessel esférica. Esta propriedade pode ser facilmente demonstrada considerando-se a definição das funções de Bessel esféricas em termos das funções de Bessel usuais e também as definições das

funções de Bessel em termos de séries de potências, o que é deixado como exercício para o leitor (veja o exercício H.2). Multiplicando e dividindo o lado direito da expressão H.45 por k , ficamos com

$$\frac{d}{dr}(r f_\ell) = \frac{C}{k} j_\ell(kr') \frac{d}{dr} [kr h_\ell^1(kr)]$$

e usando a propriedade H.46, além de uma regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(r f_\ell) &= \frac{C}{k} j_\ell(kr') \frac{d}{dx} [x h_\ell^1(x)] \frac{d}{dr}(kr) \\ \frac{d}{dx}(r f_\ell) &= C j_\ell(kr') [kr h_{\ell-1}^1(kr) - \ell h_\ell^1(kr)] \end{aligned} \quad (\text{H.47})$$

Passamos agora à segunda derivada do lado esquerdo da equação H.44. Nesse caso, como $r = r' - \Delta$, temos $r_> = r'$ e $r_< = r$. Assim, a função H.43 torna-se

$$f_\ell(r, r') = C j_\ell(kr) h_\ell^1(kr')$$

Multiplicando por r , temos

$$r f_\ell = C r j_\ell(kr) h_\ell^1(kr')$$

e

$$\frac{d}{dr}(r f_\ell) = C h_\ell^1(kr') \frac{d}{dr} [r j_\ell(kr)] \quad (\text{H.48})$$

ou então, multiplicando e dividindo por k , usando uma regra da cadeia e também a propriedade H.46, achamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r f_\ell) &= \frac{C}{k} h_\ell^1(kr') \frac{d}{d(kr)} [kr j_\ell(kr)] \frac{d}{dr}(kr) \\ \frac{d}{dr}(r f_\ell) &= C h_\ell^1(kr') [kr j_{\ell-1}(kr) - \ell j_\ell(kr)] \end{aligned} \quad (\text{H.49})$$

Usando as expressões H.47 e H.49, o lado direito da equação H.44 torna-se

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ C j_\ell(kr') [kr h_{\ell-1}^1(kr) - \ell h_\ell^1(kr)]_{r'+\Delta} \right. \\ \left. - C h_\ell^1(kr') [kr j_{\ell-1}(kr) - \ell j_\ell(kr)]_{r'-\Delta} \right\} \end{aligned}$$

ou

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = \\ C j_\ell(kr') [kr' h_{\ell-1}^1(kr') - \ell h_\ell^1(kr')] \\ - C h_\ell^1(kr') [kr' j_{\ell-1}(kr') - \ell j_\ell(kr')]$$

ou ainda,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = \\ Ckr' j_\ell(kr') h_{\ell-1}^1(kr') - \ell C j_\ell(kr') h_\ell^1(kr') \\ - Ckr' h_\ell^1(kr') j_{\ell-1}(kr') + \ell C h_\ell^1(kr') j_\ell(kr')$$

ou, finalmente,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = Ckr' [j_\ell h_{\ell-1}^1 - h_\ell^1 j_{\ell-1}]$$

Agora utilizamos a equação H.35a, e encontramos

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = Ckr' [j_\ell(j_{\ell-1} + i n_{\ell-1}) - (j_\ell + i n_\ell) j_{\ell-1}]$$

ou

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = i Ckr' [j_\ell n_{\ell-1} - n_\ell j_{\ell-1}] \quad (\text{H.50})$$

Para continuar, vamos precisar da propriedade H.26,

$$\frac{j_{\ell+1}(x)}{x^{\ell+1}} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{j_\ell(x)}{x^\ell} \right)$$

que, escrita para j_ℓ , fica

$$j_\ell = -\frac{x^\ell}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{j_{\ell-1}(x)}{x^{\ell-1}} \right)$$

ou

$$j_\ell = -x^{\ell-1} \left\{ -\frac{\ell-1}{x^{\ell-2}} j_{\ell-1} + \frac{1}{x^{\ell-1}} \frac{dj_{\ell-1}}{dx} \right\}$$

ou ainda,

$$j_\ell = \frac{\ell-1}{x} j_{\ell-1} - j'_{\ell-1} \quad (\text{H.51})$$

onde a linha em $j'_{\ell-1}$ indica derivada em relação ao argumento da função. As funções n_ℓ também seguem a propriedade H.26, ou seja,

$$\frac{n_{\ell+1}(x)}{x^{\ell+1}} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{n_\ell(x)}{x^\ell} \right) \quad (\text{H.52})$$

de modo que achamos

$$n_\ell = \frac{\ell-1}{x} n_{\ell-1} - n'_{\ell-1} \quad (\text{H.53})$$

Voltando à equação H.50 e substituindo as equações H.51 e H.53, temos

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = \\ iCkr' \left\{ \left[\frac{\ell-1}{x} j_{\ell-1} - j'_{\ell-1} \right] n_{\ell-1} - \left[\frac{\ell-1}{x} n_{\ell-1} - n'_{\ell-1} \right] j_{\ell-1} \right\}$$

ou então,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = iCkr' [j_{\ell-1} n'_{\ell-1} - j'_{\ell-1} n_{\ell-1}]$$

O termo entre colchetes é o Wronskiano de $j_{\ell-1}(x)$ e $n_{\ell-1}(x)$. Para as funções de Bessel esféricas, vale

$$W[j_\ell, h_\ell] = -iW[j_\ell, h_\ell^1] = -W[n_\ell, h_\ell^1] = \frac{1}{x^2} \quad (\text{H.54})$$

de modo que temos

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = iCkr' \frac{1}{(kr')^2}$$

ou

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'+\Delta} - \frac{d(r f_\ell)}{dr} \Big|_{r'-\Delta} \right\} = \frac{iC}{kr'} \quad (\text{H.55})$$

Reunindo esta equação com a expressão H.44, temos

$$\frac{iC}{kr'} = -\frac{1}{r'}$$

ou, finalmente, temos que a constante C vale

$$C = ik \quad (\text{H.56})$$

de modo que a solução H.43 torna-se

$$f_\ell(r, r') = ik j_\ell(kr_<) h_\ell^1(kr_>) \quad (\text{H.57})$$

o que faz com que a função de Green H.40 fique sendo

$$\mathfrak{F}_k^+(\vec{r}, \vec{r}') = ik \sum_{\ell, m} j_\ell(kr_<) h_\ell^1(kr_>) Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (\text{H.58})$$

de modo que podemos escrever a expansão

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = ik \sum_{\ell, m} j_\ell(kr_<) h_\ell^1(kr_>) Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (\text{H.59})$$

onde usamos também a equação H.39. Essa equação fornece a expansão, em termos de funções de Bessel esféricas e harmônicos esféricos, de uma onda esférica propagando-se a partir de um ponto, e ela será bastante útil na seção 25.5. Vejamos agora uma outra expansão que pode ser obtida da equação H.59. Vamos considerar que r' seja grande quando comparado com r , de modo que podemos escrever

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}$$

ou

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r' \left[\frac{r^2}{r'^2} - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ou ainda, usando uma série de Taylor e considerando termos até primeira ordem,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r' \left[1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^2} \right]$$

e, finalmente,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r' - \vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$$

Assim, podemos aplicar a equação H.59, considerando que $r_{>} = r'$ e $r_{<} = r$. Então, obtemos

$$\frac{e^{ik(r' - \vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}')}}{4\pi(r' - \vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}')} = ik \sum_{\ell, m} j_{\ell}(kr) h_{\ell}^1(kr') Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

ou, usando a forma assintótica para a função de Hankel, dada em 25.231,

$$h_{\ell}^1(x) \sim (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ix}}{x}, \quad x \gg 1$$

achamos

$$\frac{e^{ik(r' - \vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}')}}{4\pi(r' - \vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}')} = ik \sum_{\ell, m} j_{\ell}(kr) (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr'}}{kr'} Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

ou

$$\frac{e^{ikr'} e^{-ik\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}}{4\pi(r' - \vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}')} = k \frac{e^{ikr'}}{kr'} \sum_{\ell, m} (-i)^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

ou ainda,

$$\frac{e^{-ik\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}}{4\pi(r' - \vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}')} = \frac{1}{r'} \sum_{\ell} (-i)^{\ell} j_{\ell}(kr) \sum_m Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

e, quando $r' \rightarrow \infty$, achamos

$$\frac{e^{-ik\vec{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}}{4\pi r'} = \frac{1}{r'} \sum_{\ell} (-i)^{\ell} j_{\ell}(kr) \sum_m Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

ou, fazendo $\vec{k} = k \hat{\mathbf{r}}'$,

$$e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell} (-i)^{\ell} j_{\ell}(kr) \sum_m Y_{\ell, m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$$

Considerando o complexo conjugado da equação acima, temos

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) \sum_m Y_{\ell,m}(\theta', \phi') Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi) \quad (\text{H.60})$$

Agora, relembremos a equação 6.86, o teorema da adição dos harmônicos esféricos, ou seja,

$$P_{\ell}(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_m Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

onde α é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$. Então, podemos reescrever H.60 como

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \alpha) \quad (\text{H.61})$$

ou, usando a expressão 6.83,

$$Y_{\ell,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

encontramos

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\ell} i^{\ell} \sqrt{4\pi(2\ell + 1)} j_{\ell}(kr) Y_{\ell,0}(\alpha) \quad (\text{H.62})$$

que é a expansão de uma onda plana em coordenadas esféricas, em termos das funções de Bessel esféricas e dos harmônicos esféricos. Isso encerra nossa discussão sobre a equação de Helmholtz e as funções esféricas. Vejamos agora alguns exercícios.

H.3 Exercícios

H.1 Demonstre as relações H.14.

H.2 Demonstre a equação H.46.

Apêndice I

Lentes Esféricas

Neste apêndice, estudaremos uma importante aplicação prática do fenômeno de refração, as lentes esféricas. Nossos objetivos são descrever a formação de imagens usando essas lentes e apresentar um método matricial que pode ser usado quando as lentes deixam de ser delgadas e passam a ser espessas, quando então o tratamento passa a ser um pouco mais complicado.

I.1 Lentes Esféricas Delgadas

Lentes esféricas são formadas por vidro de índice de refração n conhecido, cujas superfícies em que incide luz são seções de duas esferas cujos centros definem uma linha reta, chamada de *eixo óptico*. Quando um feixe paralelo de raios luminosos incide na lente, ela tem a propriedade de focalizá-los num ponto específico do eixo óptico, como mostra a figura I.1.

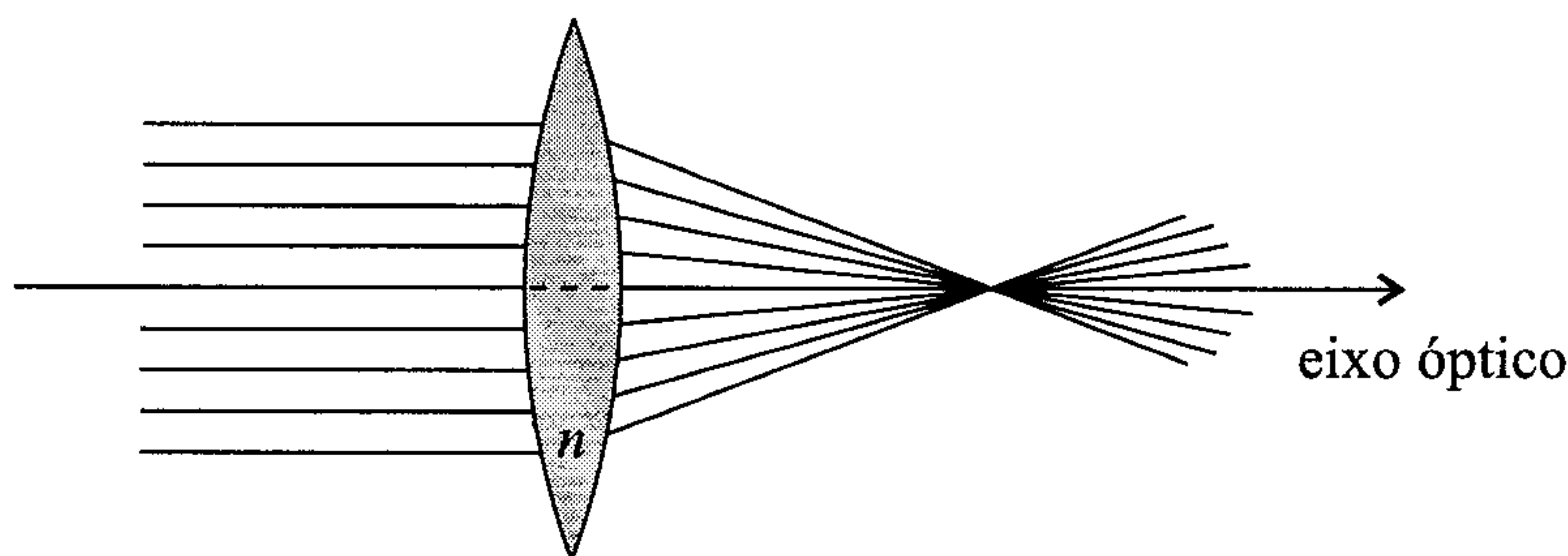


Figura I.1: Esquema da focalização de uma lente esférica.

É importante notar que estamos considerando aqui que a óptica geométrica seja válida, ou seja, estamos admitindo que a radiação luminosa possa ser considerada como sendo formada por raios de luz, que se propagam em linha reta até atingir alguma interface, quando então eles seguem as leis de reflexão e refração, sofrendo eventualmente desvios, seguindo, a partir daí, novamente em linha reta até atingir alguma outra interface. Nas lentes, como se vê na figura, existem duas interfaces, uma entre o ar e o vidro e outra entre o vidro e o ar, sendo que os raios percorrem o espaço nessa ordem. Vamos relembrar também a lei de Snell, dada por 23.31, já considerando que um dos meios seja o ar, onde $n_{ar} = 1$, ou seja,

$$n \operatorname{sen} \theta_\ell = \operatorname{sen} \theta \tag{I.1}$$

sendo que θ_ℓ representa ângulos medidos dentro da lente e θ , medidos fora dela. Além disso, precisamos definir mais alguns termos relevantes, mostrados na figura I.2.

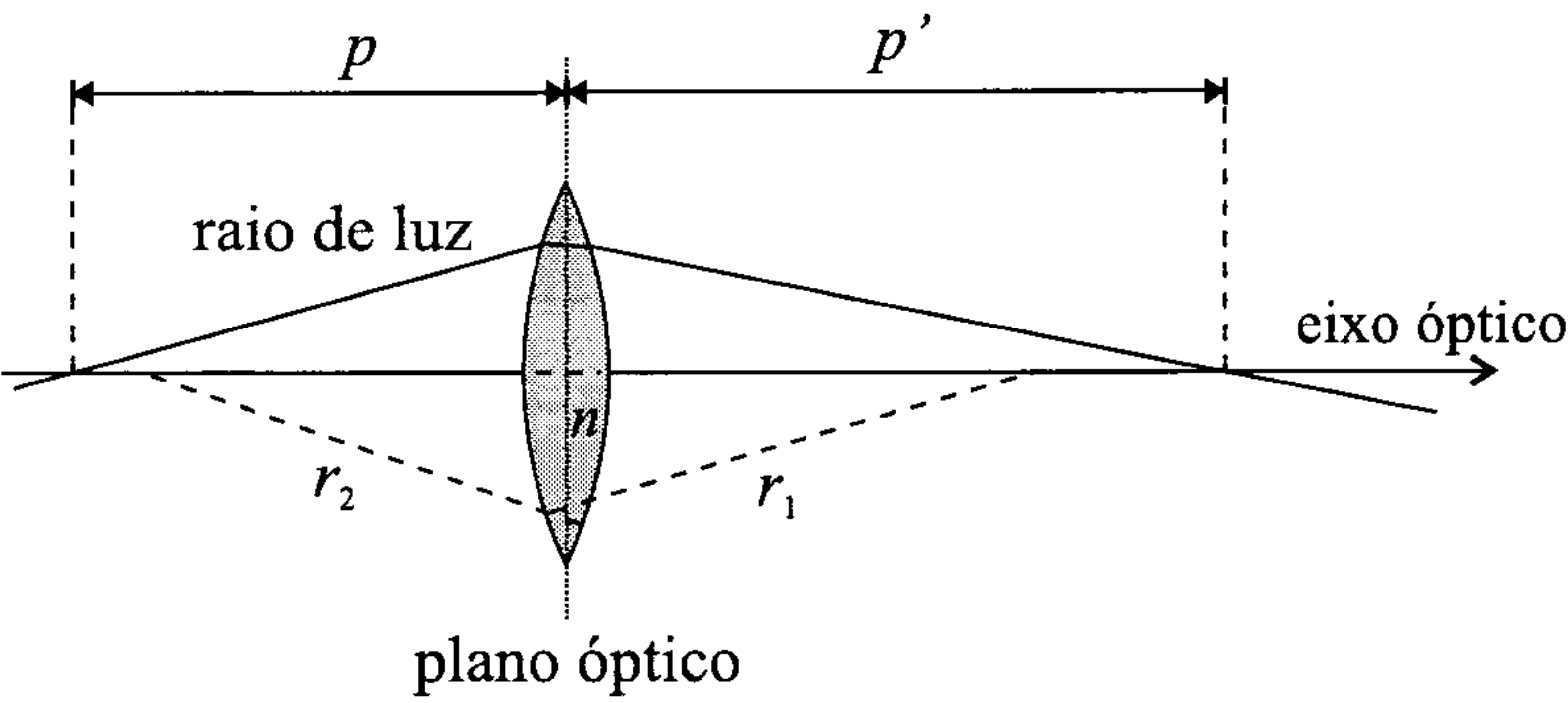


Figura I.2: Esquema da focalização de uma lente esférica.

Os raios das calotas esféricas que definem as superfícies relevantes da lente são descritos por r_1 e r_2 . As distâncias em que o raio de luz considerado corta o eixo óptico, medidas a partir do plano óptico, são chamadas de p e p' . Conforme já dissemos, o índice de refração da lente vale n .

Em cada superfície da lente ocorre uma refração. A figura I.3 mostra as grandezas relevantes para a primeira superfície, em que o raio de luz passa do ar para a lente.

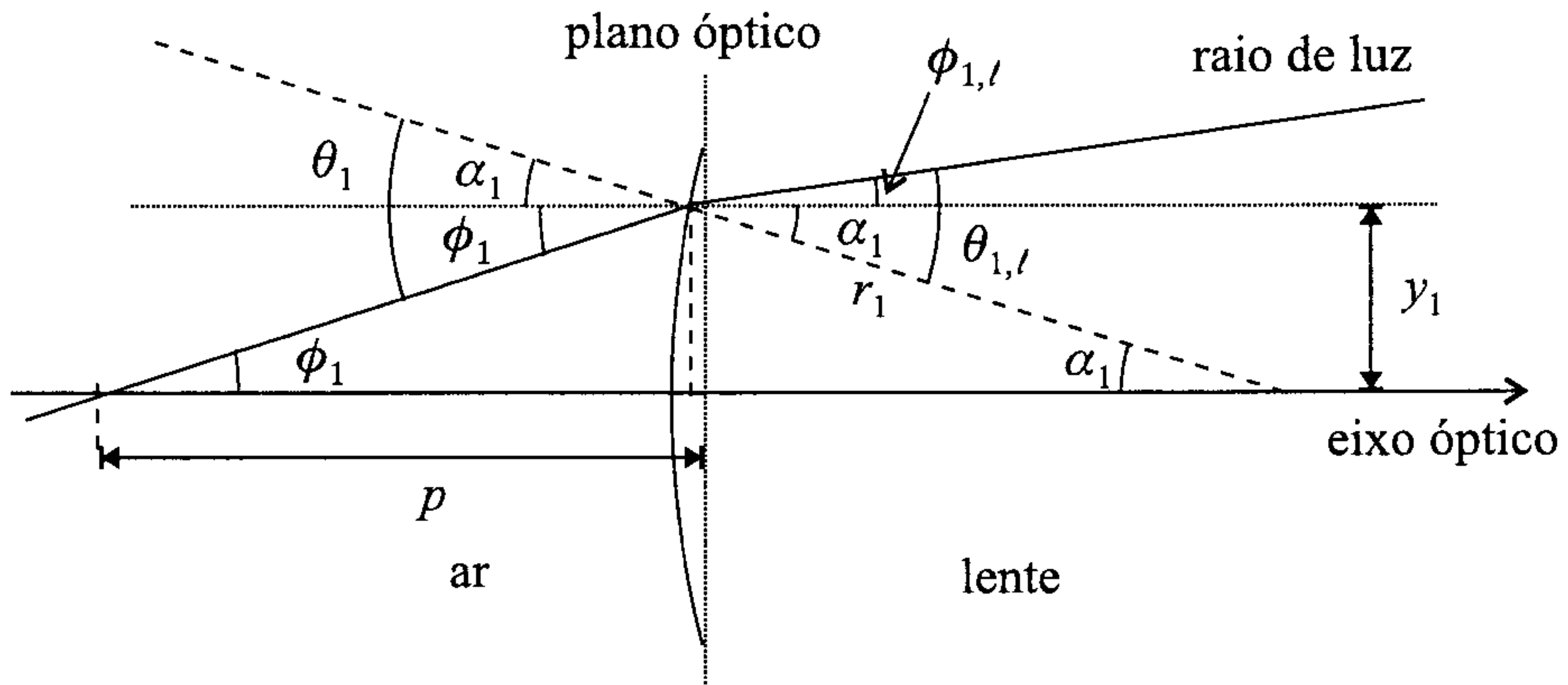


Figura I.3: Refração na primeira superfície esférica da lente, onde o raio de luz passa do ar para a lente.

Na figura, o subscrito 1 sempre se refere à superfície 1, que delimita a lente quando o raio entra nela. As grandezas são tais que:

- Os ângulos α_1 são entre a normal à lente no ponto considerado e a horizontal. Note que, como a superfície é parte de uma calota esférica, a reta definida pela normal à superfície passa pelo centro da calota esférica 1, cujo raio é r_1 .
- Os ângulos ϕ_1 são entre o raio de luz e a horizontal. O subscrito ℓ indica que está dentro da lente. Quando não há subscrito, ele está medido no ar, fora da lente.
- Os ângulos θ_1 são os ângulos de incidência e refração na superfície 1, usando a mesma convenção descrita para os ângulos ϕ_1 .
- A distância y_1 corresponde à altura do ponto considerado na superfície da lente.

Da figura, podemos ver que

$$\theta_1 = \alpha_1 + \phi_1 \quad (\text{I.2})$$

e

$$\theta_{1,\ell} = \alpha_1 + \phi_{1,\ell} \quad (\text{I.3})$$

Pela lei de Snell I.1, temos

$$n \operatorname{sen} \theta_{1,\ell} = \operatorname{sen} \theta_1 \tag{I.4}$$

Para simplificar essa relação, vamos considerar que os ângulos sejam pequenos, o que indica que y_1 deve ser pequeno (ele está exagerado na figura). Assim, nos restringimos a raios que estejam próximos ao eixo óptico, chamados de paraxiais. Essa é a primeira hipótese a ser feita, e com ela podemos substituir os senos dos ângulos pelos próprios ângulos, ou seja, a equação I.4 torna-se

$$n\theta_{1,\ell} = \theta_1$$

ou, usando I.2 e I.3,

$$n(\alpha_1 + \phi_{1,\ell}) = \alpha_1 + \phi_1 \tag{I.5}$$

Essa é a primeira expressão que será necessária para continuarmos. Para obter a próxima, precisamos considerar agora o que ocorre na segunda superfície da lente, na qual o raio passa da lente para o ar, e ocorre uma segunda refração. As grandezas relevantes estão na figura I.4.

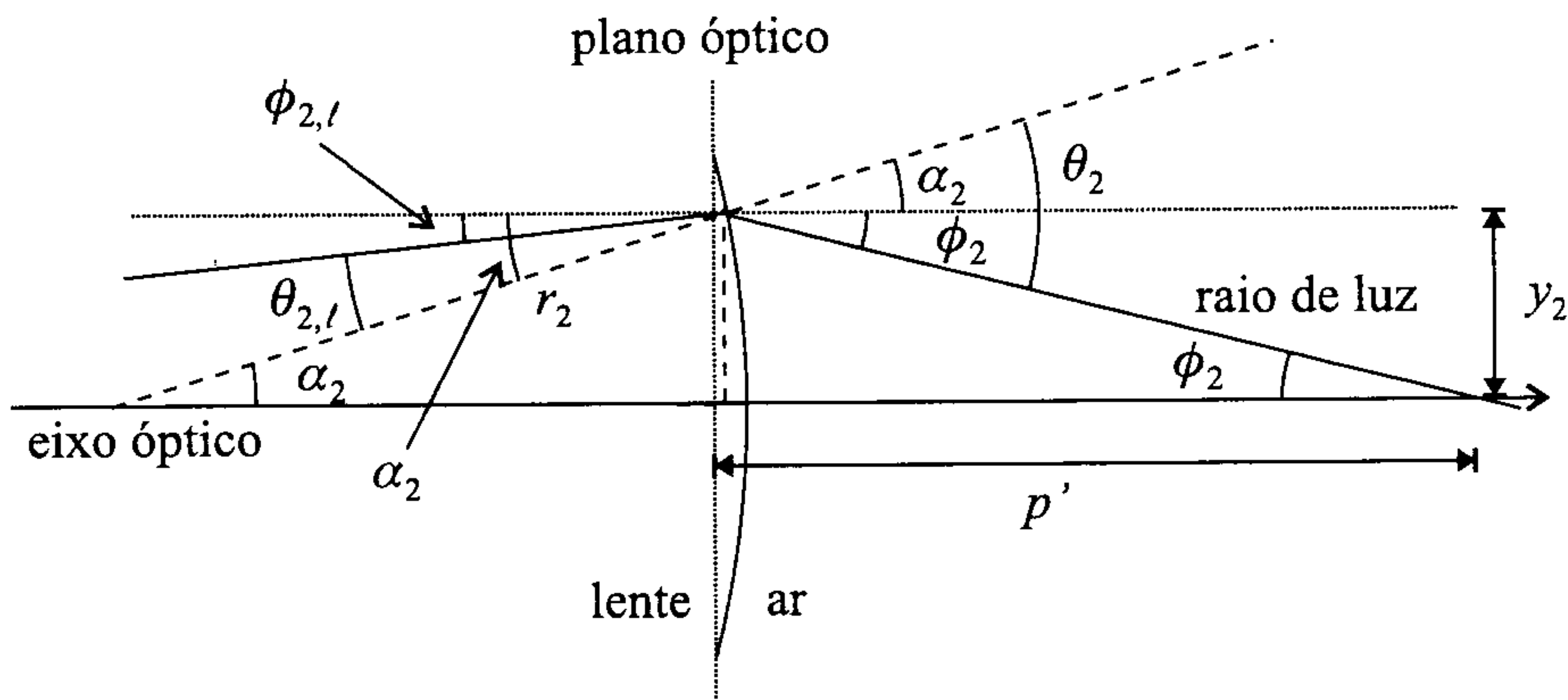


Figura I.4: Refração na segunda superfície esférica da lente, onde o raio de luz passa da lente para o ar.

Na figura, as grandezas são definidas como na superfície 1, e devemos lembrar que o raio de luz nessa figura é continuação do raio de luz da figura I.3, de modo que ocorre

$$\phi_{2,\ell} = \phi_{1,\ell} \quad (\text{I.6})$$

Além disso, temos também

$$\theta_{2,\ell} = \alpha_2 - \phi_{2,\ell}$$

ou, usando I.6,

$$\theta_{2,\ell} = \alpha_2 - \phi_{1,\ell} \quad (\text{I.7})$$

além de

$$\theta_2 = \alpha_2 + \phi_2 \quad (\text{I.8})$$

Aplicando a lei de Snell, temos

$$n \sin \theta_{2,\ell} = \sin \theta_2$$

Considerando apenas raios paraxiais, podemos simplificar essa expressão para

$$n\theta_{2,\ell} = \theta_2$$

ou, usando I.7 e I.8, obtemos

$$n(\alpha_2 - \phi_{1,\ell}) = \alpha_2 + \phi_2 \quad (\text{I.9})$$

Vamos somar essa equação com a I.5, ou seja,

$$n(\alpha_1 + \phi_{1,\ell}) + n(\alpha_2 - \phi_{1,\ell}) = \alpha_1 + \phi_1 + \alpha_2 + \phi_2$$

ou

$$n(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 + \phi_1 + \phi_2$$

ou ainda,

$$(n - 1)(\alpha_1 + \alpha_2) = \phi_1 + \phi_2 \quad (\text{I.10})$$

Agora, das figuras I.3 e I.4, temos

$$\text{sen } \alpha_1 = \frac{y_1}{r_1}$$

e

$$\text{sen } \alpha_2 = \frac{y_2}{r_2}$$

Limitando-nos a raios paraxiais, podemos escrever, aproximadamente,

$$\alpha_1 = \frac{y_1}{r_1} \quad (\text{I.11})$$

e

$$\alpha_2 = \frac{y_2}{r_2} \quad (\text{I.12})$$

Além disso, precisamos agora fazer a segunda hipótese relevante, que considera que a lente é delgada, ou seja, a espessura da lente é muito pequena quando comparada com os raios de curvatura r_1 e r_2 , e também quando comparada com as distâncias p e p' . Assim, podemos escrever, aproximadamente,

$$\text{tg } \phi_1 = \frac{y_1}{p}$$

e

$$\text{tg } \phi_2 = \frac{y_2}{p'}$$

sendo que, considerando raios paraxiais, temos

$$\phi_1 = \frac{y_1}{p} \quad (\text{I.13})$$

e

$$\phi_2 = \frac{y_2}{p'} \quad (\text{I.14})$$

Substituindo agora as expressões I.11–I.14 em I.10, temos

$$(n - 1) \left(\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} \right) = \frac{y_1}{p} + \frac{y_2}{p'}$$

ou, considerando que a lente é delgada, temos que $y_1 \approx y_2$, de modo que obtemos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{I.15})$$

Note que o lado direito da equação acima é uma grandeza fixa para uma dada lente, já que r_1 e r_2 envolvem a geometria dela e n é o seu índice de refração, o qual é fixo, pois depende do material do qual a lente é feita. Por questão de convenção, ao invés de escrever a equação acima em termos de r_1 e r_2 , é mais comum encontrar a expressão acima escrita de outra forma, definindo-se

$$\rho_1 = r_1 \qquad \rho_2 = -r_2 \quad (\text{I.16})$$

de modo que a equação nesses termos fica

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n - 1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\text{I.17})$$

A grandeza ρ tem módulo igual ao raio de curvatura e segue a seguinte convenção para o sinal: se o sentido de propagação do raio de luz for igual ao sentido da superfície da lente até o seu respectivo centro de curvatura, então ρ correspondente é positivo, caso contrário, é negativo. Na figura I.2, ρ_2 será negativo e ρ_1 positivo.

O lado direito das equações I.15 ou I.17 está associado a um ponto com características especiais. Considere um raio de luz que incida na lente paralelo ao eixo óptico. Nesse caso, ele corta o eixo óptico em $p \rightarrow \infty$, de modo que $\frac{1}{p} \rightarrow 0$ e, ao passar pela lente, ele corta o eixo óptico do outro lado da lente, no ponto dado por

$$\frac{1}{p'} = (n - 1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\text{I.18})$$

Na verdade, qualquer raio que incida paralelamente ao eixo óptico na lente será focalizado para esse ponto, de modo que esse ponto especial é chamado de foco da lente, ou seja,

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (\text{I.19})$$

Essa fórmula, conhecida como *fórmula dos fabricantes de lentes*, permite determinar a distância focal, ou foco, de uma lente esférica qualquer. Uma

superfície plana pode ser considerada como uma superfície esférica com raio de curvatura tendendo a infinito.

O foco de uma lente pode ser positivo ou negativo. Quando ele é positivo, temos uma situação como a mostrada na figura I.5.

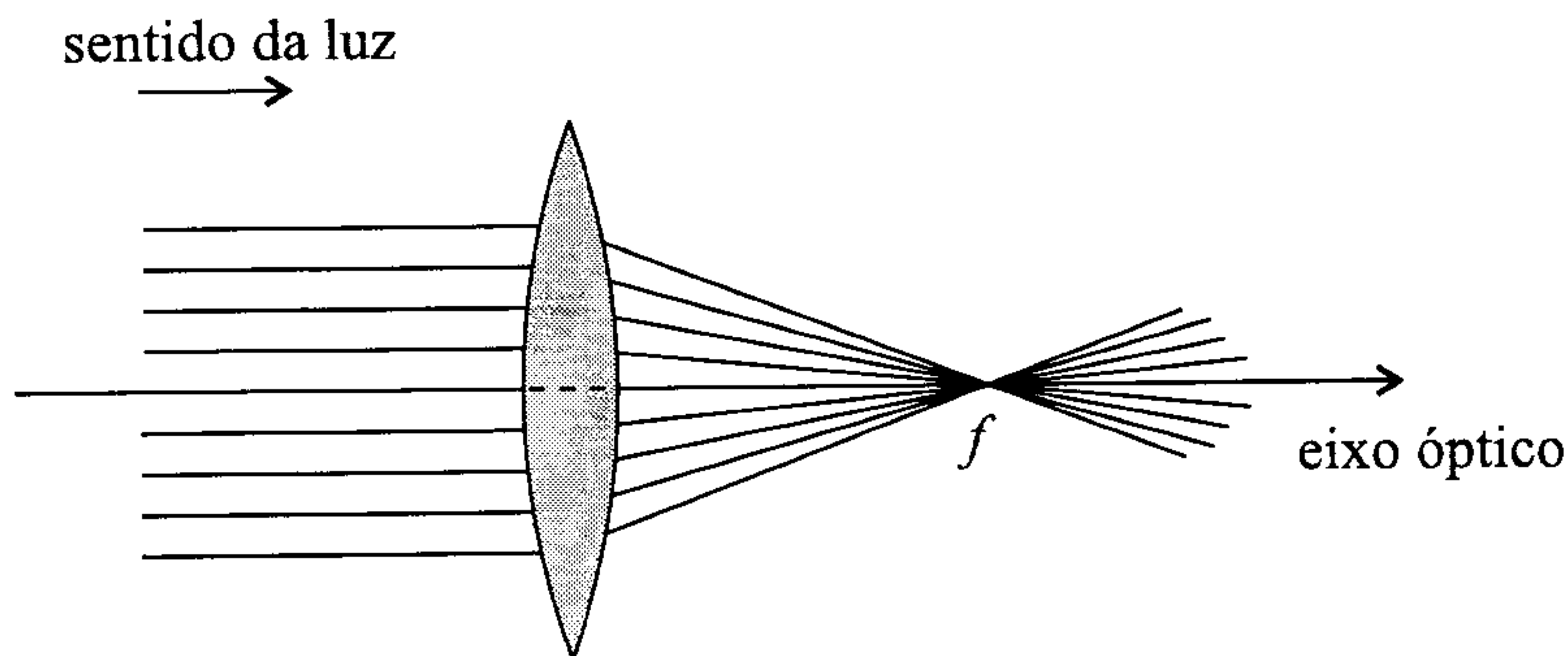


Figura I.5: Esquema dos raios de luz para uma lente convergente.

No caso de f ser positivo, o sentido de propagação da luz coincide com o sentido da lente até o foco. Nesse caso, a lente é convergente, pois faz com que os raios de luz que incidem paralelos ao eixo óptico sejam concentrados em algum ponto do eixo óptico.

Quando o foco é negativo, temos uma lente como a da figura I.6.

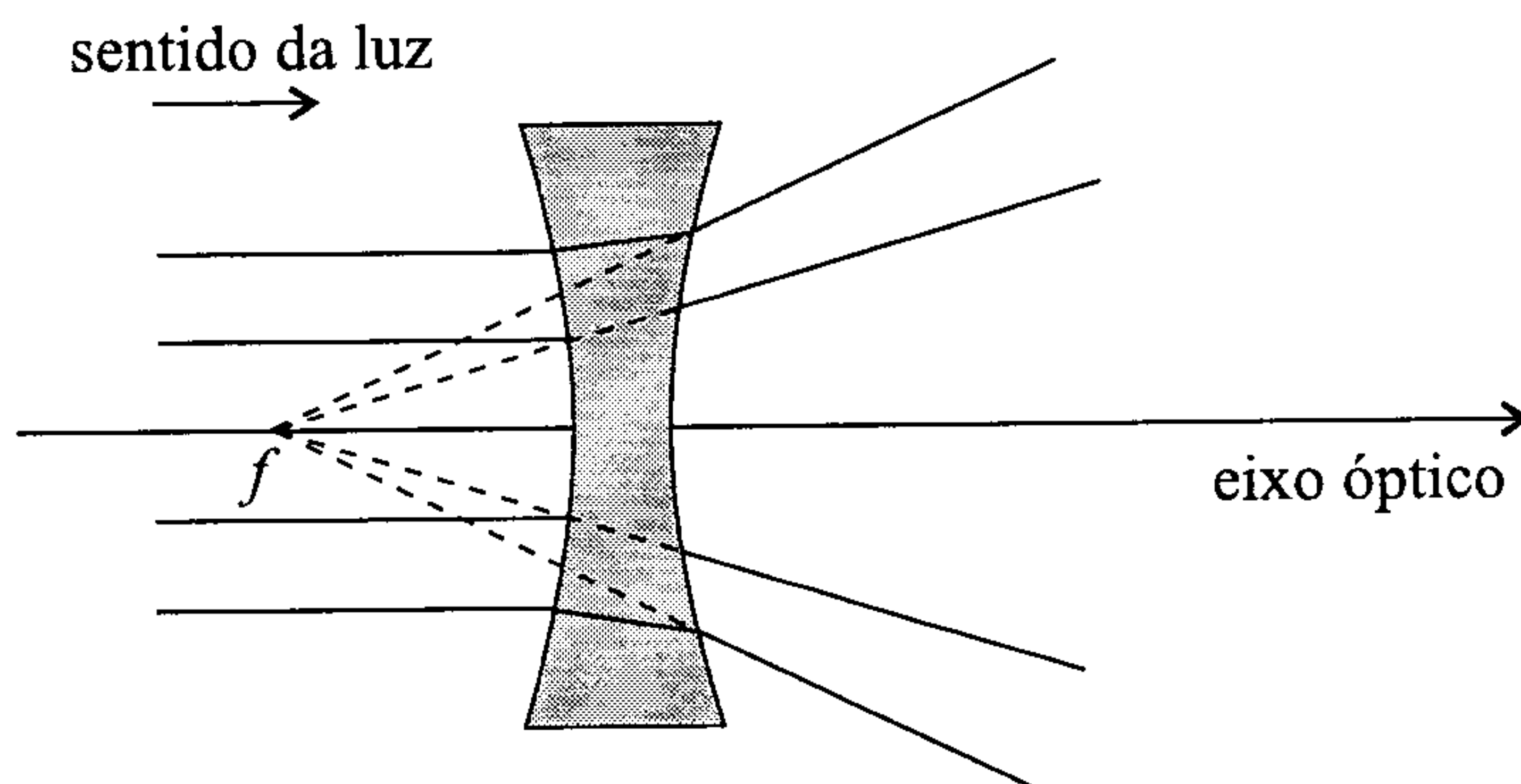


Figura I.6: Esquema dos raios de luz para uma lente divergente.

No caso mostrado, os raios de luz que incidem paralelos, ao passarem pela lente, divergem, e por isso este tipo de lente é chamada de lente divergente. Se prolongarmos os raios de luz que saem da lente, os prolongamentos dos raios é que se cruzam num ponto, que é o foco da lente. Assim, o foco é negativo quando o sentido de propagação da luz e o sentido da lente até o foco são opostos.

Com o uso da idéia de foco da lente, a equação I.17 pode ser escrita como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (\text{I.20})$$

Assim, as posições no eixo óptico em que o raio de luz corta o eixo antes e depois da lente estão relacionadas entre si, pela equação acima, que envolve também o foco da lente. Agora, considere um plano, perpendicular ao eixo óptico, do qual partem raios de luz, como mostra a figura I.7.

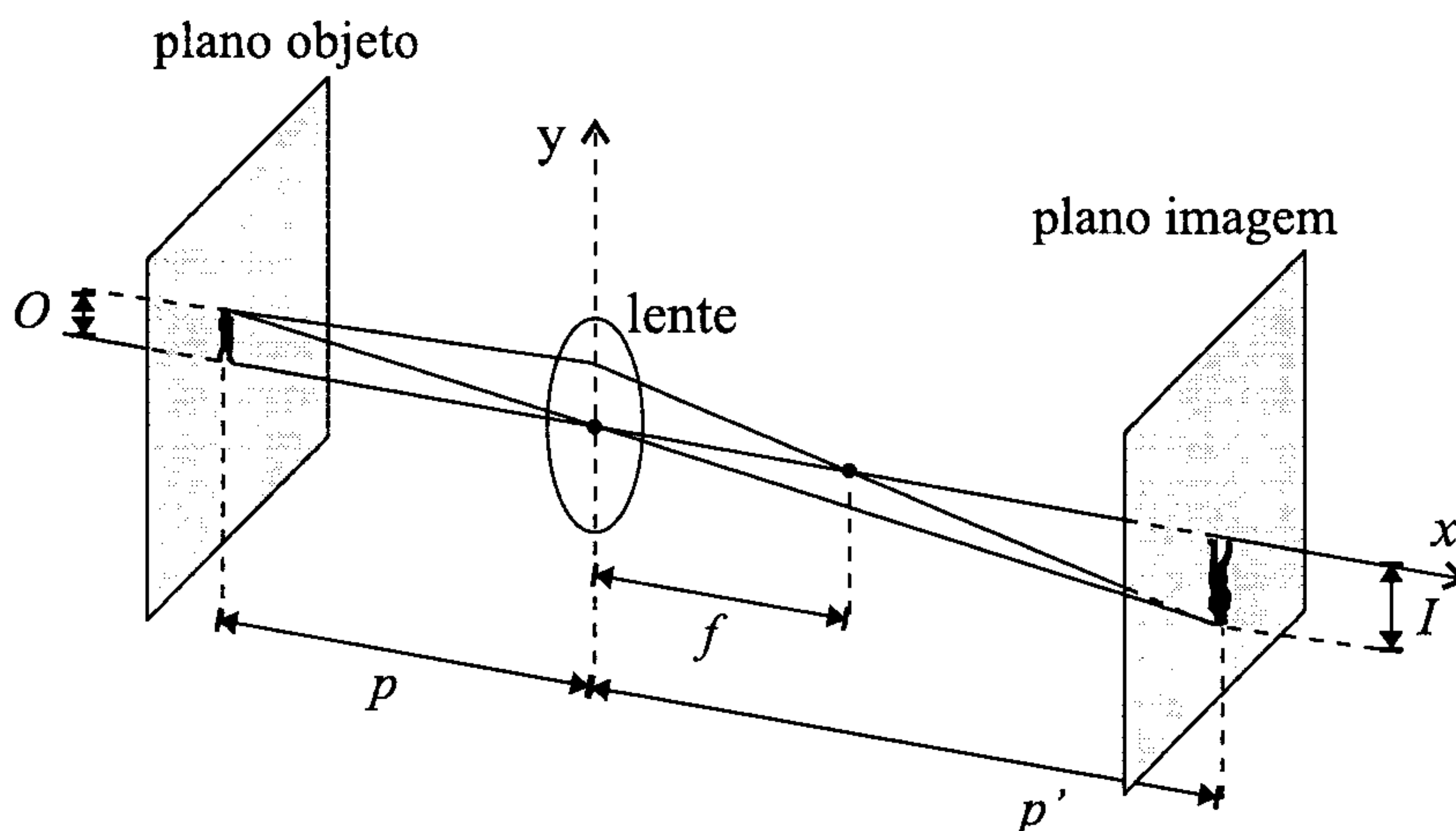


Figura I.7: Esquema da formação da imagem numa lente.

O plano de onde partem os raios de luz é chamado de plano objeto e situa-se a uma distância p da lente. Nele é colocado um objeto de tamanho O , que formará uma imagem, de tamanho I a uma distância p' da lente, no plano imagem. Nosso objetivo agora é mostrar que de fato os raios formam uma imagem no plano imagem e também determinar as características dessa imagem em relação ao objeto original. Para isso, considere que o eixo óptico

defina um eixo x , cuja origem está na lente e o sentido positivo corresponde ao sentido de propagação da luz. Vamos agora estudar dois raios particulares emitidos pelo topo do objeto. Um desses raios incide na lente paralelamente ao eixo x enquanto o outro passa através do centro da lente, não sofrendo alteração de direção, já que para esse ponto a refração numa das superfícies é compensada pela refração na outra superfície. Pode-se ver isso também se lembrarmos que, para esse raio, p seria nulo, de modo que $\frac{1}{p} \rightarrow \infty$, e isso, pela equação I.20, implica que $\frac{1}{p'} \rightarrow -\infty$, ou então, que $p' \rightarrow 0$. Note que há uma convenção de sinais para p e p' . O valor de p é positivo se o sentido de propagação da luz é igual ao sentido do plano objeto até a lente, e negativo se forem contrários. Para p' , temos que ele é positivo se o sentido de propagação da luz for igual ao sentido da lente até o plano imagem, e negativo em caso contrário.

Podemos escrever uma equação de reta para o raio de luz que passa pelo centro. Para um dado valor x , a altura y do raio é dada por

$$y = -\frac{O}{p}x \quad (\text{I.21})$$

Podemos verificar essa relação calculando

$$y(0) = 0 \qquad y(-p) = -\frac{O}{p}(-p) = O$$

O outro raio, o que passa pelo foco, tem equação

$$y = O - \frac{O}{f}x \quad (\text{I.22})$$

Conforme podemos verificar, calculando

$$y(0) = O \qquad y(f) = O - \frac{O}{f}f = 0$$

O ponto de intersecção das duas retas define o topo da imagem, no plano imagem, e ocorre, considerando-se as duas equações I.21 e I.22, quando

$$-\frac{O}{p}x = O - \frac{O}{f}x$$

ou

$$O = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right) O x$$

ou ainda,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \quad (\text{I.23})$$

Assim, a coordenada x é dada pela equação acima. Lembrando agora I.20, temos

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \quad (\text{I.24})$$

Portanto, comparando as equações I.23 e I.24, vemos que, de fato, a imagem se forma a uma distância p' da lente, conforme já havíamos antecipado. É imediato estender o raciocínio para todos os pontos do plano objeto, que gerarão pontos no plano imagem. O tamanho da imagem pode ser obtido se utilizarmos as equações de reta dadas por I.21 ou I.22, isto é,

$$I = -\frac{O}{p} p'$$

ou

$$I = -\frac{p'}{p} O \quad (\text{I.25})$$

Definindo o fator de ampliação como sendo

$$A = \frac{I}{O} = -\frac{p'}{p} \quad (\text{I.26})$$

vemos que A pode ser positivo ou negativo, dependendo dos valores de p e p' . Quando ele é positivo, temos uma imagem direita em relação ao objeto. Quando é negativo, a imagem é invertida, ou “de cabeça para baixo”, em relação ao objeto. Além disso, $|A|$ pode ser maior, igual ou menor que 1. Quando $|A| > 1$, temos uma imagem maior que o objeto, e ocorre uma ampliação. Nesse caso, $|p| < |p'|$. Quando $|A| = 1$, objeto e imagem têm mesmo tamanho, e isso ocorre quando $|p| = |p'|$. Por fim, quando $|A| < 1$, a imagem é menor que o objeto, e $|p'| < |p|$.

Quando p é positivo, o que ocorre quando os raios de luz realmente provêm do objeto, temos um objeto real. Esse objeto real produz uma imagem. Se essa imagem for formada pelos raios de luz que atravessam a lente e formam o plano imagem, de modo que p' também é positivo, a imagem também será real, e ela pode ser projetada num anteparo. Por outro lado, se a imagem for formada pelos prolongamentos dos raios, como ocorre na figura I.6, teremos $p' < 0$, e a imagem será virtual, podendo ser vista mas não projetada. É possível termos um $p < 0$, o que corresponde a um objeto virtual. Nesse caso, o sistema óptico não pode ter apenas uma lente. O que ocorre é que a imagem virtual de um objeto real obtida usando-se uma dada lente age como objeto para outra lente, numa associação de lentes. Esse objeto, então, é virtual, pois foi formado pelo prolongamento dos raios de luz, e não pelos próprios raios, e implica em $p < 0$. Quando existem mais lentes delgadas, a imagem da primeira age como objeto da segunda, a imagem da segunda é o objeto da terceira, e assim sucessivamente, de modo que as equações obtidas podem ser aplicadas desde que as lentes sejam delgadas. Vamos agora eliminar essa restrição.

I.2 Lentes Esféricas Espessas e o Método Matricial

As lentes de sistemas ópticos em geral não têm espessura desprezível quando comparadas com as dimensões relevantes de uso. Nesse caso, as equações simples que obtivemos dão apenas valores aproximados para as grandezas, e um tratamento mais refinado precisa ser feito. Vamos considerar novamente a figura I.3, só que agora permitiremos que os índices de refração dos meios que ficam de cada lado da superfície esférica sejam n e n' , como mostra a figura I.8.

Na superfície esférica ocorre refração segundo a lei de Snell 23.31, ou seja,

$$n \sin \theta = n' \sin \theta' \quad (\text{I.27})$$

Da figura, também temos

$$\theta = \alpha + \phi \quad (\text{I.28})$$

e

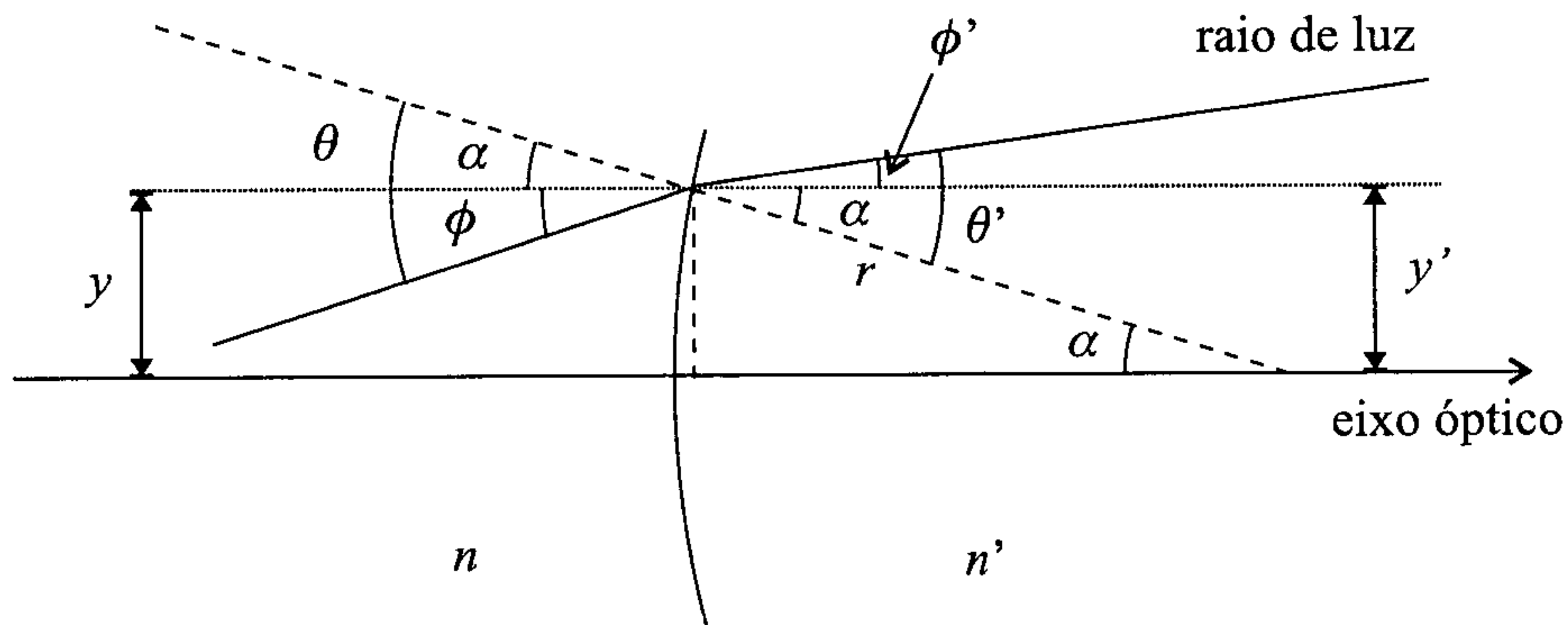


Figura I.8: Refração numa superfície esférica entre dois meios de índices de refração n e n' .

$$\theta' = \alpha + \phi' \quad (\text{I.29})$$

Restringindo-nos a raios paraxiais, podemos aproximar os senos dos ângulos pelos próprios ângulos, de modo que I.27 fica

$$n\theta = n'\theta'$$

ou, usando I.28 e I.29, temos

$$n(\alpha + \phi) = n'(\alpha + \phi') \quad (\text{I.30})$$

Para o ângulo α , temos

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

onde y representa a altura do ponto onde o raio de luz atinge a superfície a partir do eixo óptico. Usando a aproximação de raios paraxiais, podemos escrever

$$\alpha = \frac{y}{r} \quad (\text{I.31})$$

Considerando a convenção já discutida para ρ , podemos escrever também

$$\alpha = \frac{y}{\rho} \quad (\text{I.32})$$

Substituindo I.32 em I.30, achamos

$$n\left(\frac{y}{\rho} + \phi\right) = n'\left(\frac{y}{\rho} + \phi'\right)$$

ou

$$(n - n')\frac{y}{\rho} + n\phi = n'\phi'$$

ou ainda,

$$\phi' = \frac{n - n'}{n'}\frac{y}{\rho} + \frac{n}{n'}\phi \quad (\text{I.33})$$

Assim, temos ϕ' em função de ϕ e y . Vamos complementar essa equação com

$$y' = y \quad (\text{I.34})$$

que, apesar de parecer redundante, é útil para que possamos escrever as duas equações acima numa forma mais interessante, ou seja,

$$\begin{pmatrix} y' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n'}{n'}\frac{1}{\rho} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{I.35})$$

A matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n'}{n'}\frac{1}{\rho} & \frac{n}{n'} \end{pmatrix} \quad (\text{I.36})$$

é chamada de matriz de refração, e ela estabelece, para um dado raio, o que ocorre durante a refração desse raio numa dada superfície S , quando ele incide vindo de um meio com índice de refração n passando para um meio com índice de refração n' .

Além da refração, dentro da lente também ocorre a propagação da luz de uma superfície até chegar à outra, isto é, ocorre transmissão de uma superfície

à outra. A figura I.9 ilustra a transmissão e mostra as grandezas relevantes.

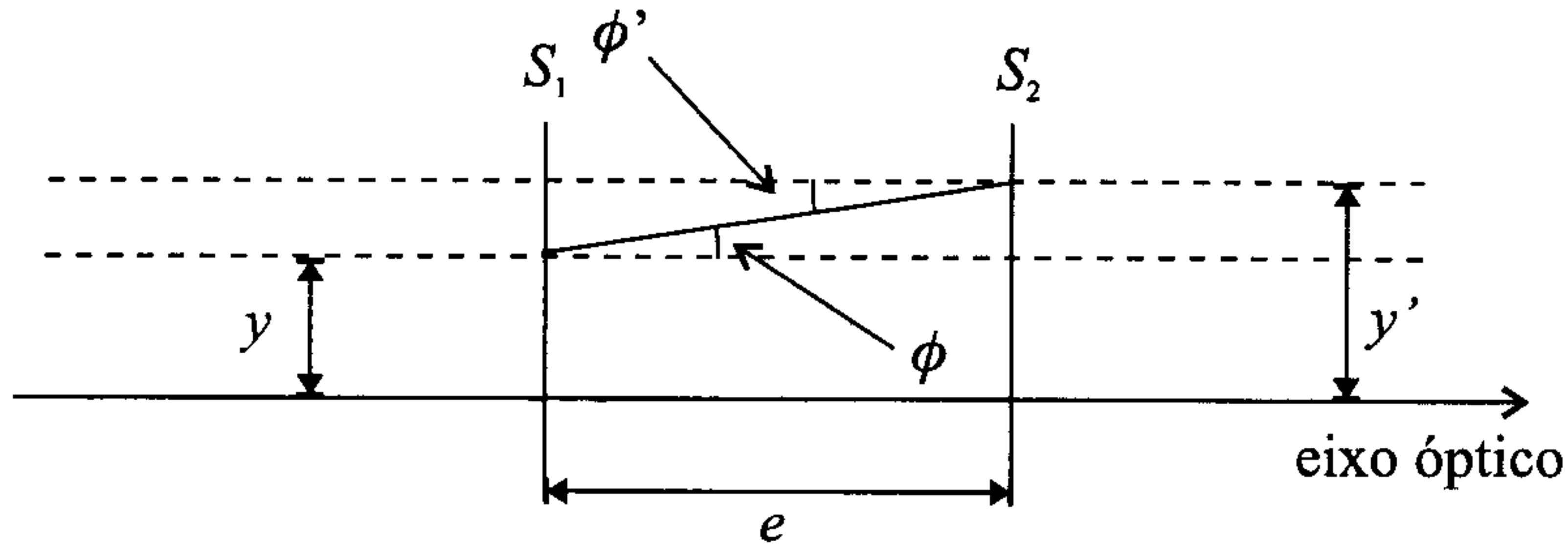


Figura I.9: Transmissão do raio de luz de uma superfície até a próxima.

A distância entre os dois planos considerados na superfície é dada por e . Com relação aos ângulos, temos

$$\phi' = \phi \quad (\text{I.37})$$

Considerando agora y e y' , vemos que a relação entre eles pode ser escrita como

$$y' = y + e \operatorname{tg} \phi$$

ou, usando a hipótese de raios paraxiais, obtemos

$$y' = y + e\phi \quad (\text{I.38})$$

e agora, na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} y' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{I.39})$$

onde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

é a matriz de transmissão entre duas superfícies S_1 e S_2 . Assim, definindo

$$P = \begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{I.41})$$

e

$$P' = \begin{pmatrix} y' \\ \phi' \end{pmatrix} \quad (\text{I.42})$$

vemos que podemos escrever a equação I.35, em notação matricial, como

$$P' = RP \quad (\text{I.43})$$

enquanto a equação I.39 fica

$$P' = TP \quad (\text{I.44})$$

Com o uso das matrizes de refração e transmissão, podemos definir o caminho de qualquer raio em qualquer sistema óptico, bastando para isso efetuar uma sucessão de multiplicações de matrizes. Por exemplo, considere a lente espessa da figura I.10.

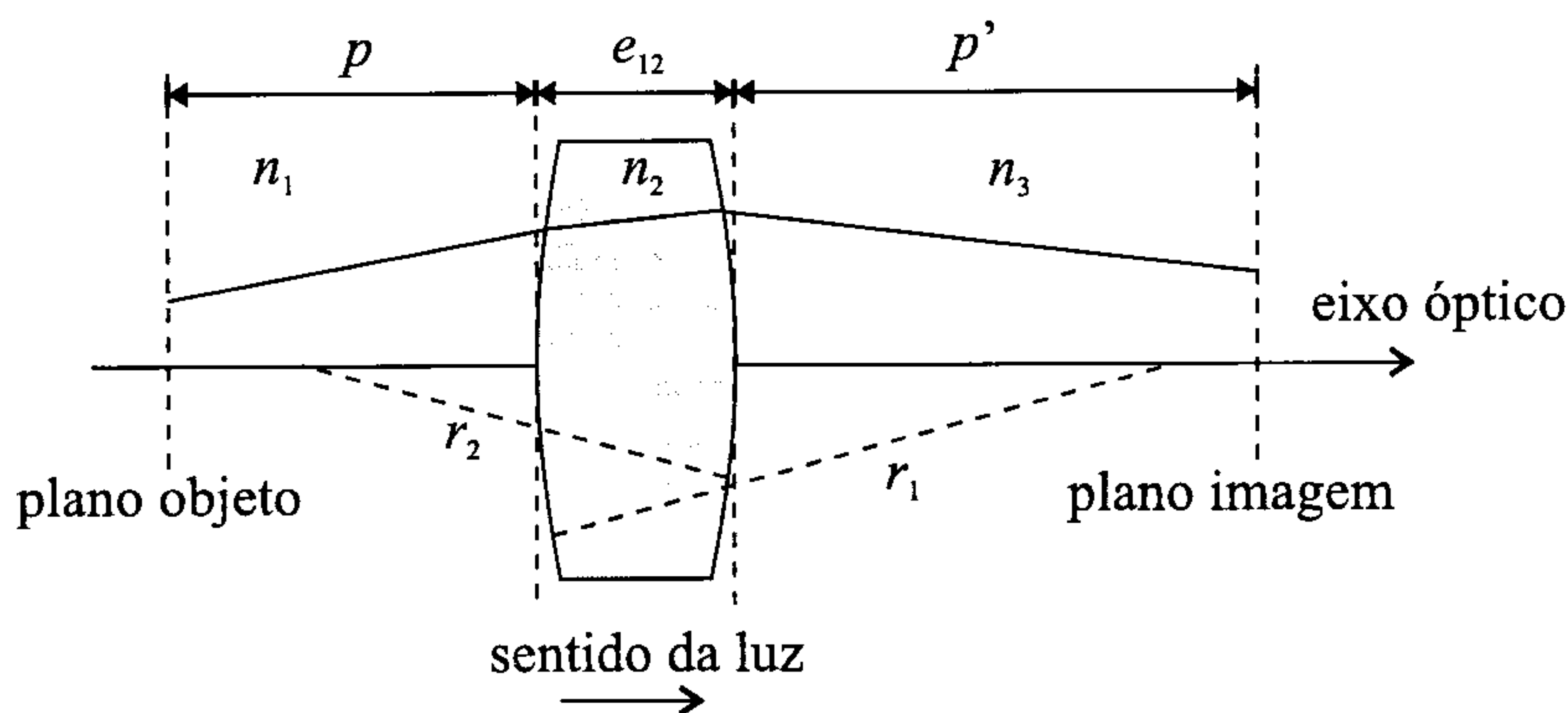


Figura I.10: Formação de imagem usando uma lente espessa.

Na figura, vemos que o raio sai do plano objeto e incide na superfície S_1 , entre os meios de índices de refração n_1 e n_2 , e sofre uma refração. Em seguida, ele propaga-se por dentro da lente até atingir a superfície S_2 , entre a lente e o meio de índice de refração n_3 , onde ocorre uma nova refração.

A partir daí, ele propaga-se até atingir o plano imagem. Cada um desses processos tem uma matriz associada.

Considere a situação inicial do raio de luz, emitido no plano objeto. Sua especificação é dada por I.41,

$$P = \begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix}$$

Para descrever a transmissão desde o plano objeto até a primeira superfície, usamos uma matriz de transmissão dada por I.40 com $e = p$, ou seja,

$$T_{O1} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.45})$$

onde T_{O1} é a matriz de transmissão do plano objeto (O) até o plano 1. Nesse plano, ocorre refração, o que gera a matriz de refração dada em I.36, com $n = n_1$ e $n' = n_2$, isto é,

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2} \frac{1}{\rho_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (\text{I.46})$$

onde lembramos que, nesse caso, pela convenção já apresentada $\rho_1 = +r_1$. O próximo passo consiste em considerar a transmissão da superfície 1 até a 2, passando através de uma espessura e_{12} . A matriz de transmissão fica, então,

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.47})$$

Na superfície 2 ocorre nova refração, com a correspondente matriz de refração, lembrando que agora $\rho_2 = -r_2$, ou seja,

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3} \frac{1}{\rho_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \quad (\text{I.48})$$

Por fim, o raio parte da superfície S_2 até atingir o plano imagem, e uma matriz de transmissão dá conta dessa parte, isto é,

$$T_{2I} = \begin{pmatrix} 1 & p' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.49})$$

Assim, o valor que define a condição final do raio no plano imagem, a partir de sua condição inicial descrita pela equação I.41, é dado pela combinação das equações I.45–I.49, ou seja,

$$P' = T_{2I}R_{23}T_{12}R_{12}T_{O1}P \quad (\text{I.50})$$

Nessa expressão, percebemos que a matriz

$$S = R_{23}T_{12}R_{12} \quad (\text{I.51})$$

envolve os fenômenos que ocorrem na lente, não dependendo, por exemplo, da posição onde o raio de luz incide nela. Ela é chamada de matriz do sistema óptico e, se ao invés de uma única lente, houver várias, essa matriz torna-se

$$S = \cdots R_{45}T_{34}R_{34}T_{23}R_{23}T_{12}R_{12} \quad (\text{I.52})$$

Assim, a equação I.50 pode ser escrita como

$$P' = T_{2I}ST_{O1}P \quad (\text{I.53})$$

Agora, considere que

$$P = \begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix}$$

Então, usando I.45,

$$T_{O1}P = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \phi \end{pmatrix}$$

ou

$$T_{O1}P = \begin{pmatrix} y + p\phi \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{I.54})$$

Vamos representar a matriz S genericamente por

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{I.55})$$

Assim, multiplicando I.55 e I.54, temos

$$ST_{O1}P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y + p\phi \\ \phi \end{pmatrix}$$

ou

$$ST_{O1}P = \begin{pmatrix} ay + ap\phi + b\phi \\ cy + cp\phi + d\phi \end{pmatrix} \quad (\text{I.56})$$

Agora, aplicamos I.49 em I.56, ou seja,

$$T_{2I}ST_{O1}P = \begin{pmatrix} 1 & p' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ay + ap\phi + b\phi \\ cy + cp\phi + d\phi \end{pmatrix}$$

ou

$$T_{2I}ST_{O1}P = \begin{pmatrix} ay + ap\phi + b\phi + p'(cy + cp\phi + d\phi) \\ cy + cp\phi + d\phi \end{pmatrix}$$

ou ainda, lembrando I.53,

$$P' = \begin{pmatrix} ay + ap\phi + b\phi + p'cy + p'cp\phi + p'd\phi \\ cy + cp\phi + d\phi \end{pmatrix} \quad (\text{I.57})$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} y' \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay + ap\phi + b\phi + p'cy + p'cp\phi + p'd\phi \\ cy + cp\phi + d\phi \end{pmatrix} \quad (\text{I.58})$$

que dá origem às equações

$$y' = (a + cp')y + (ap + b + cpp' + dp')\phi \quad (\text{I.59a})$$

$$\phi' = cy + (cp + d)\phi \quad (\text{I.59b})$$

Vamos analisar inicialmente a equação I.59a. Ela estabelece que y' depende de y e ϕ . Entretanto, todos os raios que partem de um mesmo ponto de altura y no plano objeto reúnem-se no mesmo ponto no plano imagem, com mesma altura y' . Portanto, y' não deve depender de ϕ , de modo que temos

$$ap + b + cpp' + dp' = 0 \quad (\text{I.60})$$

de onde resulta

$$p' = -\frac{ap + b}{cp + d} \quad (\text{I.61})$$

que fornece o valor da posição da imagem em termos da posição do objeto e de a , b , c e d , os quais dependem do sistema específico de lentes. Usando I.60 em I.59a, obtemos

$$y' = (a + cp')y \quad (\text{I.62})$$

de modo que

$$\frac{y'}{y} = a + cp' \quad (\text{I.63})$$

Como y e y' podem ser escolhidos no topo do objeto e da imagem, respectivamente, essa equação fornece a ampliação A da imagem, ou seja,

$$A = \frac{y'}{y} = a + cp' \quad (\text{I.64})$$

que também depende de parâmetros que podem ser determinados. Resta apenas determinar os valores de a , b , c e d , o que depende de conhecermos o sistema de lentes específico. A determinação de S para o caso da figura I.10 é deixada como exercício para o leitor (veja o exercício I.2).

Para encerrar, comentamos o olho humano. O olho é basicamente uma câmara escura, na qual, na entrada, há uma lente de distância focal variável, chamada cristalino, cuja distância focal é alterada pelos músculos ciliares. Por meio da mudança no foco, o olho normal consegue manter as imagens sendo formadas sempre no mesmo local, a retina, independentemente da distância a que o objeto esteja, até um limite de cerca de 10 cm numa pessoa normal. Objetos mais perto que isso não são vistos nitidamente, e fatores como idade ou defeitos de visão, como hipermetropia ou presbiopia, podem fazer com que a menor distância aumente sensivelmente. Por outro lado, pessoas míopes perdem a capacidade de os músculos ciliares relaxarem completamente, fazendo com que o cristalino deixe de poder ter uma distância focal próxima a infinito. Como consequência, míopes não têm visão nítida de objetos distantes. Tais problemas podem ser corrigidos utilizando-se lentes auxiliares, comumente conhecidas como óculos, de modo a compensar a capacidade de focalização perdida pelo cristalino. Isso encerra nossa discussão sobre lentes esféricas.

I.3 Exercícios

- I.1** Um conjunto formado por duas lentes espessas acopladas está imerso em ar. Os índices de refração das lentes são $n_2 = 1,5$ e $n_3 = 1,63$. Os raios de curvatura da primeira lente são $\rho_1 = 2$ cm e $\rho_2 = -2$ cm. Para a segunda lente, temos $\rho_2 = -2$ cm e $\rho_3 \rightarrow \infty$. As espessuras das lentes são $e_{12} = 0,5$ cm e $e_{23} = 0,4$ cm. Se um objeto situado a uma distância muito grande da lente for colocado no plano objeto, onde se forma a imagem?
- I.2** Determine a matriz S para a lente espessa da figura I.10.

Referências Bibliográficas

Listamos a seguir algumas obras que foram consultadas durante a realização deste trabalho. Para facilitar a consulta sobre assuntos específicos, elas estão catalogadas de acordo com a área ou as áreas de abrangência. Por esse motivo, algumas delas aparecem mais de uma vez. Devem ser consideradas também as próprias referências contidas nesses livros.

1. FÍSICA BÁSICA - ELETROMAGNETISMO

ALONSO, M.; FINN, E. *Física*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1972. v. 2.

EISBERG, R.; LERNER, L. *Física: Fundamentos e Aplicações*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1982. v. 3 e 4.

GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 2.

GONÇALVES, Dalton. *Física, do Científico ao Vestibular*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1970. v. 2.

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física*. São Paulo: Makron Books, 1999. v. 2.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1997. v. 3.

SALMERON, R. A. *Introdução à Eletricidade e ao Magnetismo*. 5. ed. São Paulo, 1971.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H. *Física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. v. 3.

SERWAY, R. A. *Física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. v. 3.

TIPLER, Paul. *Física*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986. v. 2b.

2. FÍSICA BÁSICA - GERAL

ALONSO, M.; FINN, E. *Física*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1972. v. 1.

EISBERG, R.; LERNER, L. *Física: Fundamentos e Aplicações*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1982. v. 1 e 2.

GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 1.

GONÇALVES, Dalton. *Física, do Científico ao Vestibular*. 4. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1970. v. 1.

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. *Física*. São Paulo: Makron Books, 1999. v. 1.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1981. v. 1 e 2.

———. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1997. v. 4.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H. *Física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. v. 1, 2 e 4.

SERWAY, R. A. *Física*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. v. 1 e 2.

TIPLER, Paul. *Física*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986. v. 1a, 1b e 2a.

3. FÍSICA BÁSICA - ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

ARRIBAS, S. D. *Experiências de Física ao Alcance de Todas as Escolas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação de Assistência ao Estudante, 1988.

FERNANDES, J. *Atividades Práticas de Física Geral*. Florianópolis: Editora da UFSC, 1985.

FUNBEC. *Laboratório Portátil de Física - 2^o grau*. São Paulo: EDART.

GOLDEMBERG, José. *Física Geral e Experimental*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970. v. 1.

4. ELETROMAGNETISMO

FRENKEL, Josif. *Princípios de Eletrodinâmica Clássica*. São Paulo: Edusp, 1996.

GRIFFITHS, David J. *Introduction to Electrodynamics*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.

HEALD, M. A.; MARION, J. B. *Classical Eletromagnetic Radiation*. 3. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1995.

JACKSON, John David. *Eletrodinâmica Clássica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

———. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1960.

MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 3. ed. New York: Dover, 1954.

PANOFSKY, W. K.; PHILLIPS, M. *Classical Electricity and Magnetism*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1962.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

SALMERON, R. A. *Introdução à Eletricidade e ao Magnetismo*. 5. ed. São Paulo, 1971.

SMYTHE, W. R. *Static and Dynamic Electricity*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1969.

SOMMERFELD, A. *Electrodynamics*. New York: Academic Press, 1952.

STRATTON, J. A. *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.

5. ESTADO SÓLIDO E ESTRUTURA DA MATÉRIA

ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. *Solid State Physics*. International Edition. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1976.

EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. 6. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1988.

KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 1971.

6. MECÂNICA CLÁSSICA

FOWLES, G. R.; CLASSIDAY, G. L. *Analytical Mechanics*. 6. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1999.

GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1980.

MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 4. ed. [s. l.]: Saunders College Publishing, 1995.

SYMON, Keith. *Mecânica*. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.

7. MECÂNICA QUÂNTICA

EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. 6. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1988.

MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1964.

MESSIAH, A. *Quantum Mechanics*. New York: Interscience, 1961.

ROBINETT, R. W. *Quantum Mechanics: Classical Results, Modern Systems, and Visualized Examples*. New York: Oxford University Press, 1997.

SAKURAY, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company, 1994.

_____. *Advanced Quantum Mechanics*. Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company, 1967.

8. TERMODINÂMICA E MECÂNICA ESTATÍSTICA

CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.

HUANG, K. *Statistical Mechanics*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.

KUBO, R. *Thermodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1960.

REIF, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. International student edition. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1965.

9. FÍSICA-MATEMÁTICA

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Macmilan, 1964.

ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*. 2. ed. New York: Academic, 1970.

BUTKOV, Eugene. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 1999.

MORSE, P. M; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953, v. 1 e 2.

10. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

BUTKOV, Eugene. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1978.

MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 1999.

ROSS, Shepley. *Differential Equations*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1984.

SOMMERFELD, A. *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press, 1964.

11. ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

———. *Geometria Analítica*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

12. CÁLCULO VETORIAL

SPIEGEL, M. R. *Análise Vetorial*. São Paulo: McGraw-Hill, 1974.

13. QUÍMICA GERAL

SARDELLA, A.; MATEUS, E. *Curso de Química*. 4. ed. São Paulo: Editora Ática, 1987. v. 1, 2 e 3.

Índice Remissivo

Índice de refração, 327

complexo, 350, 468

fórmula de Cauchy, 379, 383

gases, 375

ressonância, 376

Ângulo de Brewster

conceito, 442

definição, 443

polarização, 445

Absorção, 369

índice de refração

fórmula de Cauchy, 379

coeficiente, 375

condutividade elétrica

corrente alternada, 384

corrente contínua, 384

Kramers-Kronig, *veja* Rela-

ções de Kramers-Kronig

modelo de Lorentz, 369

permissividade elétrica, 374

ressonância, 374

velocidade

fase, 377

grupo, 377

Antena

alimentada pelo centro, 646

campo elétrico, 654, 695

campo magnético, 654, 694

coeficientes, 653

corrente, 652

corrente elétrica, 647

densidade de corrente, 647

distribuição angular de

potência, 678, 680, 685,
695

meia-onda, 653

onda completa, 653

potência média, 678, 681,
686

potencial vetorial magnético,
691

solução exata, 687

alimentada pelo extremo, 655

campo elétrico, 659

campo magnético, 660

coeficientes, 657

corrente, 655

densidade de corrente, 656

meia-onda, 657

onda completa, 658

aproximação de Po-
cklington, 652

associação, 699

campo elétrico, 704

campo magnético, 703

distribuição angular de
potência, 704

função da associação, 704

função do elemento da ante-
na, 704

- Binômio de Newton, 873
- C. Huygens, 820
- Calibre de Coulomb
- campo elétrico, 40
 - densidade de corrente, 41
 - longitudinal, 41, 44
 - transversal, 41, 44
 - potencial elétrico, 40
 - potencial vetorial
 - magnético, 41, 68
 - equação diferencial, 46
- Calibre de Lorentz, 48
- condição, 48
 - equações de onda, 52
 - equações diferenciais, 49
 - exemplo, 50
 - potenciais retardados, *veja* Potenciais retardados
 - potencial elétrico, 49
 - potencial vetorial magnético, 49
- Calibre de radiação, *veja* Calibre de Coulomb
- Cavidades ressonantes, 794
- campo elétrico transversal, 796
 - campo magnético transversal, 796
 - campos longitudinais, 797
 - densidade de energia eletromagnética, 803, 805
 - densidade superficial de energia eletromagnética, 807
 - energia armazenada, 807, 808
 - fator de qualidade, 802, 814
 - frequência de corte, 801
 - ionosfera, 815
 - ressonâncias Schumann, 815
 - número de onda, 798
 - número de onda de corte, 801
 - potência dissipada, 814
 - potência dissipada por área, 808
- Circuito LC, 998
- equação da carga, 1004
 - equação da corrente, 1004
 - frequência natural, 1000
- Circuito RC, 987
- carga do capacitor
 - carga limite, 990
 - equação da carga, 990
 - equação da corrente, 990
 - constante de tempo τ_C , 990
 - descarga do capacitor, 991
 - equação da carga, 992
- Circuito RL, 993
- constante de tempo τ_L , 995
 - equação da corrente, 995, 996
- Circuito RLC
- corrente alternada
 - fasor, 1017
 - ressonância, 1028
 - tensões, 1023
 - corrente contínua, 1005
 - crítico, 1012
 - equação diferencial, 1006
 - subcrítico, 1009
 - supercrítico, 1011
 - frequência natural, 1007
- Coeficiente de absorção, 375
- Comprimento óptico, 433
- Corrente alternada, 977, 1016
- corrente RMS, 1033
 - fator de potência, 1034
 - impedância, *veja* Impedância
 - potência, 1033, 1034
 - reatância, *veja* Reatância
 - tensão RMS, 1031

- D. Brewster, 442
- Delta de Dirac, 60
 - harmônicos esféricos, 1051
- Delta de Kronecker, 220
- Difração, 819
 - construção de Huygens, 820, 822
 - minionda, 821
 - fenda única, 850
 - amplitude, 851
 - intensidade, 852
 - fenda circular, 870
 - amplitude, 877
 - critério de Rayleigh, 879
 - integral de difração, 872
 - intensidade, 877
 - padrão de Airy, 878
 - fenda dupla, 853
 - amplitude, 855
 - intensidade, 856
 - fenda retangular, 867
 - amplitude, 869
 - intensidade, 869
- Fraunhofer, 845
 - condição, 848
 - fenda única, *veja* Difração, fenda única
 - fenda circular, *veja* Difração, fenda circular
 - fenda dupla, *veja* Difração, fenda dupla
 - fenda retangular, *veja* Difração, fenda retangular
 - integral de difração, 849
 - limite paraxial, 846
 - múltiplas fendas, *veja* Difração, múltiplas fendas
- Fresnel, 880
 - espiral de Cornu, 884
 - integral de difração, 882
 - integral de Fresnel, *veja* Integral de Fresnel
 - intensidade, 885, 887
 - padrão de difração, 888
- múltiplas fendas, 857
 - amplitude, 861, 867
 - intensidade, 862, 867
- teoria escalar, 823
 - equação, 825
 - equação de Helmholtz, 823
 - fator de obliquidade, 829
- Fraunhofer, 845
- função de Green, 823
- hipóteses de Kirchhoff, 825
- integral de difração de Fresnel-Kirchhoff, 828
- princípio de Babinet, 829
- teoria vetorial, 830
 - campo elétrico, 834
 - campo magnético, 834
 - integrais de difração de Kirchhoff, 834
- Dipolo de Thomson, 258
- Dispersão, 369
 - relação, 386, 390
- Efeito Goos-Hänchen, 459
 - equação, 459
- Equação de Bessel, 1043
- Equação de Helmholtz, 1037
 - campo elétrico, 619
 - não-homogênea, 635
 - campo magnético, 618
 - não-homogênea, 633
 - homogênea, 1037
 - solução, 1044
 - não-homogênea, 56
- Equação de onda

- campo elétrico, 302
 - condutor, 340
 - solução, 305, 327
- campo magnético, 303
 - condutor, 340
 - solução, 305, 327
- homogênea, 287
- não-homogênea, 287
- solução, 289
 - complexa, 290
- Equação de Poisson, 77
- Equação de Schrödinger, 171
- Equações de Fresnel
 - campo elétrico
 - paralelo ao plano de incidência, 440
- Equações de Jefimenko, 94
 - campo elétrico, 95
 - campo magnético, 99
 - eletrostática, 99
 - lei de Biot-Savart, 103
 - magnetostática, 101
- Equações de Maxwell, 419
 - com fontes, 630
 - condutor, 338
 - dielétrico
 - sem fontes, 325
 - vácuo, 302, 617
- Espalhamento, 820
 - amplitude, 835
 - integral de difração vetorial de Kirchhoff, 836
 - teorema óptico, *veja* Teorema óptico
 - esfera perfeitamente condutora, 908
 - ângulos de fase de espalhamento, 918
 - comprimento de onda curto, 931
 - comprimento de onda longo, 920
 - potência espalhada por unidade de área, 909
 - seção de choque diferencial de espalhamento, 912, 930
 - seção de choque total de espalhamento, 913, 916
 - vetor de Poynting, 908
- Klein-Nishina
 - seção de choque total, 940
- potência absorvida, 838
- potência espalhada, 838
- potência incidente, 844
- potência total, 838
- seção de choque total, 844
- Thomson, 933
 - distribuição angular de potência espalhada, 935
 - seção de choque de Klein-Nishina, 940
 - seção de choque diferencial de espalhamento, 935, 938
 - seção de choque total, 940
- Fórmula de Larmor, 491
- Fórmula de Liénard, 503
- Fasor, 1018
- Força de Lorentz, 194
 - cargas em movimento, 212
 - quântica, 166
 - trabalho, 194
- Frequência angular
 - plasma, 385
- Função *bei*, 359
 - definição, 359
- Função *ber*, 359
 - definição, 359

- Função $\Gamma(n)$, 874
 Funções de Airy, 535, 537
 Funções de Bessel
 modificadas, 536
 primeiro tipo, 874
 forma assintótica, 877
 representação integral, 875
 Funções de Bessel esféricas, 1044
 fórmula de recorrência, 1045
 funções de Green, 1051
 primeiro tipo
 forma assintótica, 931
 propriedade, 1053, 1056
 segundo tipo
 forma assintótica, 931
 terceiro tipo, *veja* Funções de Hankel, esféricas
 Wronskiano, 1056
 Funções de Green
 dependente do tempo, 64, 65
 equação diferencial, 61
 funções de Bessel
 esféricas, 1051, 1057
 independente do tempo, 59
 equação diferencial, 56
 Funções de Hankel
 esféricas, 1049
 Funções de Kelvin, *veja* Função ber e bei
 Funções de Neumann
 esféricas, 1049

 Gerador, 978
 corrente, 982
 esquema, 978
 gráfico, 981
 Grau de Polarização, 451
 Guias de ondas, 729
 cavidades ressonantes, *veja* Cavidades ressonantes
 condutor oco em forma de tubo, 739
 campo elétrico, 743, 751, 752
 campo magnético, 743, 752
 condições de contorno, 754
 condições para o modo ET, 756
 condições para o modo MT, 758
 densidade de energia eletromagnética, 764, 766
 densidade linear de energia eletromagnética, 766, 768
 equação de Helmholtz para $\vec{B}$, 741
 equação de Helmholtz para $\vec{E}$, 740
 frequência de corte, 761
 modo EMT, 752
 número de onda de corte, 756
 potência dissipada por unidade de comprimento, 772, 774
 potência transmitida, 770
 velocidade de fase, 761
 velocidade de grupo, 762, 763
 vetor de Poynting, 770
 dois planos condutores, 730
 campo elétrico, 736
 comprimento de onda da guia, 735
 comprimento de onda de corte, 735
 comprimentos de onda permitidos, 734

- freqüências permitidas, 735
 - modos ET, 731
 - modos MT, 731
 - número de onda da guia, 735
 - número de onda de corte, 735
 - onda evanescente, 736
 - velocidade de fase, 738
 - velocidade de grupo, 739
- seção reta circular, 786
 - campo elétrico longitudinal para modo MT, 787, 788
 - campo magnético longitudinal para modo ET, 790
 - campos transversais, 789, 792
 - condições de contorno, 786, 790
 - freqüência de corte, 787, 791
 - número de onda de corte, 787, 791
- seção reta retangular, 775
 - campo elétrico longitudinal para modo MT, 783
 - campo magnético longitudinal para modo ET, 776
 - campos transversais do modo ET, 778
 - condições de contorno, 775, 783
 - freqüência de corte, 778, 784
 - modo dominante, 779
 - número de onda de corte, 776, 778, 783, 784
 - potência transmitida, 782
 - vetor de Poynting, 781
- H. C. Pocklington, 652
- Hamiltoniana, 158, 163
 - carga, 164
- Harmônicos esféricos, 677, 1039
- Identidade de Green bidimensional, 767
- Impedância, 330, 1025, 1027
 - vácuo, 330
- Integral de Fresnel
 - cosseno, 883
 - espiral de Cornu, 884
 - propriedades, 883
 - seno, 883
- Lagrangeana, 158
 - carga, 162
 - momento generalizado, 162
- Laplaciano
 - transverso, 741
- Lei de Snell, 432, 438, 1062
- Leis de conservação, 191
 - carga, 191
 - equação de continuidade, 193
- energia, 194
 - cabo coaxial, 210
 - densidade de energia, 197
 - forma diferencial, 198
 - forma integral, 200
 - meio dispersivo, 210
 - potência, 194
 - teorema de Poynting, 200
 - vetor de Poynting, 197
- momento angular, 238
 - densidade de momento eletromagnético, 241
 - densidade de momento mecânico, 240
 - densidade de momento total, 241

- densidade de torque, 239
- disco de Feynman, 249
- forma diferencial, 248
- forma integral, 249
- tensor, *veja* Tensor de momento angular
- momento linear, 212
 - cabo coaxial, 224
 - densidade de momento mecânico, 222
 - densidade de momento total, 223
 - eletromagnético, 216
 - escondido, 226
 - forma diferencial, 223
 - forma integral, 222
 - mecânico, 216
 - tensor de Maxwell, *veja* Tensor de Maxwell
 - total, 217
- Lema de Jordan, 406
- Lentes
 - delgadas, 1061
 - ampliação, 1071
 - diagrama, 1063
 - equação, 1067
 - equação dos fabricantes de lentes, 1067
 - foco, 1067
 - plano imagem, 1069
 - plano objeto, 1069
 - tamanho da imagem, 1071
 - espessas, 1072
 - diagrama, 1072
 - método matricial, 1074
 - matriz de refração, 1074
 - matriz de transmissão, 1075
 - matriz do sistema óptico, 1078
 - olho humano, 1080
 - lei de Snell, 1062
- Lord Kelvin, 359
- M. A. Cornu, 884
- Momento angular
 - operador
 - $\mathcal{L}^2$, 1039
 - $\mathcal{L}_+$, 1040
 - $\mathcal{L}_-$, 1040
 - $\mathcal{L}_x$, 1040
 - $\mathcal{L}_y$, 1040
 - $\mathcal{L}_z$, 1040
 - $\vec{\mathcal{L}}$, 1039
- Motor elétrico, 985
- Multipolos, 617
 - com fontes, 630
 - antena, *veja* Antenas
 - coeficientes, 636, 639, 640, 645
 - elétricos, 636
 - equação de Helmholtz, *veja* Equação de Helmholtz
 - função radial, 637
 - magnéticos, 636
 - distribuição angular de energia, 710, 712
 - distribuição angular de momento angular, 713, 719, 724
 - distribuição angular de potência, 660, 670
 - caso geral, 677, 678
 - mesmo índice ℓ , 673
 - multipolo puro, 670
 - distribuição radial de energia, 712
 - distribuição radial de momento angular, 725

- potência média
 - caso geral, 678
 - mesmo índice ℓ , 677
 - multipolo puro, 672
- sem fontes, 617
 - coeficientes, 627
 - elétricos, 625
 - equação de Helmholtz, *veja* Equação de Helmholtz
 - função radial, 623, 625
 - magnéticos, 625
 - modos ET, 626
 - modos MT, 625
- Número de onda, 56
 - dielétrico, 327
- O. Wiener, 465
- Ondas eletromagnéticas, 281
 - absorção, *veja* Absorção
 - amplitude, 283
 - circularmente polarizada, 295
 - comprimento de onda, 282
 - densidade de energia, 311
 - vácuo, 313
 - dielétrico, 325
 - dispersão, *veja* Dispersão
 - elipticamente polarizada, 298
 - equação diferencial,
 - veja* Equação de onda
 - espectro, 312
 - fio condutor, 357
 - forma geral, 299
 - freqüência, 283
 - freqüência angular, 283
 - freqüências, 312
 - intensidade, 318, 329
 - linearmente polarizada, 292
 - momento linear, 315, 329
 - densidade, 316
 - onda monocromática, 301
 - período, 282
 - planas
 - condutor, 337, 342, 348
 - dielétrico, 330
 - vácuo, 301
 - pressão de radiação, 319, 324, 329
 - profundidade de penetração,
 - veja* Profundidade de penetração
 - reflexão, *veja* Reflexão
 - refração, *veja* Refração
 - superposição, 387
 - tensor de Maxwell, 322
 - velocidade, 283
 - dielétrico, 326
 - vetor de onda, 299
 - vetor de Poynting, 315, 328
 - média, 337
- Ondas eletromagnéticas planas
 - expansão em ondas esféricas, 889, 1059
- Ondas mecânicas, 283
 - equação diferencial, 286
- Operador ∇
 - transverso, 743
- Operador d'Alambertiano $\square^2$, 35
- Parte principal, 405
- Potência, 194
- Potenciais de Hertz, *veja* Potenciais de polarização
- Potenciais de Liénard-Wiechert, 103
 - campo elétrico, 125
 - campo de aceleração, 130
 - campo de velocidade, 130
 - carga em MRU, 153, 154

- Heaviside-Feynman, 115, 118
- Jefimenko, 116
- campo magnético, 128
 - campo de aceleração, 132
 - campo de velocidade, 132
- carga em MRU, 153, 155
- Heaviside-Feynman, 115, 119
- Jefimenko, 116
- carga em MRU, 146, 150
- densidade de carga no tempo retardado, 107
- densidade de corrente no tempo retardado, 109
- equações de Jefimenko, 115
- fator geométrico, 106
- força de Lorentz, 133
- potencial elétrico, 105, 108, 113
- potencial vetorial
 - magnético, 109, 114
- Potenciais de polarização, 173, 177
 - campo elétrico, 185
 - campo magnético, 185
 - equações diferenciais, 178, 179, 181
 - transformação de calibre, 182
- Potenciais eletromagnéticos, 27
 - Campo elétrico, 29
 - Campo magnético, 28
 - equação diferencial, 30, 31
- Potenciais retardados, 52
 - equações de Jefimenko, *veja* Equações de Jefimenko
 - equações diferenciais, 52
 - soluções, 53
 - fio infinito, 87
 - funções de Green, 54
 - potenciais de Liénard-Wiechert, *veja* Potenciais de Liénard-Wiechert
 - soluções, 67
 - tempo avançado, 66
 - tempo retardado, 53
- Princípio de Fermat, 433
 - reflexão, 433
 - refração, 436
- Profundidade de penetração, 345, 352
- Quantização da carga elétrica, 258, 264
 - monopolo magnético, 264
 - calibre, 267, 275
 - campo magnético, 265
 - Dirac, 268
 - potencial vetorial magnético, 265, 270
- Radiação, 485
 - baixa velocidade, 488
 - diagrama, 490
 - distribuição angular de potência, 490
 - fórmula de Larmor, 491
 - potência total, 491
 - vetor de Poynting, 489
- campos de Liénard-Wiechert, 485, 948
- caso geral, 502
 - distribuição angular de potência, 503
 - potência total, 503
- difração, *veja* Difração
- dipolo elétrico, 557, 583
 - campo elétrico, 564, 591
 - campo magnético, 565, 586

- potência média, 566
- potencial elétrico, 561
- potencial vetorial magnético, 563, 585
- vetor de Poynting, 566
- dipolo magnético, 567, 593
 - campo magnético, 573, 595, 596
 - potência média, 575
 - potencial vetorial magnético, 569, 572, 594
 - vetor de Poynting, 574
- distribuição em frequências, 517
 - distribuição angular de potência, 550
 - energia, 521, 548, 550
 - funções de Airy, *veja* Funções de Airy
 - MCU, 541
- distribuições localizadas, 576
 - zona distante, *veja* Zona de radiação
 - zona intermediária, 579
 - zona próxima, *veja* Zona estática
- espalhamento, *veja* Espalhamento
- expansão em multipolos, *veja* Multipolos
- fórmula de Larmor, 934
- guias de ondas, *veja* Guias de ondas
- MCU, 503
 - distribuição angular de potência, 507
 - potência total, 510
 - síncrotron, 515
- potência, 487
 - distribuição angular, 487
- quadrupolo elétrico, 597
 - campo elétrico, 604
 - campo magnético, 602, 603
 - distribuição angular de potência, 605, 615
 - potência média, 608, 612
 - potencial vetorial magnético, 600
- Reação, *veja* Reação de radiação
- unduladores, 554
- velocidade e aceleração paralelas, 491
 - bremsstrahlung, 499
 - campo elétrico, 491
 - distribuição angular de potência, 492
 - potência total, 498
 - vetor de Poynting, 492
- vetor de Poynting, 486, 768
- wigglers, 553
- Reação de radiação, 943
 - conservação de energia, 943
 - fórmula de Abraham-Lorentz, 945
 - modelo de Lorentz, 960
 - aceleração, 973
 - fórmula de Abraham-Lorentz, 970
 - massa eletromagnética, 970
 - modelo dipolar, 946
 - fórmula de Abraham-Lorentz, 960
 - massa eletromagnética, 956
 - solução divergente, 946
 - tempo característico, 946
- Reatância, 1025
 - capacitiva, 1019

- indutiva, 1022
- Reflexão, 419
 - ângulo de Brewster, *veja* Ângulo de Brewster
 - campo elétrico
 - paralelo ao plano de incidência, 438
 - perpendicular ao plano de incidência, 447
 - coeficiente, 426, 446, 450
 - médio, 451
 - condutor, 460
 - campo elétrico, 463
 - experiência de Wiener, 465
 - incidência normal, 461
 - incidência oblíqua, 467
 - dielétricos
 - campo elétrico, 422, 429
 - campo magnético, 422, 430
 - condição para os vetores de onda, 431
 - incidência normal, 420
 - incidência oblíqua, 429
 - vetor de Poynting, 424, 445, 449
 - equações de Fresnel,
 - veja* Equações de Fresnel
 - interna total, 452
 - ângulo crítico, 453
 - campo elétrico, 455
 - efeito Goos-Hänchen,
 - veja* Efeito Goos-Hänchen
 - frustrada, 459
 - velocidade, 455
 - vetor de onda, 454
 - vetor de Poynting, 457
 - lei, 432
 - princípio de Fermat, *veja* Princípio de Fermat
- Refração, 419
 - coeficiente, 427, 446, 451
 - condutor, 460
 - campo elétrico, 463
 - incidência normal, 461
 - incidência oblíqua, 467
 - condutores
 - índice de refração, 468
 - dielétricos
 - campo elétrico, 422, 430
 - campo magnético, 422, 431
 - condição para os vetores de onda, 432
 - vetor de Poynting, 426, 445, 450
 - lei, *veja* Lei de Snell
 - lentes, *veja* Lentes
 - princípio de Fermat, *veja* Princípio de Fermat
- Relação de Euler, 290
- Relações de Kramers-Kronig, 393, 409, 412
 - regra de soma, 412, 416
- Resistência, 368
- Série geométrica, 703
- Tempo avançado, 66
- Tempo de relaxação, 338
- Tempo retardado, 53
- Tensor de Levi-Civita, 245
- Tensor de Maxwell, 220
 - definição, 220
 - divergência, 221
 - força entre duas cargas, 234
 - simétrico, 243
- Tensor de momento angular, 248
- Teorema óptico, 837, 845
- Teorema de Cauchy, 398
- Teorema de Green, 643, 824

Teorema de Parseval

primeiro, 519

segundo, 518

Transformações de calibre, 31

calibre de Coulomb, *veja* Calibre de Coulomb

calibre de Lorentz, *veja* Calibre de Lorentz

Velocidade

fase, 377

grupo, 377

Velocidade da luz

vácuo, 303

definição, 304

Vetor de onda, 299

reflexão interna total, 454

Vetor de Poynting, 197

média, 337

Zona de radiação, 581

potencial vetorial

magnético, 582

Zona estática, 580

potencial vetorial

magnético, 581